Database di Esercizi
per il corso di Matematica al I anno
della Scuola Normale Superiore

Andrea C. G. Mennucci

(versione 28 aprile 2024)

Pisa, Italia

Raccolta di esercizi e elementi di teoria proposti nelle esercitazioni del corso interno di Matematica rivolto agli allievi del I anno della Scuola Normale Superiore.

`[questa è una bozza vi sono molti errori]`

§1 Introduzione [100]

La Scuola Normale Superiore è un prestigioso istituto universitario a ordinamento speciale che accoglie studenti in due percorsi distinti: il *corso ordinario*, parallelo ai corsi di laurea triennale e magistrale, e il *corso di perfezionamento*, noto anche come PhD.

Durante l'anno accademico gli studenti ”normalisti” del corso ordinario devono seguire, oltre ai corsi universitari regolari presso l'Università di Pisa, alcuni ”corsi interni”. Gli studenti normalisti iscritti al primo anno di laurea in materie scientifiche come Matematica, Fisica, Chimica e Biologia, seguono un corso interno annuale di Matematica che mira ad approfondire e ampliare le nozioni tradizionalmente incluse nei programmi dei corsi universitari, che i normalisti seguono in parallelo.

Negli ultimi quindici anni questo corso ha incluso una serie di argomenti fondamentali. Inizia con un approfondimento dei fondamenti della Matematica, compreso l'uso degli assiomi di Zermelo-Fraenkel per la teoria degli insiemi, la costruzione degli insiemi numerici e la caratterizzazione dei numeri reali $\mathbb{R}$ come campo ordinato completo. Prosegue con argomenti come serie e successioni, spazi metrici e topologia, calcolo differenziale ed equazioni differenziali ordinarie.

In questi anni sono stati titolari del corso i professori Giuseppe Da Prato, Fulvio Ricci, Luigi Ambrosio e Franco Flandoli. Alle esercitazioni, hanno collaborato, oltre all'autore del presente volume, Francesco Bonsante, Carlo Mantegazza, Simone Di Marino, Tommaso Pacini, Luciano Mari, Lorenzo Mazzieri, Andreas Hochenegger, Andrea Ferraguti, Alessandra Caraceni.

Gli appunti di questo corso sono stati pubblicati in [3].

L'autore ha collaborato alla parte delle ”esercitazioni” (ora chiamata ”didattica integrativa”) per oltre dieci anni, accumulando una vasta quantità di materiale teorico e di esercizi, che vengono ora presentati in questo volume.

Come già per il testo [3], così anche questo volume non è completamente autonomo, poiché è pensato come un complemento ai corsi universitari standard del primo anno. Tuttavia, la prima parte costituisce un'eccezione, poiché i corsi che coprono gli argomenti dei fondamenti di logica di solito non sono offerti nel primo anno, e i testi spesso utilizzati in questi corsi non sono di facile accesso per gli studenti di primo anno. Pertanto, i capitoli 3 e 4 sono stati ampliati per includere gli elementi teorici necessari, spesso presentati sotto forma di esercizi. D'altra parte, a partire dal Capitolo 5, sono fornite referenze utili e/o necessarie per affrontare gli esercizi, oltre a definizioni e lemmi.

Va notato che la numerazione nel volume segue un metodo specifico: le sezioni (e sottosezioni), le note a piè di pagina e le figure sono numerate in modo indipendente, mentre tutto il resto del materiale nel volume segue una numerazione unica, divisa per sezioni. Ciò include teoremi, proposizioni, lemmi, equazioni, e altro ancora. Le diverse numerazioni sono rese distinguibili dall'uso di numeri romani o arabi e/o da appositi simboli, quale § per le sezioni e † per le note.

ColDoc [2G2]

L'autore ha creato un pacchetto software denominato `ColDoc` (liberamente disponibile) che semplifica la gestione di documenti LaTeXcomplessi e ne permette la fruizione *online*. È utilizzabile sia da computer che da tablet e smartphone.

La versione `ColDoc` di questo testo è accessibile all'indirizzo `https://coldoc.sns.it/CD/EDB`; questo portale fu inizialmente creato per facilitare l'interazione con gli studenti nell'anno della pandemia Covid. Il software `ColDoc` è stato migliorato negli anni, ed è adesso un robusto sistema di *document management*.

Il sistema `ColDoc` ha diviso il testo in piccoli elementi, ciascuno identificato da un codice `UUID`. Il codice `UUID` identifica permanentemente un oggetto; laddove il numero assegnato dal sistema LaTeX potrebbe cambiare se altro materiale venisse aggiunto prima di questo oggetto (ad esempio, in una futura nuova edizione). Il codice `UUID` può essere dunque usato per riferimenti bibliografici, come anche per appuntarsi un elemento di interesse e condividerlo con un collega o uno studente, in quanto il codice `UUID` si può usare per ritrovare l'elemento nell'interfaccia *web*. Per esempio, questa introduzione sarà ritrovabile all'indirizzo `https://coldoc.sns.it/UUID/EDB/2G1`.

Il sistema `ColDoc` implementa inoltre un sistema per gestire documenti LaTeX multilingua: questo testo per esempio è disponibile in Inglese e in Italiano.

Copyright [009]

§2 Notazioni [00B]

- $\mathbb{N}$ sono i numeri naturali, incluso lo zero.
- $\mathbb{Z}$ sono i numeri interi.
- $\mathbb{Q}$ sono i numeri razionali.
- $\mathbb{R}$ è la retta reale.
- $\mathbb{C}$ sono i numeri complessi.

Un'elenco di simboli si trova inoltre all'inizio dell'indice analitico.

Nota 2.1. *I simboli $\wedge$ e $\vee$ possono essere utilizzati in due contesti diversi, dove assumono significati diversi.* [2DM]

- *Se $x, y \in \mathbb{R}$ sono numeri reali, allora $x \wedge y$ è il minimo dei due numeri, mentre $x \vee y$ è il massimo dei due numeri. Questa interpretazione è appropriata anche quando x, y sono in un insieme totalmente ordinato.* [†1]
- *In logica matematica, $\wedge$ è la* congiunzione *e $\vee$ è la* disgiunzione*. Vedi 3.a.4.*

Nota 2.2. *I simboli () usati per le parentesi sono purtroppo sovraccarichi di significati nel linguaggio matematico comune.* [2FG]

- *Sono usati per raggruppare operazioni algebriche, per indurre un diverso ordine di operazioni (rispetto alle regole standard di precedenza). Ad esempio, per $x, y \in \mathbb{R}$,* [†2] *l'espressione $x(y+2)$ è identica a $xy + 2x$ e non a $xy + 2$.*
- *Sono usati per indicare argomenti di funzioni. Ad esempio l'espressione $f(x+y)$ dovrebbe essere letta come $fx+fy$, se $f, x, y \in \mathbb{R}$* [†3]*; mentre, se f è una funzione $f : \mathbb{R} \to B$, allora $f(x+y)$ è il risultato $f(z)$ ottenuto valutando f sull'elemento $z = x + y$.*

  Per distinguere questi due usi, può essere sufficiente aggiungere un simbolo esplicito per indicare la "moltiplicazione", ad esempio scrivere $f * (x + y)$ quando dovrebbe essere letto come $f * x + f * y$. (Alcuni autori scrivono anche $f.(x+y)$ con un "punto")
- *Sono usati per definire intervalli, ad esempio, $(1, \pi)$ può essere l'abbreviazione di:* «l'insieme dei numeri reali maggiori di 1 e minori di π;» *cioè*

  $$(1, \pi) = \{t \in \mathbb{R} : 1 < t < \pi\} ;$$

  questo si estende agli insiemi ordinati, si veda Sez. §3.d.d.
- *Sono usati per rappresentare elementi del prodotto cartesiano; ad esempio, $(1, \pi)$ è un punto in $\mathbb{R}^2$ con 1 come ascissa e π come ordinata.*

[†1] $\wedge$ e $\vee$ sono usati anche in insiemi parzialmente ordinati, ma non discuteremo la loro definizione in questo testo.

[†2] O, più in generale, se x, y sono elementi di un *anello* dove la moltiplicazione è indicata dalla giustapposizione di simboli.

[†3] Di nuovo, più in generale, se f, x, y sono elementi di un *anello* dove la moltiplicazione è denotata dalla giustapposizione.

Mentre la prima e la seconda situazione sono solitamente discernibili e riconoscibili, la terza e la quarta possono causare confusione.

È necessaria una certa attenzione nell'analisi delle frasi che coinvolgono prodotti cartesiani di insiemi ordinati, come ad esempio: «un punto (x, y) nel rettangolo R del piano che è il prodotto $R = (0, 1) \times (2, 4)$». *Qui (x, y) è un punto in $\mathbb{R}^2$ mentre $(0, 1), (2, 4)$ sono intervalli in $\mathbb{R}$.*

Per evitare confusione, possiamo usare una notazione diversa per i punti e/o per gli intervalli: molti simboli simili a "parentesi" sono disponibili al giorno d'oggi nello spazio di codice Unicode esteso; e sono utilizzabili in LaTeX usando il pacchetto `unicode-math`.

Ad esempio, nell'affermazione precedente, possiamo usare questa notazione (non standard): parentesi barrate $⦇\ldots⦈$ per indicare il punto in $\mathbb{R}^2$ con x come ascissa e y come ordinata; le doppie parentesi $⦅a, b⦆ = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ per gli intervalli; in modo da ottenere «un punto $⦇x, y⦈$ nel rettangolo R del piano che è il prodotto $R = ⦅0, 1⦆ \times ⦅2, 4⦆$». *In questo caso, per coerenza tipografica, possiamo usare allo stesso tempo doppie parentesi quadre per intervalli chiusi, ad esempio $⟦2, 4⟧$.*

Questo può essere considerato eccessivo per questo esempio. Ma la situazione può essere più complicata!

Ad esempio, potremmo avere a che fare con intervalli di elementi di un insieme ordinato X, che è anche un prodotto cartesiano $X = X_1 \times X_2$ di insiemi ordinati X_1, X_2 (!) [†4] *In tal caso, possiamo prima etichettare gli ordinamenti: $\leq_1$ essendo la relazione d'ordine su X_1, $\leq_2$ essendo la relazione d'ordine su X_2, e $\preceq$ essendo la relazione d'ordine su X; e utilizzare una notazione (non standard) per gli intervalli, ad esempio*

$$⦅a, b⦆_1 = \{t \in X_1 : a <_1 t <_1 b\}$$

per gli intervalli aperti nel primo insieme (con estremi $a, b \in X_1$),

$$⦅z, w⦆_{\preceq} = \{x \in X : w \prec x \prec z\}$$

per intervalli aperti nel prodotto cartesiano X (con estremi $z, w \in X$), e così via. Ancora una volta, per coerenza tipografica, possiamo usare doppie parentesi quadre per intervalli chiusi, come ad esempio

$$⟦a, b⟧_1 = \{x \in X_1 : a \leq_1 x \leq_1 b\}$$

e così via.

Nel seguito useremo spesso le usuali parentesi $()$, come è consuetudine; ma in certi contesti useremo la notazione proposta in questa nota (quando potrebbe aiutare nella comprensione del testo).

Si vedano inoltre le note 3.a.6 e 6.1.

[†4] Ed esiste un metodo standard per ordinare un prodotto cartesiano di insiemi ordinati, si veda Sez. §3.d.b.

§3 Fondamenti [00C]

§3.a Logica [1YS]

Nelle prossime sezioni daremo alcune definizioni; queste sono semplificate, ma sufficienti per affrontare gli esercizi. I lettori interessati a un approfondimento possono consultare un libro di logica quale ad esempio [13]. [23H]

§3.a.a Proposizioni

Definizione 3.a.1. *Una proposizione logica φ è un' asserzione che assume valore di verità o di falsità.* [1VW]

(Svolto il 2022-10-11)

Esempio 3.a.2. *Esempi:* [1VX]

- *"la neve è bianca",*
- *"la Terra ha un diametro di circa 12000km",*
- *"un kg di pane costa 3€".*

(Si potrebbe discutere filosoficamente su cosa si intende per "verità": in molti ambiti la verità di una proposizione è soggettiva, può dipendere dal contesto, dall'interpretazione, da chi fa e da chi risponde alla domanda, da quando la domanda è posta, etc etc; in matematica la situazione è più semplice). [23J]

Una proposizione può dipendere da alcune variabili. Esempi:

- "la persona x di mestiere fa il panettiere",
- "il numero x è maggiore di 9".

Scriveremo

$$P(x) \doteq \text{"il numero x è maggiore di 9"}$$

per dire che $P(x)$ è il simbolo che riassume la proposizione scritta a destra.

Nota 3.a.3. *Perché la proposizione abbia senso, dovremo restringere l'ambito della variabile a un opportuno insieme; nel primo caso, l'insieme degli essere umani; nel secondo caso, un insieme numerico (es. numeri interi).* [23K]

A questo livello della trattazione, il concetto di "insieme" è intuitivo; vedremo più avanti che esiste una teoria assiomatica degli insiemi, quasi universalmente usata in Matematica; comunque anche il concetto intuitivo di insieme è ampiamente usato (Si veda la nota 3.b.16).

§3.a.b Logica proposizionale

Definizione 3.a.4. *Una **logica proposizionale** è un linguaggio, con associato un alfabeto di variabili (che per comodità nel seguito identificheremo con l'alfabeto Italiano)* [00D] *e la famiglia di connettivi* [†5]

negazione, NOT	$\neg$
congiunzione, AND	$\wedge$
disgiunzione, OR	$\vee$
implicazione	$\Rightarrow$
doppia implicazione, iff	$\Leftrightarrow$

a questi simboli aggiungiamo le parentesi, che sono usate per raggruppare parti della formula (quando vi sia il rischio di ambiguità); le parentesi sono omesse quando la precedenza degli operatori lo permette; gli operatori sono elencati nella precedente lista in ordine decrescente di precedenza. [†6]

Definizione 3.a.5. *Le* ***formule ben formate*** *sono* [00G] *(Svolto il 2022-10-11)*

- *formule atomiche, cioè composte da una sola variabile, oppure*
- *una formula del tipo* $\neg(\alpha)$ *dove* α *è una formula ben formata, oppure*
- – *una formula del tipo* $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ *, oppure*
  – *una formula del tipo* $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$ *, oppure*
  – *una formula del tipo* $(\alpha) \vee (\beta)$ *, oppure*
  – *una formula del tipo* $(\alpha) \wedge (\beta)$ *,*

  dove α, β *sono due formule ben formate.*

Si può determinare se una formula è ben formata facendo un numero finito di controlli usando le regole precedenti: infatti le regole stabiliscono che ogni formula ben formata si deve poter spiegare in termini di formule ben formate che sono più corte di lei. Dunque la affermazione *"questa formula è ben formata"* è "decidibile". [†7] [1YK]

Nota 3.a.6. *Nella definizione 3.a.5 si parla di* formule atomiche, cioè composte da una sola variabile*; vogliamo riflettere su questo. Nei linguaggi di programmazione è permesso usare, per identificare gli oggetti (variabili, funzioni, etc), nomi composti da più lettere, come ad esempio* [228]

```
foo = 3 ;
bar = 7;
pippo = foo + bar;
```

Nella matematica questo è inusuale, in quanto in una formula come

$$xyz + abc$$

sarebbe difficile capire se `xyz` *è una variabile, oppure il prodotto di tre variabili* x, y, z*. Per questo, d'abitudine, in matematica gli identificativi sono composti da una sola*

[†5] Nei testi di logica spesso viene usato il simbolo $\rightarrow$ per l'implicazione e il simbolo $\leftrightarrow$ per la doppia implicazione

[†6] Alcuni studiosi usano diversi ordini di precedenza, in particolare alcuni considerano "l'implicazione" precedente alla rispetto alla "disgiunzione". Per questo è sempre meglio usare le parentesi per raggruppare le parti di frase dove questi connettivi vengono usati.

[†7] La definizione precisa di "decidibile" esula da queste note. Pensate a un algoritmo scritto al computer che, data una formula, con un numero finito di passaggi risponda "ben formata" oppure "non ben formata". Notate però che il numero di controlli da fare cresce esponenzialmente con la lunghezza della formula.

lettera; fanno eccezione alcune funzioni notevoli, quali $\sin, \cos, \exp, \log \ldots$ *etc. Questo però crea qualche problema quando si vuole esprimere una formula dove vi siano molte variabili; per questo vengono usati anche lettere dall'alfabeto greco, e persino ebraico, in particolare "aleph"* $\aleph$ *e "beth"* $\beth$*; e le lettere vengono inoltre corredate da indici, a pedice come* x_1, x_2, x_3 *o ad apice* x^1, x^2, x^3 *(stando attenti a non confondersi con l'elevamento a potenza); vi sono poi varianti espressi con i segni* $\hat{x}, \overline{x}, \tilde{x}, x'$ *(stando attenti a non confondersi con le derivate); e vi sono scelte di tipi di carattere, quali il* "calligrafico" $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \ldots$, *il* "fraktur" $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *o il* blackboard bold $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, \mathbb{d} \ldots \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$.

Definizione 3.a.7. *Una **valutazione** assegna ad ogni variabile un valore "vero" oppure "falso". Conoscendo il valore delle variabili, e usando le note tabelle di verità per i connettivi* [†8]*, si può calcolare il valore di ogni formula ben formata.* [00J]

Dunque una formula ben formata è una "*proposizione logica*" in quanto assume valore di verità o di falsità, a seconda del valore dato alle sue variabili libere. Possiamo allargare la definizione aggiungendo che le proposizioni viste nella sezione precedente sono "formule atomiche"; ad esempio

$$\text{“}x \text{ è un numero minore di 3”} \wedge \text{“}y \text{ è un numero pari”}$$

sarà anch'essa una "formula ben formata".

Per comodità, in questa Sezione, aggiungiamo al linguaggio anche le costanti V e F che sono rispettivamente sempre vere e sempre false, in ogni valutazione. [†9] Nella costruzione delle formule ben formate vengono trattate come le variabili. Notate che non abbiamo introdotto il connettivo di uguaglianza "=". Quando tutte le variabili possono assumere solo i valori vero/falso, l'uguaglianza $a = b$ può essere interpretata come $a \iff b$. In contesti più generali (come nel caso della teoria degli insiemi) invece "l'uguaglianza" necessita di una precisa definizione.

Esercizi

E3.a.8 Completate la seguente tabella di verità [1VY]

P	Q	¬ P	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1VZ']

E3.a.9 Dite quali formule sono ben formate, e aggiungete le parentesi per evidenziare l'ordine di precedenza. [00K]

$$a \wedge \neg b \wedge c \wedge d$$
$$\neg a \vee b \wedge c \Rightarrow d$$
$$a \Rightarrow \neg b \wedge c \vee d$$
$$a \wedge b \vee c \Leftrightarrow \neg c \Rightarrow d$$
$$a \vee b \neg c \vee d$$

[†8] Si veda 3.a.8

[†9] Le costanti V e F possono essere eliminate dalla logica definendole come $V = A \vee \neg A$ e $F = \neg V$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0OM']

E3.a.10 Una formula ben formata nella logica proposizionale è una **tautologia** se per ogni *valutazione* la formula è sempre vera. Supponiamo che A, B, C siano formule ben formate. Mostrate che le seguenti proprietà dei connettivi sono tautologie. [†10] [0ON]

$$A \Rightarrow A \qquad \text{legge dell'identità}$$
$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A \qquad \text{legge della doppia negazione}$$
$$A \vee A \Leftrightarrow A \ , \ A \wedge A \Leftrightarrow A \qquad \text{leggi di idempotenza}$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \qquad \text{legge di contrapposizione, o della contronominale}^{\dagger 11} \tag{3.a.11}$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B)) \qquad \text{equivalenza di implicazione, congiunzione e disgiunzione} \tag{3.a.12}$$
$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \qquad \text{prima legge di De Morgan} \tag{3.a.13}$$
$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B) \qquad \text{seconda legge di De Morgan} \tag{3.a.14}$$
$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \qquad \text{proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione} \tag{3.a.15}$$
$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \qquad \text{proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione} \tag{3.a.16}$$
$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A \qquad \text{proprietà commutativa di } \wedge$$
$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A \qquad \text{proprietà commutativa di } \vee$$
$$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C \qquad \text{proprietà associativa di } \wedge$$
$$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C \qquad \text{proprietà associativa di} \vee \tag{3.a.17}$$

Queste due ultime proprietà permettono di omettere le parentesi in sequenze di congiunzioni oppure di disgiunzioni.

Le proprietà (3.a.12),(3.a.13),(3.a.14) dicono che potremmo fondare tutta la logica sui soli connettivi $\neg$ e $\wedge$, (o su $\neg, \vee$).

†10 Queste liste sono tratte dalla Sezione 1.3 in [13], oppure [30].
†11 La proposizione $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ è detta *"contronominale"* della $(A \Rightarrow B)$.

Altre tautologie importanti, spesso usate nel ragionamento logico.

$A \vee \neg A$	legge del terzo escluso	
$\neg(A \wedge \neg A)$	legge di non contraddizione	
$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$	modus ponens	(3.a.18)
$(\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A$	modus tollens	(3.a.19)
$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	negazione dell'antecedente	
$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	affermazione del conseguente	
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$	esportazione	
$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))$	dimostrazione per parti	
$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$	dimostrazione per casi	
$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	sillogismo ipotetico, o transitività dell'implicazione	
$(A \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow$		
$(A \vee F) \Leftrightarrow (A \wedge V) \Leftrightarrow A$	leggi di assorbimento	
$F \Rightarrow B$	prima legge di Pseudo Scoto, o *ex falso sequitur quodlibet*	
$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$	seconda legge di Pseudo Scoto	
$(\neg A \Rightarrow F) \Leftrightarrow A$	dimostrazione per assurdo	
$((A \wedge \neg B) \Rightarrow F) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$	dimostrazione per assurdo, con ipotesi e tesi	
$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$	consequentia mirabilis	(3.a.20)

E3.a.21 Mostrate la validità della seguente tautologia [22C]

$$((\neg A \wedge B) \Rightarrow C) \iff ((\neg C \wedge B) \Rightarrow A)$$

indi usate l'esercizio 3.k.6 per trasformarla in un diagramma di Venn con tre insiemi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '22D']

E3.a.22 Mostrate che il connettivo $\Rightarrow$ di implicazione non è né commutativo né associativo. [†12] *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2G9'] [2G8]

§3.a.c Logica del primo ordine

Nella logica del primo ordine si aggiungono i connettivi $\forall$, che si legge *"per ogni"* e $\exists$, che si legge *"esiste"*. Dobbiamo dunque allargare la famiglia delle **formule ben formate**.

Definizione 3.a.23. *Una formula è ben formata se soddisfa tutte le regole nella lista in 3.a.5 e questa regola aggiuntiva:* "data una formula ben formata ϕ dove la variabile x è libera, una formula della forma "$\forall x, \phi$", o "$\exists x, \phi$" è una formula ben formata." [00Q]

*Diremo che una variabile x è **libera** in una formula ben formata se*

- *la formula è atomica e la variabile x appare in essa; oppure se*
- *la formula è della forma $\neg\alpha$ e la variabile x è libera in α; oppure anche se*
- *la formula è della forma $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \beta, \alpha \iff \beta$ (o altro connettivo logico introdotto in seguito) e la variabile x è libera in α oppure in β.*

[†12] Questo esercizio è stato scritto durante una discussione con Anton Mennucci.

Dunque nelle formule $(\forall x, \phi)$ *o* $(\exists x, \phi)$*, la variabile* x *non è più libera; usa dire che* "la variabile è quantificata" *o* "legata".

In ogni parte di una formula in cui una variabile è quantificata, questa variabile può essere sostituita con ogni altra variabile.

Nota 3.a.24. *La variabile* x *, che sia quantificata in una parte di una formula, torna ad essere libera se viene riusata in un altro pezzo della formula; questo è sintatticamente lecito ma rende meno leggibile la formula, come in questo esempio che usa il linguaggio della teoria degli insiemi* [1X1] (Svolto il 2022-10-11)

$$A \subseteq \mathbb{N} \land x \in \mathbb{N} \land x \geq 4 \land (\forall x \in A, x \leq 10)$$

che andrebbe scritto come

$$A \subseteq \mathbb{N} \land x \in \mathbb{N} \land x \geq 4 \land (\forall y \in A, y \leq 10)$$

rinominando la variabile nella parte in cui questa è quantificata.

Nota 3.a.25. *Si assume come assioma che* [2DC]

$$\neg(\forall x, \phi) \Leftrightarrow (\exists x, \neg\phi) \quad . \tag{3.a.26}$$

(Nella Sez. 2.1 in [13] anzi $(\forall x, \phi)$ *viene presentato come abbreviazione di* $\neg(\exists x, \neg\phi)$*).*

Notate che, in molti esempi, si suppone che le variabili quantificate siano elementi di un "insieme".

Definizione 3.a.27. *Date due variabili* x, y *scriveremo* $x \in y$ *per dire che* "x è un elemento dell'insieme y"*; usa anche dire che* "x appartiene all'insieme y"*, o semplicemente che* "x sta in y". [1X2]

La formula $(x \in y)$ *è equivalente a* $(y \ni x)$*; le negazioni sono* $(x \notin y) \doteq \neg(x \in y)$ *e* $(y \not\ni x) \doteq \neg(y \ni x)$*.*

La formula $(x \in y)$ *(come tutte le altre varianti) assume valore di verità/falsità e dunque può essere usata come* atomo *nella costruzione di una formula ben formata.*

Definizione 3.a.28. *Usa scrivere* [OOR]

"$\forall x \in A, P(x)$" *per dire* "per ogni x in A vale $P(x)$",
oppure
"$\exists x \in A, P(x)$" *per dire* "esiste un x in A per cui vale $P(x)$";

(dove A *è un insieme); per poter collegare queste scritture rigorosamente alle definizioni precedenti, decidiamo che le scritture precedenti sono abbreviazioni per*

$$\forall x \in A, P(x) \doteq \forall x, x \in A \Rightarrow P(x) \quad ,$$
$$\exists x \in A, P(x) \doteq \exists x, x \in A \land P(x) \quad .$$

Notate che le formule a destra sono "formule ben formate". Si veda anche l'esercizio 3.a.35.

Usiamo qui il termine "insieme" in maniera informale, si veda la nota 3.b.16.

Nota 3.a.29. *Notate che "$\forall x \in A, \varphi$" è vera se A è vuoto; questo è consistente con quanto discusso nell'esercizio 3.a.35. Questo però ha una conseguenza importante: l'implicazione* [00S]

(Svolto il 2022-10-11)

$$(\forall x \in A, \varphi) \Rightarrow (\exists x \in A, \varphi)$$

è sempre valida quando A è un insieme non-vuoto, ed è invece falsa quando $A = \emptyset$.

Dato che un elemento di un insieme potrebbe non avere un valore di verità/falsità, arricchiamo il linguaggio aggiungendo le "*proposizioni logiche*".

Definizione 3.a.30. *Una **proposizione logica** ϕ è un' asserzione che assume valore di verità o di falsità dipendentemente dal valore dato alle sue variabili libere, e solo da quello.* [00T]

(Svolto il 2022-10-11)

Un esempio di proposizione logica potrebbe essere: *"n è un numero pari"*. Possiamo usare le proposizioni logiche come atomi nella costruzione delle formule ben formate.

Esercizi

E3.a.31 Siano X, Y insiemi. Siano ϕ, ψ proposizioni logiche; x, a sono variabili libere in ϕ, e y, b sono libere in ψ. Assumiamo inoltre che a, b possano essere solo vere o false, mentre $x \in X, y \in Y$. Considerate le seguenti formule. Quali sono ben formate? Quali variabili sono libere in esse? [00V]

$$\begin{gathered} b \wedge (\forall x, \phi) \\ (\exists y, \psi) \vee (\forall x, \phi) \\ \forall x, \forall b, \big(\phi \wedge (\psi \vee b)\big) \\ a \vee (\forall x, \forall a, \phi) \\ (\exists x, \psi) \wedge (\forall x, \phi) \end{gathered}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '00W']

E3.a.32 Consideriamo una proposizione $P(u, \ell)$ dipendente da due variabili libere u (che prende valori nell'insieme delle persone), e ℓ (nell'insieme dei lavori), e che è così formulata: '*La persona u sa fare il lavoro ℓ*'. [00X]

Esprimete in Italiano le seguenti formule

$$\exists u \exists \ell P(u,\ell)\ , \forall u \exists \ell P(u,\ell)\ , \exists \ell \forall u P(u,\ell)\ ,$$
$$\forall \ell \exists u P(u,\ell)\ , \exists u \forall \ell P(u,\ell)\ , \forall u \forall \ell P(u,\ell)\ .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '00Y']

E3.a.33 Quali implicazioni vi sono fra le precedenti formule? [00Z]

(Svolto il 2022-10-11)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '010']

E3.a.34 Si verifichi che [011]

$$\Big((\forall x,\ \varphi(x)) \wedge (\forall y,\ \psi(y))\Big) \iff \Big(\forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))\Big)$$

E3.a.35 Come già commentato in 3.a.28, dato A un insieme, e $P(x)$ una proposizione logica dipendente da una variabile libera x, usa scrivere [016]

$$\forall x \in A, P(x) \quad , \quad \exists x \in A, P(x)$$

però

$$\forall x \in A, P(x) \text{ riassume } \forall x, (x \in A) \Rightarrow P(x) \ ,$$

$$\exists x \in A, P(x) \text{ riassume } \exists x, (x \in A) \wedge P(x) \ ;$$

laddove le versioni "estese" sono formule ben formate.

Usando questa scrittura estesa dimostrate che le due proposizioni

$$\neg(\forall x \in A, P(x)) \ , \ \exists x \in A, (\neg P(x)) \ .$$

sono equivalenti, nel senso che da una è possibile dimostrare l'altra (e viceversa). Nella dimostrazione usate solo le tautologie (elencate in 3.a.10) e in particolare l'equivalenza della formula "$P \Rightarrow Q$" con "$(\neg P) \vee Q$" †13 , e infine l'equivalenza fra "$\neg\exists x, Q$" e "$\forall x, \neg Q$" †14.

Sostituendo poi $P(x)$ con $\neg P(x)$ e usando la tautologia della doppia negazione si ottiene infine che

$$\forall x \in A, (\neg P(x)) \ , \ \neg(\exists x \in A, P(x))$$

sono equivalenti.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '017']

E3.a.36 Dato A un insieme, e $P(x)$ una proposizione dipendente da una variabile libera x, usa scrivere [013]

$$\exists! x \in A, P(x)$$

quando vi è uno e un solo elemento x di A per cui $P(x)$ è vera. Definite questa notazione con una formula ben formata. (Notate che avrete bisogno di usare il connettivo di uguaglianza, perché dovete poter esprimere l'idea di "unico", che necessita di un metodo per poter dire quando due oggetti sono distinguibili e quando non lo sono).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '015']

§3.b Teoria degli insiemi [1YT]

§3.b.a Teoria degli insiemi elementare [242]

Come già spiegato nella Definizione 3.a.27, nella teoria degli insiemi si aggiunge il connettivo "$\in$" ; dati due insiemi z, y la formula $x \in y$ si legge *"x appartiene a y"* o più semplicemente *"x è in y"*, e indica che x è un elemento di y.

È uso indicare gli insiemi usando come variabili lettere Italiane maiuscole.

Definizione 3.b.1. *Si aggiunge anche il connettivo $a = b$ fra insiemi, che è vero quando* [1Y8] *(Svolto il 2022-10)*

$$\forall x, x \in a \iff x \in b \ .$$

*Questo è l'**assioma di estensionalità**.*

Questo dice che due insiemi a e b sono uguali quando hanno gli stessi elementi; cioè, esclude che un insieme possa avere qualche altra proprietà che lo contraddistingue †15. [226]

Definizione 3.b.2. *Per comodità viene usato il connettivo $a \subseteq b$ per indicare che a è un sottoinsieme di b; formalmente questo si definisce come* [227]

$$\forall x, x \in a \Rightarrow x \in b \ .$$

$b \supseteq a$ è equivalente a $a \subseteq b$.

Ovviamente $a = b \iff ((a \subseteq b) \land (b \subseteq a))$. Notate che $a \subseteq a$.

Si scrive usualmente $x \notin y$ per $\neg(x \in y)$, $x \nsubseteq y$ per $\neg(x \subseteq y)$ e così via.

Nota 3.b.3. *Vi sono anche altri simboli usati. Alcuni testi usano $a \subset b$ per indicare che $a \subseteq b$ ma $a \neq b$ (come negli appunti [3]); altri usano una scrittura più espressiva come $a \subsetneq b$ per dire che $a \subseteq b$ ma $a \neq b$. (Alcuni persino usano $a \subset b$ al posto di $a \subseteq b$, purtroppo — come per esempio [14]).* [1W0]

Viene inoltre definita la costante $\emptyset$ indicato anche come $\{\}$ che è l'insieme vuoto,[†16] caratterizzato da

$$\forall x, \neg x \in \emptyset \quad .$$

Si dimostra che l'insieme vuoto è unico.

Si introducono dunque alcune concetti fondamentali: unione, intersezione, differenza simmetrica, insieme potenza, prodotto cartesiano, relazioni, funzioni *etc*.

Definizione 3.b.4. *Data I una famiglia non-vuota di indici e dati C_i insiemi (uno per ogni $i \in I$), allora l'**unione*** [1Y2]

$$\bigcup_{i \in I} C_i$$

è un insieme, che contiene tutti (e soli) gli elementi di tutti gli insiemi C_i; in formula[†17]

$$\bigcup_{i \in I} C_i \stackrel{def}{=} \{x : \exists i \in I, x \in C_i\} \quad .$$

Nel caso siano dati solo due insiemi C_1, C_2, usa scrivere $C_1 \cup C_2$ per indicare l'unione; e similmente quando sono dati finiti insiemi.

Definizione 3.b.5. *Data I una famiglia non-vuota di indici e dati C_i insiemi (uno per ogni $i \in I$), definiamo l'**intersezione*** [1W1]

$$\bigcap_{i \in I} C_i$$

che è l'insieme che contiene gli elementi che appartengono a tutti gli insiemi C_i (per tutti gli $i \in I$).

Nel caso siano dati solo due insiemi C_1, C_2, usa scrivere $C_1 \cap C_2$ per indicare l'intersezione, e si ha

$$C_1 \cap C_2 \stackrel{def}{=} \{x \in C_1 \cup C_2 : x \in C_1 \land x \in C_2\} \quad ;$$

e similmente quando sono dati finiti insiemi.

L'insieme potenza è definito come in ZF:5.

Definizione 3.b.6. *Altri operatori fra insiemi sono:* [23S]

- *la differenza*

$$A \setminus B \stackrel{def}{=} \{x \in A : x \notin B\} \quad ;$$

- *se l'insieme A è chiaramente specificato dal contesto, e se $B \subseteq A$ usa anche scrivere $B^c \stackrel{def}{=} A \setminus B$; si dice che B^c è il complementare di B in A;*
- *la differenza simmetrica*

$$A \Delta B \stackrel{def}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \in A \cup B : x \in A \iff x \notin B\} \quad ;$$

dove A, B sono insiemi.

Esercizi

E3.b.7 Dimostrate che $A = B$ se e solo se $((A \subseteq B) \land (B \subseteq A))$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1W7']* [1W6] *(Proposto il 2022-10-11)*

E3.b.8 Rappresentate le operazioni [1W8]

- $\cup$ unione
- $\cap$ intersezione
- $\setminus$ differenza
- Δ differenza simmetrica

fra due insiemi usando diagrammi di Venn.

E3.b.9 `Prerequisiti:3.b.8.`Usate i precedenti diagrammi di Venn per mostrare che in generale $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$. [1W9]

E3.b.10 Mostrate che se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$ allora $X \subseteq Z$ *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1WD']* [1WB]

E3.b.11 Spiegate perché l'operazione di unione $A \cup B$ fra due insiemi è commutativa, e mostrate che è associativa; similmente per la intersezione; infine mostrate che l'unione distribuisce rispetto all'intersezione, e anche che l'intersezione distribuisce rispetto all'unione. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1W3']* [1W2]

E3.b.12 Considerate gli insiemi: [1WF] *(Proposto il 2022-12)*

- P l'insieme dei professori,
- S l'insieme degli scienziati,
- F l'insieme dei filosofi,

[†13] Tautologia in eqn. (3.a.12).
[†14] Già discussa in eqn.(3.a.26).
[†15] Si potrebbe immaginare una teoria degli insiemi in cui le parentesi possono essere "rosse" o "blu", e l'uguaglianza fra insiemi si ha quando gli elementi e i colori sono gli stessi. Nella teoria usuale le parentesi sono sempre nere.
[†16] Nella teoria assiomatica di Zermelo–Fraenkel l'esistenza di $\emptyset$ è un assioma.
[†17] Questa è una versione più maneggevole dell'assioma ufficiale. La definizione ufficiale si trova in ZF:4.

- M l'insieme dei matematici.

Per ognuna delle seguenti frasi, scrivete una formula che la rappresenti, usando gli insieme soprascritti, l'insieme vuoto, le relazioni $\subseteq, =, \neq$, e le operazioni insiemistiche $\cup, \cap, \setminus$.

- non tutti i professori sono scienziati
- qualche matematico è filosofo;
- se un filosofo non è matematico allora è professore;
- tutti i filosofi sono scienzati o professori, ma non matematici;
- se c'è un matematico che è anche scienziato, allora non è né filosofo né professore.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1WG']

E3.b.13 Sia U l'insieme degli esseri umani, A l'insieme degli animali e M l'insieme delle creature mortali; trasformate il seguente sillogismo in formule e dimostratelo: [1Y4]

ogni uomo è un animale, ogni animale è mortale, dunque ogni uomo è mortale.

E3.b.14 Spiegate la formula $\bigcup_{B\in\mathcal{P}(A)} B$ avendo a disposizione la definizione 3.b.4 dell'assioma dell'unione. Poi mostrate che $A = \bigcup_{B\in\mathcal{P}(A)} B$. [1WC]

Si veda anche 3.b.25 dove lo stesso risultato si ottiene partendo dall'assioma dell'unione come definito in ZF:4 nell'assiomatica di Zermelo–Fraenkel.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1WV']

E3.b.15 Sia I, C_i come in 3.b.4 e sia A un insieme; dimostrare che [24P]

$$\bigcup_{i\in I} C_i \subseteq A$$

se e solo se

$$\forall i \in I,\ C_i \subseteq A\ .$$

Nota 3.b.16. *Si distingue fra una* teoria informale degli insiemi *e una* teoria formale degli insiemi. †18 [01J]

La teoria informale degli insiemi sfrutta tutte le nozioni precedentemente elencate, ma non indaga sui fondamenti, cioè sulle assiomatizzazione. Per questo approccio consigliamo il testo [10]; o [32] per una breve discussione.

La teoria formale degli insiemi *più usata è la assiomatica di Zermelo–Fraenkel, che ricapitoleremo nella prossima sezione. Si veda il Cap. 6 in [13] (per una breve introduzione può andare bene anche [31]).*

Nella teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo—Fraenkel tutte le variabili rappresentano insiemi, dunque le variabili non hanno un significato di verità o falsità. Per questo, nelle definizioni 3.a.5 e 3.a.23 di formula ben formata *si cambia il concetto di "atomo". Un atomo è ora una formula della forma $a \in b$ che ha valore di verità/falsità.*

Mentre nella teoria formale tutto gli elementi del linguaggio sono insiemi, nella pratica si tende a distinguere fra gli insiemi, e gli altri oggetti della Matematica (numeri, funzioni, etc etc); per questo nel seguito useremo in genere le lettere maiuscole per indicare gli insiemi, e le lettere minuscole per indicare altri oggetti.

†18 Si veda l'introduzione al Cap. 6 in [13] per una discussione che confronta questi due approcci.

§3.b.b Assiomi di Zermelo–Fraenkel [241]

Vediamo ora brevemente gli assiomi della teoria degli insiemi di Zermelo–Fraenkel.

ZF:1 Assioma di estensionalità, già visto sopra in 3.b.1.

ZF:2 L'insieme vuoto ∅ è un insieme. In formule: [014]

$$\exists X \,:\, \forall Y \neg (Y \in X)$$

per il precedente assioma, X è unico, e viene denotato con ∅

ZF:3 **Assioma della coppia.** Dati comunque due insiemi X e Y esiste un insieme Z, rappresentato come $Z = \{X, Y\}$, i cui elementi sono solo X e Y. In formula [1Y3]

$$\forall X, Y \exists Z \,:\, \forall W (W \in Z) \iff (W = X) \vee (W = Y) \quad .$$

Di nuovo l'insieme Z è unico per effetto dell'assioma di estensionalità 3.b.1.

ZF:4 L'**assioma dell'unione**[†19] dice che per ogni insieme A esiste un insieme B che contiene tutti gli elementi degli elementi di A; in simboli, [026]

$$\forall A \exists B, \forall x, (x \in B \iff (\exists y, y \in A \wedge x \in y)) \;.$$

Si mostra che questo è unico, per effetto dell'assioma di estensionalità 3.b.1; indichiamo questo insieme B con $\underline{\bigcup} A$ (per non confonderlo col simbolo già introdotto prima).

Per esempio se

$$A = \{\{1, 3, \{5, 2\}\}, \{7, 19\}\}$$

allora

$$\underline{\bigcup} A = \{1, 3, \{5, 2\}, 7, 19\} \quad .$$

Dati $A_1, \ldots A_k$ insiemi, sia $D = \{A_1, \ldots A_k\}$ [†20] definiamo

$$A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_k \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\bigcup} D \quad .$$

ZF:5 L'**assioma dell'insieme potenza** dice che per ogni insieme A, esiste un insieme $\mathcal{P}(A)$ i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di A. Una formula abbreviata di definizione è [1Y1]

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{B \,:\, B \subseteq A\right\} \quad .$$

$\mathcal{P}(A)$ si chiama anche *insieme delle parti*.

Nel linguaggio formale degli assiomi di Zermelo-Fraenkel, l'assioma si scrive:

$$\forall A, \exists\, Z, \forall y, y \in Z \iff (\forall z, z \in y \implies z \in A) \quad ;$$

questa formula comporta che l'insieme potenza Z è unico, dunque possiamo denotarlo con il simbolo $\mathcal{P}(A)$ senza tema di equivoci.

†19 Questa è la versione "ufficiale" di Zermelo–Fraenkel. Spesso però viene usata la versione semplificata 3.b.4

†20 L'esistenza di questo insieme sarà dimostrata in 3.b.35

Notate che

$$(\forall z, z \in y \implies z \in A)$$

si può abbreviare con $y \subseteq A$ e dunque l'assioma può essere scritto come

$$\forall A, \exists\, Z, \forall y, y \in Z \iff (y \subseteq A) \quad ;$$

usando poi l'estensionalità, si ottiene che

$$Z = \{y : (y \subseteq A)\} \quad .$$

ZF:6 Assioma dell'infinito (si veda 3.h.11)

ZF:7 L'**assioma di specificazione**, che recita [1Y0]

Se A è un insieme, e $P(x)$ è una proposizione logica, allora $\{x \in A : P(x)\}$ è un insieme.

Formalmente, ponendo $B = \{x \in A : P(x)\}$,

$$\forall X, X \in B \iff X \in A \wedge P(x) \quad .$$

Questo assioma evita il paradosso di Russel: sia A l'insieme degli x tali che $x \notin x$, allora non si ha né $A \in A$ né $A \notin A$.

ZF:8 Assioma di buona fondazione, o di regolarità (si veda 3.b.36)

ZF:9 Assioma di rimpiazzamento

(Abbiamo omesso le definizioni dell' *"Assioma di rimpiazzamento"*; si puo trovare in Cap.1 Sez.16 in [3] oppure Cap. 1 in [14]).

Vi è un ulteriore assioma, l'*Assioma della scelta*: questo sarà discusso in Sez. §3.b.c.

Nota 3.b.17. *Si indica usualmente con la sigla "ZF" la teoria basata sugli assiomi Zermelo–Fraenkel; si indica con "ZFC" la teoria data dagli assiomi di Zermelo–Fraenkel con l'aggiunta dell'assioma della scelta.* [2DX]

Nota 3.b.18. *È di uso comune questa dicitura:* "sia I un insieme non vuoto di indici, sia A_i una famiglia di insiemi indicizzata da $i \in I$"*; questa, nella teoria assiomatica, andrebbe scritta come* "sia I un insieme non vuoto, sia X un insieme, sia $A : I \to \mathcal{P}(X)$ una funzione; scriveremo A_i al posto di $A(i)$"*. (Con questa scrittura si ha che gli A_i sono tutti sottoinsiemi di X).* [01M]

Esercizi

E3.b.19 La notazione in ZF:4 differisce da quella usuale, che è $\bigcup_{i \in I} C_i$, dove I è una famiglia di indici non-vuota e C_i sono insiemi; come visto in 3.b.4. [23W]

Come potete definire $\bigcup_{i \in I} C_i$ usando l'assioma dell'unione presentato in ZF:4? *(Sugg. rileggete la nota 3.b.18)*

Alla fine dovreste ottenere

$$\forall x, x \in \bigcup_{i \in I} C_i \iff \exists i \in I, x \in C_i \quad . \tag{3.b.20}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '027']

E3.b.21 Mostrate che la definizione di intersezione 3.b.5 è ben posta, usando gli assiomi Z-F. Alla fine mostrate anche che [23T] (Proposto il 2022-10-11) (Svolto il 2022-10-25)

$$\forall x, x \in \bigcap_{i\in I} C_i \iff (I \neq \emptyset \land \forall i \in I, x \in C_i) \quad . \tag{3.b.22}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '23V']

E3.b.23 Prerequisiti:3.b.21,ZF:4,ZF:7,3.a.29. Sia dato un insieme A non vuoto; definite B come l'insieme che contiene tutti gli elementi che stanno in tutti gli elementi di A. Scrivete una formula ben formata che definisca B, mostrate che B è un insieme e mostrate che è unico; per simmetria con l'assioma ZF:4 lo indicheremo con [252]

$$B = \underline{\bigcap} A \quad .$$

È legato alla usuale notazione dalla relazione

$$\underline{\bigcap} A = \bigcap_{x\in A} x \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '254']

E3.b.24 Prerequisiti:3.b.19,3.b.21. Ora che avete correttamente definito l'unione 3.b.5 e l'intersezione 3.b.4 usando gli assiomi Z-F, dite quale valore assumono [247] (Svolto il 2022-10-25)

$$\bigcap_{i\in I} C_i$$

e

$$\bigcup_{i\in I} C_i$$

quando I è l'insieme vuoto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '249']

E3.b.25 Prerequisiti:ZF:4. Usando la definizione di $\underline{\bigcup}$ presentata in ZF:4, mostrate che $A = \underline{\bigcup}(\mathcal{P}(A))$. [028]

E3.b.26 Dati X insieme e I, C_i come in 3.b.5 e 3.b.4, mostrate che [248] (Svolto il 2022-10-25)

$$X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) \quad . \tag{3.b.27}$$

Cosa succede quando I è l'insieme vuoto?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '24B']

E3.b.28 Se A è un insieme di n elementi ($n \geq 0$ numero naturale) allora quanti elementi vi sono in $\mathcal{P}(A)$? [1W4] (Proposto il 2022-12)

E3.b.29 Scrivete esplicitamente $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset)$. Quanti elementi ha? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1WX'] [023]

E3.b.30 Siano dati a, b, x, y. [1Y9]

1. Mostrate che nell'ipotesi
$$\{a, b\} = \{x, y\}$$
si ha che
$$(a = b) \iff (x = y) \iff a = b = x = y \quad .$$
2. Deducete in particolare che se
$$\{a\} = \{x, y\}$$
allora $a = x = y$.
3. Mostrate poi che se ipotizziamo che i quattro elementi a, b, x, y non siano tutti uguali, allora si ha
$$\{a, b\} = \{x, y\}$$
se e solo se $a = x \wedge b = y$ oppure $a = y \wedge b = x$.

Per mostrare quanto sopra siate più precisi possibile: usate l'assioma di estensionalità 3.b.1, l'assioma della coppia ZF:3 e le tautologie mostrate nella sezione precedente (o altre relazioni logiche elementari). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1YB']*

E3.b.31 Prerequisiti:3.b.30. La *coppia ordinata* viene definita come [01N] *(Svolto il 2022-10-25)*

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad ;$$

(notate che l'*assioma della coppia* ZF:3 ci garantisce che questa è una buona definizione); mostrate che

$$(a, b) = (x, y) \iff (a = x \wedge b = y) \quad . \tag{3.b.32}$$

(Prima soluzione che non usa 3.b.30) Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1WZ']*)

(Seconda soluzione che usa 3.b.30) Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1YC']*)

E3.b.33 Prerequisiti:3.b.30,3.b.36. Immaginiamo una diversa definizione per la *coppia ordinata*, definita come [1YD]

$$(\!|x, y|\!) \stackrel{\text{def}}{=} \{x, \{x, y\}\} \quad ;$$

mostrate che

$$(\!|a, b|\!) = (\!|x, y|\!) \iff (a = x \wedge b = y) \quad . \tag{3.b.34}$$

Per mostrarlo vi servirà 3.b.36. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1YF']*

E3.b.35 Mostrate che, dati $a_1, \ldots a_k$ insiemi, esiste un insieme che contiene tutti e soli questi elementi. Questo insieme viene solitamente indicato con $\{a_1, \ldots a_k\}$. [029] *(Svolto il 2022-10-25)*

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '02B']*

E3.b.36 L'**assioma di buona fondazione** (detto anche **assioma di regolarità**) della teoria di Zermelo–Fraenkel dice che ogni insieme non vuoto X contiene un elemento y che è disgiunto da X; in formula [01R] *(Svolto il 2022-10-25)*

$$\forall X, X \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y\, (y \in X) \wedge (X \cap y = \emptyset))$$

(ricordiamo che ogni oggetto nella teoria è un insieme, dunque y è un insieme). Usando questo assioma provate questi fatti.

- Non esiste un insieme x che sia elemento di se stesso cioè per cui $x \in x$.
- Più in generale non esiste una famiglia finita $x_1, \dots x_n$ per cui $x_1 \in x_2 \in \dots \in x_n \in x_1$.
- Inoltre non esiste una successione $x_1, \dots x_n, \dots$ di insiemi per cui $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni x_4 \dots$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '01S']*

E3.b.37 `Prerequisiti:`3.b.36. Mostrate che per ogni x esiste un y tale che $y \notin x$ *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '01X']* [01W] *(Svolto il 2022-10-25)*

E3.b.38 Mostrate invece che l'**assioma dell'infinito**, e la conseguente costruzione dei numeri naturali vista in Sez. §3.h, comporta che esiste una successione $x_1, \dots x_n, \dots$ di insiemi per cui $x_1 \in x_2 \in x_3 \dots$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '01Z']* [01Y]

E3.b.39 `Prerequisiti:`3.b.41. Dato A insieme non vuoto mostrate che esiste una bigezione $f : A \to B$ fra A e un insieme B disgiunto da A. [020] *(Svolto il 2022-10-25)*

Più in generale sia I un insieme non vuoto di indici, sia A_i una famiglia di insiemi non vuoti indicizzata da $i \in I$; [†21] mostrare che esistono bigezioni $f_i : A_i \to B_i$, dove gli insiemi B_i godono della proprietà $\forall i \in I, \forall j \in I, B_i \cap A_j = \emptyset$ e se $j \neq j$ anche $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '021']*

E3.b.40 `Prerequisiti:`ZF:5. [022]

Mostrate che $X \subseteq Y$ se e solo se $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1WW']*

E3.b.41 Usando la definizione di coppia (a, b) come $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ mostrate che, dati due insiemi x, y , per ogni $a \in x, b \in y$ si ha [024]

$$(a, b) \in \mathcal{P}\mathcal{P}(x \cup y) \ .$$

Usate questo fatto e l'assioma di separazione per giustificare assiomaticamente la definizione del **prodotto cartesiano** $x \times y$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '025']*

Nota 3.b.42. *Nell'esercizio 3.b.35 gli elementi sono identificati tramite le variabili $a_1, \dots a_k$ che avremmo potuto anche denominare con altre lettere come $a, b, c, d, \dots$. Se però pensiamo a $a_1, \dots a_k \dots$ come a valori di una funzione $a_i = a(i)$, $a : I \to X$ allora l'insieme $\{a_1, \dots a_k \dots\}$ esiste (per un qualsiasi insieme I di indici) perché è l'immagine della funzione $\{a_1, \dots a_k \dots\} = \{x \in X : \exists i \in I, x = a_i\}$.* [27F]

§3.b.c Lemma di Zorn, Assioma della Scelta, Teorema di Zermelo [23R]

Vi sono tre enunciati fondamentali nella teoria degli insiemi, il Lemma Zorn, l'Assioma della Scelta, e il Teorema di Zermelo. Si dimostra, all'interno dell'assiomatica di Zermelo–Fraenkel, che questi sono equivalenti. Si veda in Cap. 1 in [3] per una presentazione basata sui principi sopra definiti. [†22]

Il primo esercizio ci presenta alcune fondamentali maniere equivalenti di esprimere l'Assioma della Scelta.

[†21] *Cf.* 3.b.18

[†22] Questa teoria si trova in molti libri di Logica, come ad esempio [13, 14, 11], ma il linguaggio e i metodi lì usati potrebbero essere troppo avanzati rispetto al livello richiesto per questo testo.

Esercizi

E3.b.43 Prerequisiti:3.b.18, ZF:4,3.b.39 . Sia I un insieme non vuoto di indici, sia A_i una famiglia di insiemi non vuoti indicizzata da $i \in I$. Ricordiamo che, per definizione, il prodotto cartesiano $\prod_{i\in I} A_i$ è l'insieme delle funzioni $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ tali che $f(i) \in A_i$ per ogni $i \in I$. [02H]

Mostrate che le seguenti sono formulazioni equivalenti dell'**assioma della scelta**.

- Il prodotto cartesiano di una famiglia non vuota di insiemi non vuoti è non vuoto.
- Data una famiglia A_i come sopra, tale che gli insiemi sono non vuoti, e a due a due disgiunti, esiste un sottoinsieme B di $\bigcup_{i\in I} A_i$ tale che, per ogni $i \in I$, $B \cap A_i$ contenga un unico elemento.
- Sia S un insieme, allora esiste una funzione $g : \mathcal{P}(S) \to S$ tale che $g(A) \in A$ per ogni $A \in \mathcal{P}(S)$ non vuoto.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '02J']

Nota 3.b.44. *Attenzione! Supponiamo come sopra che gli insiemi A_i siano non vuoti. Questo si scrive formalmente come $\forall i \in I, \exists x \in A_i$. Intuitivamente questo ci porta a dire che l'elemento x dipende da i, e dunque che $x = x(i)$. Questo passo, per quanto intuitivo, è esattamente l'assioma della scelta.* [02K]

Esercizi

E3.b.45 Trovate I un insieme non vuoto di indici, e per ciascun $i \in I$ un insieme A_i non vuoto, per i quali non esiste un sottoinsieme B di $\bigcup_{i\in I} A_i$ tale che, per ogni $i \in I$, $B \cap A_i$ contenga un unico elemento. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2GG'] [2GF]

E3.b.46 Prerequisiti:3.e.20.Consideriamo la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel e questo enunciato: [2BZ]

Dati A, B insiemi non vuoti per cui esista $g : B \to A$ una funzione surgettiva, allora esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$ tale che $g \circ f = Id_A$.

Dimostrate che questo enunciato implica l'Assioma della Scelta. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2C0']

E3.b.47 Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia $B \subseteq V$. Una **combinazione lineare finita** v di elementi di B è equivalentemente definita come [02D]

- $v = \sum_{i=1}^{n} \ell_i b_i$ dove $n = n(v) \in \mathbb{N}$, $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, \dots, b_n$ sono elementi di B;
- $v = \sum_{b\in B} \lambda(b) b$ dove $\lambda : B \to \mathbb{R}$ ma inoltre $\lambda(b) \neq 0$ solo per un numero finito di $b \in B$.

Chiamiamo $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^B$ l'insieme delle funzioni λ (come sopra usate) che sono non nulle solo per un numero finito di argomenti; Λ è uno spazio vettoriale: per questo la seconda definizione è meno intuitiva ma è più facile da maneggiare.

Diremo che B **genera** V se ogni $v \in V$ si scrive come combinazione lineare finita di elementi di B.

Diremo che i vettori di B sono **linearmente indipendenti** se $0 = \sum_{b\in B} \lambda(b)b$ implica $\lambda \equiv 0$; o equivalentemente che, dati $n \geq 1$, $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, \ldots, b_n \in B$ tutti diversi, la relazione $\sum_{i=1}^{n} \ell_i b_i = 0$ implica $\forall i \leq n, \ell_i = 0$.

Diremo che B è una **base algebrica** (anche nota come **base di Hamel**) se valgono entrambe le proprietà.

Se B è una base allora la combinazione lineare che genera v è unica (cioè vi è un' unica funzione $\lambda \in \Lambda$ per cui $v = \sum_{b\in B} \lambda(b)b$).

Mostrate che ogni spazio vettoriale ha una *base algebrica*. Mostrate più in generale che per ogni $A, G \subseteq V$, con A famiglia di vettori linearmente indipendenti e G generatori, esiste una *base algebrica* B con $A \subseteq B \subseteq G$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '02G']

La dimostrazione in generale necessita del Lemma di Zorn; anzi, questo enunciato è equivalente all' Assioma della Scelta; questo è stato dimostrato da A. Blass in [7]; si veda anche Part 1 §6 [22].

E3.b.48 Difficoltà:*.[†23] Considerate lo spazio quoziente [02M]

$$\mathbb{X} = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}/\sim$$

dove $\{a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sono tutte le successioni a valori naturali, e dove definiamo $a \sim b$ sse $a_k = b_k$ definitivamente in k.

Definiamo l'ordinamento

$$a \preceq b \iff \exists n \text{ s.t. } \forall k \geq n, a_k \leq b_k$$

cioè $a \preceq b$ quando $a_k \leq b_k$ definitivamente. Questa è un preordine e

$$a \sim b \iff (a \preceq b \wedge b \preceq a)$$

e dunque passa al quoziente dove diviene un ordine, si veda Prop. 3.g.3.

Sia ora a^k una successione crescente di successioni, cioè $a^k \preceq a^{k+1}$; notiamo che essa è limitata superiormente da b definito come

$$b_n = \sup_{h,k \leq n} a_h^k \,.$$

Possiamo dunque applicare il Lemma di Zorn a $(\mathbb{X}, \preceq)$ per dire che esistono massimali.

Dati a, b definiamo

$$a \vee b = (a_n \vee b_n)_n$$

allora è facilmente verificato che $a \preceq a \vee b$. Questo ci dice che l'ordinamento è *diretto*, si veda 3.d.15.

Concludiamo dunque che $(\mathbb{X}, \preceq)$ ha un unico massimo, per 3.d.23.

Questo però è falso, perché se si prende una qualsiasi successione a, la successione $(a_n + 1)_n$ è più grande di a.

Qual è l'errore nel ragionamento precedente? Cosa si può dunque concludere riguardo a $(\mathbb{X}, \preceq)$?

Moltri altri esercizi necessitano del Lemma di Zorn, dell'Assioma della Scelta, o del Teorema di Zermelo; ne citiamo alcuni: 3.e.20, 3.j.5, 3.j.39, 3.j.40, 3.j.41, 3.j.44.

Nota 3.b.49. "L'assioma della scelta è ovviamente vero, il principio del buon ordinamento ovviamente falso, e che si può dire del lemma di Zorn?" – *Jerry Bona*[†24] [02C]

Questa è una barzelletta[†25]*: anche se i tre enunciati sono matematicamente equivalenti, molti matematici trovano che l'assioma della scelta sia intuitivo, il principio del buon ordinamento sia controintuitivo, e Il lemma di Zorn sia troppo complesso per qualsiasi intuizione.*

[†23]Originalmente pubblicato in `https://dida.sns.it/dida2/Members/mennucci/curiosa/`
[†24]Come citato in: [16].
[†25]Paragrafo citato da [50].

§3.c Relazioni [1YV]

Definizione 3.c.1. *Una **relazione** fra elementi di due insiemi A, B è definita come un sottoinseme $R \subseteq A \times B$ del prodotto cartesiano. In genere si usa la notazione infissa aRb invece di scrivere $(a, b) \in R$.* [1WY]

Definizione 3.c.2. *Una relazione R fra elementi di A è detta:* [23X]

- ***riflessiva*** *se xRx per ogni $x \in A$;*
- ***irriflessiva*** *o **anti-riflessiva** se $\neg xRx$ per ogni $x \in A$;*
- ***simmetrica*** *se xRy implica yRx per ogni $x, y \in A$;*
- ***antisimmetrica*** *se aRb e bRa implicano $a = b$, per ogni $a, b \in A$;*
- ***tricotomica*** *se per ogni $x, y \in A$ vale esattamente una fra xRy, yRx e $x = y$;*
- ***transitiva*** *se xRy e yRz implicano xRz, per ogni $x, y, z \in A$.*

Una relazione R fra elementi di A e elementi di B è detta:

- ***iniettiva*** *se xRy e zRy implicano $x = z$, per ogni $x, z \in A, y \in B$;*
- ***funzionale*** *se xRy e xRz implicano $y = z$, per ogni $x \in A, y, z \in B$; una tale relazione è anche detta una "funzione parziale" (si vedano anche §3.e,3.e.24);*
- ***totale*** *(a sinistra) se per ogni $x \in A$ esiste un $y \in B$ tale che xRy;*
- ***surgettiva*** *(cioè "totale a destra") se per ogni $y \in B$ esiste un $x \in A$ tale che xRy.*

Definizione 3.c.3. *Una **relazione di equivalenza** è una relazione fra elementi di A che gode delle proprietà: riflessiva, simmetrica, transitiva.* [1W5]

Le relazioni di equivalenza vengono in genere indicate con i simboli "$\sim$" , "$\approx$" , "$\simeq$" , "$\cong$" , "$\approxeq$" etc.

Definizione 3.c.4. *Una **relazione d'ordine** (o **ordinamento**) è una relazione fra elementi di A che gode delle proprietà: riflessiva, antisimmetrica, transitiva.* [1Y5]

*Una relazione d'ordine è **totale** se tutti gli elementi sono **comparabili**, cioè se per ogni $a, b \in A$ si ha $aRb \vee bRa$.*

*(Quando una relazione d'ordine non è totale, si dice che è **parziale**).*

In genere si usano simboli come "$\le$" o "$\subseteq$" o "$\preceq$" o simili.

Nota 3.c.5. *Abbiamo sopra ricalcato le definizioni in [3]; in altri testi una relazione fra elementi di A che gode delle proprietà: riflessiva, antisimmetrica, transitiva è direttamente chiamata **ordine parziale**. (*cf *Example 2.1.1 in [13] dove inoltre gli ordinamenti totali sono detti* linear order*).Per questa ragione aggiungeremo "(parziale)" quando vorremo indicare che l'ordinamento che stiamo discutendo potrebbe essere parziale.* [24W]

Per le relazioni d'ordine rimandiamo alla sezione §3.d

Nota 3.c.6. *È uso scrivere $a \ge b$ come sinonimo di $b \le a$. Se $a \le b \wedge a \ne b$ scriveremo $a < b$; similmente se $a \ge b \wedge a \ne b$ scriveremo $a > b$. Attenzione che se la relazione non è totale, non è detto che $\neg(a \le b)$ sia equivalente a $a > b$.* [1Y7]

Vedete a questo proposito l'esercizio 3.d.3.

Definizione 3.c.7. *Un ordinamento totale* [†26] *su un insieme X è detto un* buon ordinamento *se ogni sottoinsieme di X non-vuoto ha minimo.* [1X0]

Esercizi

E3.c.8 `Prerequisiti:3.c.2`. Per ogni insieme A e relazione R fra elementi di A, dire se è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e/o transitiva; se è una relazione d'ordine, dire se è totale. [1WH] *(Proposto il 2022-12)*

- In $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nRm sse il massimo comun divisore fra n e m è 1
- In $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nRm se e solo se n divide m
- In $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nRm se e solo se $2n$ divide m
- In $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, aRb se e solo se $a \subseteq b$.

E3.c.9 Sia $f : A \to B$ una funzione, sia $\sim$ una relazione di equivalenza su B: dimostrate che la relazione R fra elementi di A data da [1WK]

$$xRy \iff f(x) \sim f(y)$$

è una relazione di equivalenza.

E3.c.10 `Prerequisiti:3.c.2,3.c.4`. [224]

Date due relazioni $a \leq b$ e $a < b$ per $a, b \in A$, mostrate che sono equivalenti:

- $a \leq b$ è una relazione d'ordine (possibilmente parziale) e identifichiamo
$$a < b = (a \leq b \wedge a \neq b) \quad ;$$
- $a < b$ è una relazione irriflessiva e transitiva e $\forall x, y \in A$ al più una condizione fra $x < y$, $x = y$, $y < x$ è vera; e identifichiamo
$$a \leq b = (a < b \vee a = b) \quad .$$

Questa relazione $a < b$ è chiamata **ordinamento (parziale) stretto**.

E3.c.11 `Prerequisiti:3.c.2,3.c.4,3.c.10`. Date due relazioni $a \leq b$ e $a < b$ per $a, b \in A$, mostrate che sono equivalenti: [24K]

- $a \leq b$ è una relazione d'ordine totale e
$$a < b = (a \leq b \wedge a \neq b) \quad ,$$
- $a < b$ è una relazione irriflessiva, tricotomica e transitiva e
$$a \leq b = (a < b \vee a = b) \quad .$$

Questa relazione $a < b$ è chiamata **ordinamento totale stretto**.

E3.c.12 Consideriamo $A = \mathbb{R}^2$ e consideriamo la relazione [1YH]

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x' \in \mathbb{Z} \wedge y - y' \in \mathbb{Z})$$

fra elementi di $\mathbb{R}^2$:

- mostrate che è una relazione di equivalenza;
- rappresentate graficamente le classi di equivalenza;
- descrivete l'insieme $A/\sim$.

[†26] In realtà la condizione di *buon ordinamento* per un ordinamento implica che è totale; lo lasciamo come esercizio 3.d.7.

§3.d Ordinamenti [1YY]

Sia $(X, \leq)$ un insieme non vuoto e ordinato (*cf* definizione 3.c.4)

Definizione 3.d.1. *Dati $x, y \in X$ ricordiamo che $x < y$ significa $x \leq y \land x \neq y$.* [229]

- *Quando si ha che $x \leq y$ oppure $y \leq x$ diremo che i due elementi sono* "comparabili". *Viceversa se non si ha ne $x \leq y$ ne $y \leq x$ diremo che i due elementi sono* "incomparabili".
- *Un elemento $m \in X$ si dice* massimale *se non esiste alcun elemento $z \in X$ tale che $m < z$.*
- *Un elemento $m \in X$ si dice* minimale *se non esiste alcun elemento $z \in X$ tale che $z < m$.*
- *Un elemento $m \in X$ si dice* massimo *se, per ogni elemento $z \in X$, si ha $z \leq m$.*
- *Un elemento $m \in X$ si dice* minimo *se, per ogni elemento $z \in X$, si ha $m \leq z$.*

Invertendo la relazione d'ordine, le definizioni di minimo/minimale *divengono le definizioni di* massimo/massimale *(e viceversa).*

Esercizi

E3.d.2 Dato un insieme ordinato, mostrate che il massimo, se esiste, è unico. [1WJ]

E3.d.3 Mostrate che per ogni due $x, y \in X$ si ha uno di questi casi mutualmente esclusivi [067] *(Svolto il 2022-10-13)*

- $x = y$,
- $x < y$,
- $x > y$,
- x, y sono incomparabili.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '068']*

E3.d.4 Mostrate che se $x < y \land y \leq z$ oppure $x \leq y \land y < z$ allora $x < z$. [29D]

E3.d.5 Mostrate che $m \in X$ è *massimale* se e solo se *"per ogni $z \in X$ si ha che $z \leq m$ oppure z, m sono incomparabili"*. [069]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '06B']*

E3.d.6 Sia $f : A \to B$ una funzione, sia $\preceq$ una relazione d'ordine su B; consideriamo la relazione R fra elementi di A data da [1WM]

$$xRy \iff f(x) \preceq f(y) \quad ;$$

è una relazione d'ordine? E se assumiamo inoltre che f sia iniettiva?

E3.d.7 Mostrare che se ogni sottoinsieme non-vuoto ammette minimo, allora l'ordinamento è totale. [1WN]

E3.d.8 Consideriamo $A = \mathbb{R}^2$ e consideriamo la relazione [1YJ]

$$(x, y) \preceq (x', y') \iff (x \le x' \land y \le y')$$

- mostrate che è una relazione di ordine; è parziale o totale?
- Preso $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$, consideriamolo come insieme ordinato con l'ordinamento $\preceq$: vi sono massimi? minimi? massimali? minimali?

E3.d.9 Sia $(X, \le)$ un insieme non vuoto finito e ordinato allora ammette massimali e minimali. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '06D']* [06C] *(Proposto il 2022-12)*

E3.d.10 Si costruisca un ordinamento $\preceq$ su $\mathbb{N}$ con questa proprietà: per ogni $n \in \mathbb{N}$ [06F]

- l'insieme $\{k \in \mathbb{N}, k \ne n, k \preceq n\}$ degli elementi che precedono n ha esattamente due massimali,
- l'insieme $\{k \in \mathbb{N}, k \ne n, n \preceq k\}$ degli elementi che seguono n ha esattamente due minimali.

E3.d.11 Sia X insieme non vuoto e $R \subseteq X^2$ una relazione d'ordine, allora esiste una relazione di ordine totale T che estende R (cioè $R \subseteq T$, considerando le relazioni come sottoinsiemi di X^2). [06J] *(Proposto il 2022-12)*

E3.d.12 Prerequisiti:4.b.1,3.b.43. Sia X ordinato (parzialmente). Mostrate che sono equivalenti [263] *(Svolto il 2022-10-13)*

1. in ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ non-vuoto esiste almeno un elemento minimale;
2. non esistono funzioni $f : \mathbb{N} \to X$ strettamente decrescenti.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '07Y']*

Si veda anche la Proposizione 3.g.3.

§3.d.a Ordinamento diretto e filtrante [2FJ]

Definizione 3.d.13. *Sia $(X, \le)$ un insieme (parzialmente) ordinato, diremo che è **filtrante** [†27] se* [06M] *(Svolto il 2022-11-24)*

$$\forall x, y \in X\ \exists z \in X,\ x < z \land y < z \quad . \tag{3.d.14}$$

Gli insiemi $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ con i loro usuali ordinamenti sono filtranti.

Definizione 3.d.15. *Un **insieme diretto** è un insieme (parzialmente) ordinato $(X, \le)$ per cui* [06N]

$$\forall x, y \in X\ \exists z \in X,\ x \le z \land y \le z \quad . \tag{3.d.16}$$

Ovviamente un ordinamento filtrante è anche diretto.

Nota 3.d.17. *Abbiamo aggiunto la proprietà antisimmetrica alla usuale definizione di "Insieme Diretto", si veda [15] (o altre referenze in [34]).* [0NB]

Questa scelta semplifica il trattamento (in particolare, ci permette di usare concetti già visti per insiemi ordinati, quali massimo *o* massimale*) e allo stesso tempo, per quanto spiegato in 7.d.3, non cambia l'utilità della teoria sviluppata in questa sezione e in Sezione §7.d.*

[†27] Come definito in Definizione 4.2.1 degli appunti [3].

Definizione 3.d.18. *Dato un insieme diretto $(X, \le_X)$ un suo sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice* ***cofinale*** *se* [06P]

$$\forall x \in X\ \exists y \in Y,\ y \ge_X x \tag{3.d.19}$$

Più in generale, un altro insieme diretto $(Z, \le_Z)$ si dice ***cofinale*** *in X se esiste una mappa $i : Z \to X$ monotona debolmente crescente tale che $i(Z)$ è cofinale in X, cioè*

$$(\forall z_1, z_2 \in Z, z_1 \le_Z z_2 \Rightarrow i(z_1) \le_X i(z_2))\ \wedge\ (\forall x \in X\ \exists z \in Z,\ i(z) \ge_X x) \tag{3.d.20}$$

(Questo secondo caso generalizza il precedente, decidendo che $i : Y \to X$ è l'identità e $\le_Y$ è la restrizione di $\le_X$ a Y.)

Definizione 3.d.21. *Se X è filtrante,* "un intorno di ∞ in X" *è un sottoinsieme $U \subseteq X$ tale che* [231]

$$\exists k \in X \forall j \in X, j \ge k \Rightarrow j \in U\,.$$

Esercizi

E3.d.22 Sia $(X, \le)$ un insieme ordinato filtrante, si mostri che è un insieme infinito. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '06R']* [06Q] *(Proposto il 2022-11)*

E3.d.23 Sia $(X, \le)$ un insieme diretto: si mostri che se esiste un elemento massimale in X allora è il massimo. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '06T']* [06S] *(Svolto il 2022-10-27)*

E3.d.24 `Prerequisiti:3.d.13,3.d.23.` Sia $(X, \le)$ un insieme diretto. Si mostri che sono equivalenti queste proprietà: [06V] *(Svolto il 2022-11-24)*

- $(X, \le)$ soddisfa la *proprietà filtrante* (3.d.14),
- $(X, \le)$ non ha massimo,
- $(X, \le)$ non ha massimali.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '06W']*

E3.d.25 `Prerequisiti:3.d.18.` Sia $(X, \le)$ un insieme diretto, sia $Y \subseteq X$ cofinale: si mostri che $(Y, \le_{|Y})$ è un insieme diretto. [06X]

Similmente se $(X, \le)$ è filtrante, si mostri che $(Y, \le_{|Y})$ è filtrante.

E3.d.26 `Prerequisiti:3.d.21.` Dati $U_1, U_2 \subseteq J$ due intorni di ∞ si mostri che l'intersezione $U_1 \cap U_2$ è un intorno di ∞. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '236']* . [232]

E3.d.27 `Prerequisiti:3.d.18,3.d.21.` Se $(X, \le)$ un insieme filtrante, $Y \subseteq X$ è cofinale, e $U \subseteq X$ è un intorno di ∞ in X, si mostri che $U \cap Y$ è un intorno di ∞ in Y. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '235']* [234]

Un insieme diretto $(X, \le)$ è un ambiente a cui si può facilmente generalizzare la nozione già vista 4.g.1.

Definizione 3.d.28. *Sia* P(x) *una proposizione logica che dipende da una variabile libera $x \in X$. Diremo che* [06Y] *(Svolto il 2022-10-27)*

P(x) *vale definitivamente per $x \in X$ se*	$\exists y \in X, \forall x \in X, x \ge y$ *vale* P(x) ;
P(x) *vale frequentemente per $x \in X$ se*	$\forall y \in X, \exists x \in X, x \ge y$ *per cui* P(x) .

Esercizi

E3.d.29 La proprietà 4.g.5 si riformula in questo modo. [070] *(Proposto il 2022-10-27)*

Mostrate che «*P(x)* vale frequentemente in $x \in X$» se e solo se l'insieme

$$Y = \{x \in X : P(x)\}$$

è cofinale in X.

E3.d.30 Prerequisiti:3.d.28,3.d.26.Mostrate che «*P(x)* vale definitivamente in $x \in X$» se e solo se l'insieme [233]

$$U = \{x \in X : P(x)\}$$

è un intorno di ∞ in X.

E3.d.31 Si verifichi per esercizio che le proprietà 4.g.3, 4.g.4, 4.g.6 e 4.g.7 viste in Sez. §4.g valgono anche in questo caso 3.d.28 più generale. [06Z]

E3.d.32 Supponiamo che l'insieme X abbia associato una relazione R che sia riflessiva e transitiva e per cui [2B2]

$$\forall x, y \in X\ \exists z \in X,\ xRz, yRz \quad . \tag{3.d.33}$$

(come visto in (3.d.16))

Questa coppia (X, R) è un "Insieme Diretto" secondo la definizione usuale (cfr. [15] o altre referenze in [34]).

Mostrate che esiste un'altra relazione $\preceq$ tale che

- $\preceq$ è un ordine parziale che soddisfa (3.d.16);
- R estende $\preceq$ cioè
$$\forall x, y \in X\ x \preceq y \Rightarrow\ xRy \quad ;$$
- inoltre $(X, \preceq)$ è cofinale in (X, R).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '2GM']*

Altri esercizi sull'argomento sono 6.a.2,8.15, e in Sezione §7.d.

§3.d.b Ordinamento lessicografico [2FH]

Definizione 3.d.34. *Dati due insiemi ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, posto $Z = X \times Y$, definiamo **l'ordinamento lessicografico** $\leq_Z$ su Z come segue; siano $z_1 = (x_1, y_1) \in Z$ e $z_2 = (x_2, y_2) \in Z$, allora:* [071]

- *nel caso $x_1 \neq x_2$, allora $z_1 \leq_Z z_2$ se e solo se $x_1 \leq_X x_2$;*
- *nel caso $x_1 = x_2$, allora $z_1 \leq_Z z_2$ se e solo se $y_1 \leq_Y y_2$.*

Questo si estende al prodotto di più insiemi: dati due vettori, si considerano i primi elementi, se sono diversi si usa il primo ordinamento, se sono uguali si passa ai secondi elementi, ecc.

Esercizi

E3.d.35 Si verifichi che $\leq_Z$ è un ordinamento. [1WP]

E3.d.36 Se $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ sono ordinamenti totali, si mostri che $(Z, \leq_Z)$ è un ordinamento totale. [072]

E3.d.37 Se $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ sono buoni ordinamenti, si mostri che $(Z, \leq_Z)$ è un buon ordinamento. [073]

E3.d.38 Sia $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ordinato con l'ordinamento lessicografico. Si costruisca una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '075']* [074]

E3.d.39 Consideriamo $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ ordinato con l'ordinamento lessicografico. Si mostri che non esiste una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '077']* [076]

§3.d.c Ordinamento totale, sup e inf [2FM]

Sia $\leq$ un ordinamento totale su X insieme non vuoto.

Definizione 3.d.40. *Sia $A \subseteq X$. I **maggioranti** di A sono* [22R]

$$M_A \stackrel{def}{=} \{x \in X : \forall a \in A, a \leq x\} \quad .$$

*Un insieme A è **superiormente limitato** quando esiste un $x \in X$ tale che $\forall a \in A, a \leq x$, cioè esattamente quando $M_A \neq \emptyset$.*

*Se M_A ha minimo s, s è l'**estremo superiore** di A, e scriveremo $s = \sup A$.*

*Invertendo la relazione d'ordine, otteniamo le definizione **maggioranti**, **inferiormente limitato**, **estremo inferiore**.*

Lemma 3.d.41. *Sia $A \subseteq X$ non vuoto. Ricordiamo queste proprietà dell'estremo superiore.* [22S]

1. *Se A ha massimo m allora $m = \sup A$.*
2. *Sia $s \in X$. Si ha $s = \sup A$ se e solo se*
   - *per ogni $x \in A$ si ha $x \leq s$.*
   - *per ogni $x \in X$ con $x < s$ esiste $y \in A$ con $x < y$.*

Quest'ultima proprietà è di larghissimo uso nell'analisi!

La dimostrazione è lasciata come (utile) esercizio. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22T']

Esercizi

E3.d.42 Sia B un insieme non vuoto che è limitato dal basso, sia L l'insieme dei minoranti di B; notiamo che L è superiormente limitato, e supponiamo che esista $\alpha = \sup L$: allora $\alpha \in L$ e $\alpha = \inf B$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '079']* [078] *(Proposto il 2022-10-13)*

E3.d.43 Prerequisiti:3.d.42. Mostrate che se per l'ordinamento totale di X esistono i"sup" allora esistono anche gli "inf"; e viceversa. Precisamente, mostrate che sono equivalenti: [07B] (Proposto il 2022-10-13)

- Ogni insieme non vuoto inferiormente limitato in X ammette estremo inferiore;
- ogni insieme non vuoto superiormente limitato in X ammette estremo superiore.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '207']*

§3.d.d Ordinamento totale, intervalli [2DW]

Sia $\le$ un ordinamento totale su X insieme non vuoto.

Definizione 3.d.44. *Un insieme $I \subseteq X$ è un **intervallo** se per ogni $x, z \in I$ e ogni $y \in X$ con $x < y < z$ si ha $y \in I$.* [07C]

Notate che l'insieme vuoto è un intervallo.

Definizione 3.d.45. *Dati $x, z \in X$ si definiscono i seguenti intervalli standard* [07D]

$$\begin{aligned}
(x,z) &= \{y \in X : x < y < z\}\\
(x,z] &= \{y \in X : x < y \le z\}\\
(x,\infty) &= \{y \in X : x < y\}\\
[x,z) &= \{y \in X : x \le y < z\}\\
[x,z] &= \{y \in X : x \le y \le z\}\\
[x,\infty) &= \{y \in X : x \le y\}\\
(-\infty,z) &= \{y \in X : y < z\}\\
(-\infty,z] &= \{y \in X : y \le z\}\\
(-\infty,\infty) &= X\ .
\end{aligned}$$

Notate che vi sono 9 casi, combinazioni di tre per l'estremo destro e tre per l'estremo sinistro. Intendiamo che $\infty, -\infty$ sono simboli e non elementi di X; per questo motivo se X ha massimo m, allora gli intervalli si scrivono preferibilmente come $(x,\infty) = (x,m]$ e $[x,\infty) = [x,m]$; similmente se ha un minimo. [24Y]

Esercizi

E3.d.46 Prerequisiti:3.d.44,3.d.45,3.b.23. [07F]

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di intervalli.

Mostrate che la intersezione $\bigcap\mathcal{F}$ di tutti gli intervalli è un intervallo.

Supponiamo che l'intersezione $\bigcap\mathcal{F}$ sia non vuota, mostrate che la unione $\bigcup\mathcal{F}$ è un intervallo.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '07G']*

E3.d.47 Prerequisiti:3.d.44,3.d.45. [07H] (Svolto il 2022-10-13)

Si trovi un esempio di insieme X con ordinamento totale, in cui vi è un intervallo I che non ricade in nessuna delle categorie viste in 3.d.45.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '07J']*

E3.d.48 Prerequisiti:3.d.44,3.d.45,3.d.46. [07K] *(Proposto il 2022-10-13)*

Sia $A \subseteq X$ un insieme non vuoto; sia I il più piccolo intervallo che contiene A; questo è definito come l'intersezione di tutti gli intervalli che contengono A (e l'intersezione è un intervallo, per 3.d.46). Sia M_A la famiglia dei maggioranti di A, M_I di I; si mostri che $M_A = M_I$. In particolare A è superiormente limitato se e solo I è superiormente limitato; se inoltre A ha estremo superiore, si avrà $\sup A = \sup I$. (Similmente per minoranti e estremi inferiori). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '07M']*

E3.d.49 Prerequisiti:3.d.44,3.d.45,3.d.46,3.d.48. [07N]

Sia X un insieme totalmente ordinato. Mostrate che le due seguenti sono equivalenti.

- Ogni $A \subseteq X$ non vuoto limitato dall'alto e dal basso ammette estremo superiore e inferiore.
- Ogni intervallo $I \subseteq X$ non vuoto ricade in una delle categorie viste in 3.d.45.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '07P']*

E3.d.50 Prerequisiti:3.d.44,3.d.45,3.d.46.Difficoltà:*. [206]

All'inizio della sezione abbiamo assunto che l'ordinamento $\leq$ su X sia totale. Le definizioni di *intervallo* in 3.d.44 e in 3.d.45 si possono però dare anche per un ordinamento che non sia (necessariamente) totale. Cosa succede nell'esercizio 3.d.46 quando l'ordinamento non è totale? Quale risultato è vero, quale è falso, e nel caso che controesempio possiamo dare?

§3.d.e Tipi di ordine

Definizione 3.d.51. *Dati due insiemi non vuoti ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, diremo che* "hanno lo stesso tipo d'ordine"*, o più brevemente che sono* "equiordinati"[†28]*, se esiste una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $f : X \to Y$, la cui inversa f^{-1} è strettamente crescente. La funzione f è detta* "isomorfismo d'ordine"*, o* "isotonia"*.* [07V]

Nota 3.d.52. *Notate che se $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ sono* equiordinati *allora X e Y sono* equipotenti*; però dato un insieme infinito X, esistono su di esso ordinamenti di diverso tipo — anche se consideriamo solo i buoni ordinamenti. (Si veda ad esempio l'esercizio 3.i.20)* [21R]

Nota 3.d.53. *Notate che, se due insiemi sono equiordinati, allora godono delle stesse proprietà: se uno è totalmente ordinato, lo è anche l'altro; se uno è bene ordinato, lo è anche l'altro; etc etc.... Si veda 3.d.55.* [21V]

Esercizi

E3.d.54 Mostrate che la relazione *"avere lo stesso tipo d'ordine"* è una relazione d'equivalenza. Dato un insieme X, consideriamo tutti i possibili ordinamenti su X, la relazione definisce dunque classi di equivalenza, e ogni classe è (per l'appunto) un *"tipo d'ordine"* su X. [220]

E3.d.55 Dati due insiemi non vuoti ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, sia $f : X \to Y$ come da definizione 3.d.51. [22P] *(Proposto il 2023-01-17)*

[†28] La dicitura "equiordinati" non è standard.

- Se $A \subseteq X$ e $m = \max A$ allora $f(m) = \max f(A)$; similmente per i minimi;
- $(X, \leq_X)$ è totalmente ordinato se e solo se $(Y, \leq_Y)$ lo è;
- $(X, \leq_X)$ è bene ordinato se e solo se $(Y, \leq_Y)$ lo è.
- Supponiamo che $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ siano bene ordinati; siano S_X e rispettivamente S_Y le funzioni "successore" 3.i.7, allora si ha che x non è il massimo di X se e solo se $f(x)$ non è il massimo di Y, e in questo caso $y = S_X(x)$ se e solo se $f(y) = S_Y(f(x))$.

E3.d.56 Dati due insiemi non vuoti totalmente ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, supponiamo che esista una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $f : X \to Y$: si mostri che allora la sua inversa f^{-1} è strettamente crescente, e conseguentemente $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ sono *equiordinati*. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '21T']* [21P]

E3.d.57 Trovate un semplice esempio di due insiemi non vuoti (parzialmente) ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, per cui esiste una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $f : X \to Y$, la cui inversa f^{-1} non è strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '21S']* [21Q]

§3.d.f Concatenazione

Definizione 3.d.58. *Dati due insiemi ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, con X, Y disgiunti,* ***la concatenazione di** X **con** Y si ottiene definendo $Z = X \cup Y$ e dotandolo dell'ordinamento $\leq_Z$ dato da:* [21W]

- *se $z_1, z_2 \in X$ allora $z_1 \leq_Z z_2$ se e solo se $z_1 \leq_X z_2$;*
- *se $z_1, z_2 \in Y$ allora $z_1 \leq_Z z_2$ se e solo se $z_1 \leq_Y z_2$;*
- *se $z_1 \in X$ e $z_2 \in Y$ allora si ha sempre $z_1 \leq_Z z_2$.*

Questa operazione è alle volte indicata con la notazione $Z = X + Y$.

Se gli insiemi non sono disgiunti, possiamo sostituirli con insiemi disgiunti definiti da $\tilde{X} = \{0\} \times X$ e $\tilde{Y} = \{1\} \times Y$, poi potremo "ricopiare" i rispettivi ordinamenti, e infine potremo eseguire la concatenazione di $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$.

Esercizi

E3.d.59 Sia $k \in \mathbb{N}$ e sia $I = \{0, \dots, k\}$ con l'usuale ordinamento di $\mathbb{N}$: si mostri che la concatenazione di I con $\mathbb{N}$ ha lo stesso tipo d'ordine di $\mathbb{N}$; mentre invece la concatenazione di $\mathbb{N}$ con I non ha lo stesso tipo d'ordine. [21X]

E3.d.60 `Prerequisiti:3.d.34,3.d.51.` Siano $(X_1, \leq_1)$, $(X_2, \leq_2)$ due insiemi disgiunti e ordinati (parzialmente) e con lo stesso tipo d'ordine. Sia $I = \{1, 2\}$ con l'usuale ordinamento; sia $Z = I \times X_1$ dotato dell'ordinamento lessicografico; sia W la concatenazione di di X_1 con X_2: mostrate che Z e W hanno lo stesso tipo d'ordine. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '221']* [21Y]

E3.d.61 Siano X_1, X_2 due insiemi disgiunti e bene ordinati. Sia W la concatenazione di di X_1 con X_2: mostrate che è bene ordinato. [21Z]

§3.e Funzioni [1YR]

La definizione di *funzione* si può riportare alla teoria degli insiemi in questo modo.

Definizione 3.e.1. *Dati due insiemi A, B, una funzione $f : A \to B$ è una terna* [1Y6]

$$A, B, F$$

(dove A viene detto dominio *e B* codominio*) e F è una relazione $F \subseteq A \times B$ tale che*

$$\forall x \in A \exists! y \in B, xFy \quad ;$$

cioè gode delle proprietà di essere funzionale *e* totale *(definite in 3.c.2).*

Essendo l'elemento y unico, possiamo usare la scrittura $y = f(x)$ per dire appunto che y è l'unico elemento in relazione xFy con x.

L'insieme F viene anche detto grafico *della funzione.*

Definizione 3.e.2. *Dati insiemi non vuoti I, A, una* ***successione con indici in** I **e a valori in*** A *è una funzione $a : I \to A$; si usa la notazione $(a_n)_{n \in I}$. Per indicare il codominio, si usa anche la notazione $(a_n)_{n \in I} \subseteq A$. In questo testo si avrà spesso $I = \mathbb{N}$, e in questo caso scriveremo semplicemente (a_n).* [16G]

Nella pratica, la definizione di funzione si scrive sempre come $f : A \to B$; per questo il grafico viene definito come

$$F = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \quad .$$

Nota 3.e.3. *Sia A insieme non vuoto, siano $f : A \to \{0, 1\}$ e $g : A \to \{1\}$ entrambe date da $f(x) = g(x) = 1$ per ogni $x \in A$.* [08X]

Siano F, G rispettivamente i grafici: notate che $F = G$ (!) Diremo che $f = g$ oppure no? Si sceglie il no, altrimenti il concetto di "surgettivo" non avrebbe senso.

Per questo nella definizione abbiamo deciso che la funzione è la terna "dominio", "codominio", "relazione".

Esercizi

E3.e.4 Mostrate che la composizione di due funzioni iniettive è una funzione iniettiva. [1WQ]

E3.e.5 Mostrate che la composizione di due funzioni surgettive è una funzione surgettiva. [1WR]

E3.e.6 Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una assegnata funzione e I la sua immagine, dimostrate che esiste $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $f|_A$ è iniettiva e $f(A) = I$. *(Sugg. può essere utile sapere che l'usuale ordinamento di $\mathbb{N}$ è un buon ordinamento* cf *3.i.1 e 4.d.4).* [1WS]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1WT']*

Nota: il risultato è vero per qualunque funzione $f : A \to B$, ma la dimostrazione richiede l'assioma della scelta.

E3.e.7 Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : I \to J$ data da $f(x) = \sin(x)$. Scegliendo $I = \mathbb{R}$ o $I = [0, \pi/2]$ oppure $I = [-\pi/2, \pi/2]$, e scegliendo $J = \mathbb{R}$ o $J = [-1, 1]$, dite per quali scelte f è surgettiva, e per quali è iniettiva. [08Y] *(Proposto il 2022-12)*

(Questo esercizio serve a farvi riflettere sulla differenza fra "formula" e "funzione".)

E3.e.8 Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to B$ definita dalla formula $f(x) = x^2$; dite se, per le seguenti scelte di A, B, la funzione f è iniettiva e/o surgettiva. [1X3]

1. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$
2. $A = \mathbb{R}, B = [0, \infty)$
3. $A = [0, \infty), B = \mathbb{R}$
4. $A = [0, \infty), B = [0, \infty)$

Se la funzione è bigettiva, come si chiama comunemente la sua inversa?

(Questo esercizio serve a farvi riflettere sulla differenza fra “formula” e “funzione”.)

E3.e.9 Date $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definite da $f(n) = n^2 - 1$ e $g(n) = (n + 1)^2$, scrivete esplicitamente $f \circ g$ e $g \circ f$, dite se coincidono o sono funzioni diverse. [1X4]

E3.e.10 Trovate un esempio di $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ per cui si ha $f \circ g \equiv g \circ f$, ma né f né g sono bigettive. [1X5]

E3.e.11 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bigettiva, sia $F \subseteq \mathbb{R}^2$ il suo grafico; sia f^{-1} l'inversa di f e sia G il suo grafico; mostrate che G è il simmetrico di F rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. [1X6]

E3.e.12 Siano D, C insiemi non vuoti e $f : D \to C$ una funzione. Siano I una famiglia nonvuota di indici, $B_i \subseteq C$ per $i \in I$. Dato $B \subseteq C$ ricordiamo che la **controimmagine** di B è [091]

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D, f(x) \in B\} \ ,$$

Dato $B \subseteq C$ sia $B^c = \{x \in C, x \notin B\}$ il complementare. Mostrate queste proprietà della controimmagine.

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \tag{3.e.13}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \tag{3.e.14}$$

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c \ . \tag{3.e.15}$$

E3.e.16 Siano D, C insiemi non vuoti e $f : D \to C$ una funzione. Siano I una famiglia nonvuota di indici, $A_i \subseteq D$, per $i \in I$. Dato $A \subseteq D$ ricordiamo che la **immagine** di A è il sottoinsieme $f(A)$ di D dato da [092]

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x), x \in A\} \ .$$

Mostrate queste proprietà della immagine.

$$\begin{aligned} f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcup_{i\in I} f(A_i) \\ f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) &\subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i) \ . \end{aligned}$$

Mostrate che la funzione è iniettiva se e solo se

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \tag{3.e.17}$$

è un' uguaglianza per ogni scelta di $A_1, A_2 \subseteq D$.

E3.e.18 Siano D, C insiemi non vuoti e $f : D \to C$ una funzione. Dato $U \subseteq C$ mostrate che [250]

$$f(f^{-1}(U)) \subseteq U ;$$

se f è surgettiva mostrate che si ha uguaglianza; trovate un esempio dove non si ha uguaglianza.

E3.e.19 Siano D, C insiemi non vuoti e $f : D \to C$ una funzione. Dato $A \subseteq D$ mostrate che [251]

$$f^{-1}(f(A)) \supseteq A ;$$

se f è iniettiva mostrate che si ha uguaglianza; trovate un esempio dove non si ha uguaglianza.

E3.e.20 Siano A, B insiemi non vuoti. [2BX]

- Supponiamo che $f : A \to B$ sia una funzione iniettiva, allora esiste una funzione surgettiva $g : B \to A$ tale che $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ (la funzione identità). (Una tale g è chiamata *inversa sinistra* di f).
- Supponiamo che $g : B \to A$ sia una funzione surgettiva, allora esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$ tale che $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. (Una tale f è chiamata *inversa destra* di g).

La dimostrazione della seconda asserzione richiede l'Assioma della Scelta (si veda 3.b.46).

Viceversa.

- Se $f : A \to B$ ha una *inversa sinistra*, allora è iniettiva.
- Se $g : B \to A$ ha una *inversa destra* allora è surgettiva.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2BY']

E3.e.21 Sia A un insieme e sia $g : A \to A$ iniettiva. Definiamo la relazione $x \sim y$ che è vera quando si ha un $n \geq 0$ per cui $x = g^n(y)$ oppure $x = g^n(y)$; dove [093]

$$g^n = \overbrace{g \circ \cdots \circ g}^{n}$$

è la n-esima iterata della composizione. (Decidiamo che g^0 è la identità). Mostrate che $x \sim y$ è una relazione di equivalenza. Studiate le classi di equivalenza. Sia $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} g^n(A)$ l'intersezione delle immagine ripetute. Mostrate che ogni classe è interamente contenuta in U o ne è esterna.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '094']

E3.e.22 Mostrate che esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(f(x)) = -x$. Esiste una funzione continua per cui $f(f(x)) = -x$? (Sugg. mostrate che per ogni tale f si ha $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '096'] [095]

E3.e.23 Mostrate che esiste una funzione $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tale che $f(f(x)) = \sin(x)$. Esiste una funzione continua? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '098'] [097]

E3.e.24 Siano D, C insiemi non vuoti. Una **funzione parziale** da D in C è una funzione $\varphi : B \to C$ dove $B \subseteq D$. (La definizione di "*funzione*" è in 3.e.1). [01P] *(Svolto il 2022-11-15)*

Può far comodo pensare alla funzione parziale come a una relazione $\Phi \subseteq D \times C$ tale che, se $(x, a), (x, b) \in \Phi$ allora $a = b$ (si veda 3.c.2). Le due nozioni sono equivalenti in questo senso: data Φ costruiamo il dominio di φ, che chiameremo B, con la proiezione di Φ sul primo fattore cioè $B = \{x \in D : \exists c \in C, (x, c) \in \Phi\}$, e definiamo $\varphi(x) = c$ come l'unico elemento $c \in C$ tale che $(x, c) \in \Phi$; viceversa Φ è il grafico di φ.

Le funzioni parziali, viste come relazioni Φ, sono naturalmente ordinate per inclusione; equivalentemente $\varphi \le \psi$ se $\varphi : B \to C$ e $\psi : E \to C$ e $B \subseteq E \subseteq D$ e $\varphi = \psi_{|B}$.

Sia ora U una **catena**, cioè una famiglia di funzioni parziali che è totalmente ordinata secondo l'ordinamento precedentemente dato; vedendo ogni funzione parziale come relazione, sia Ψ l'unione di tutte le relazioni in U; mostrate che Ψ è il grafico di una funzione parziale $\psi : E \to C$, il cui dominio E è l'unione di tutti i domini delle funzioni in U, e la cui immagine I è l'unione di tutte le immagini delle funzioni in U

Se inoltre tutte le funzioni in U sono iniettive, mostrate che ψ è iniettiva.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '01Q']*

§3.f Funzioni elementari

Esercizi

E3.f.1 Siano n, m, k interi positivi. Si dimostri che il numero $(n + \sqrt{m})^k + (n - \sqrt{m})^k$ è intero. [09G]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '09H']*

E3.f.2 Sia K un intero positivo, N un intero, sia $I = \{N, N+1, \dots, N+K\}$ la successione degli interi da N a $N + K$. Per ogni $n \in I$ fissiamo un valori intero a_n. Sia p l'unico polinomio di grado K tale che $p(n) = a_n$ per ogni $n \in I$. [09J]

- Si mostri che p ha coefficienti razionali.
- Si mostri che $p(x)$ è intero per ogni x intero.
- Si trovi un esempio di polinomio p che assume valori interi per x intero, ma che non ha tutti coefficienti interi.
- Cosa succede se I contiene $K + 1$ interi ma non consecutivi? È ancora vero che, definito $p(x)$ come sopra, p assume solo valori interi sugli interi?

E3.f.3 Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n, si mostri che esiste $c > 0$ tale che per ogni x si abbia $|p(x)| \le c(1 + |x|^n)$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '09M']* [09K]

E3.f.4 Si dimostri che, per $n \ge 2$, [211] *(Proposto il 2022-12)*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \ge \log(n)$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '212']*

§3.g Passaggio al quoziente [1Z5]

Definizione 3.g.1. *Sia A un insieme e $\sim$ una relazione di equivalenza. Si indica con* [23M]

$$^{A}\!/_{\sim}$$

lo spazio quoziente, cioè l'insieme di tutte le classi di equivalenza; la ***proiezione canonica*** *è la mappa $\pi : A \to {}^{A}\!/_{\sim}$ che associa ad ogni $x \in A$ la classe $[x] \in A/\sim$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & B \\ {}^{A}\!/_{\sim} \arrow[ur, "\tilde f"'] & \end{tikzcd}$$

[UNACCESSIBLE UUID '20Q']

Proposizione 3.g.2. [1Z6]

- *Supponiamo che la funzione $f : A \times A \to B$ sia invariante per la relazione d'equivalenza $\sim$ in tutte le sue variabili, cioè*

  $$\forall x, y, v, w \in A, \quad x \sim y \wedge v \sim w \Rightarrow f(x, v) = f(y, w) \quad ;$$

  sia $\tilde f$ la proiezione al quoziente $\widetilde{f} : {}^{A}\!/_{\sim} \times {}^{A}\!/_{\sim} \to B$ che soddisfa

  $$f(x, y) = \widetilde{f}(\pi(x), \pi(y)) \quad .$$

  Se f è commutativa (risp. *associativa) allora $\widetilde{f}$ è commutativa* (risp. *associativa).*

- *Se R è una relazione in $A \times A$ invariante per $\sim$, e R è riflessiva* (risp *simmetrica, antisimmetrica, transitiva) allora $\widetilde{R}$ è riflessiva* (risp *simmetrica, antisimmetrica, transitiva).*

- *Se A e B sono ordinati e l'ordinamento è invariante, e f è monotona, allora $\widetilde{f}$ è monotona.*

Proposizione 3.g.3. (Replaces 06G) (Replaces 06H) *Consideriamo R una relazione in $A \times A$ transitiva e riflessiva: una tale relazione è detta un preordine [28]; definiamo $x \sim y \iff (xRy \wedge yRx)$ allora $\sim$ è una relazione di equivalenza, R è invariante per $\sim$, e $\widetilde{R}$ (definita come in 3.g.2) è una relazione d'ordine.* [1Z7]

Dimostrazione.

1. $\sim$ è chiaramente riflessiva e simmetrica; è transitiva perché se $x \sim y, y \sim z$ allora $xRy \wedge yRx \wedge yRz \wedge zRy$ ma essendo R transitiva si ottiene $xRz \wedge zRx$ cioè $x \sim z$

2. Siano $x, y, \tilde x, \tilde y \in X$ tali che $x \sim \tilde x, y \sim \tilde y$ allora si ha $xR\tilde x \wedge \tilde x Rx \wedge yR\tilde y \wedge \tilde y Ry$ se aggiungiamo xRy per transitività otteniamo $\tilde x R \tilde y$; e simmetricamente.

3. Vediamo infine che $\widetilde{R}$ è una relazione d'ordine su Y. Usando la (buona) definizione "$[x]\widetilde{R}[y] \iff xRy$" deduciamo che $\widetilde{R}$ è riflessiva e transitiva (come del resto asserito nella proposizione precedente). $\widetilde{R}$ è anche antisimmetrica perché se per $z, w \in A/\sim$ si ha $z\widetilde{R}w \wedge w\widetilde{R}z$ allora presi $x \in z, y \in w$ si ha $xRy \wedge yRx$ che vuol dire $x \sim y$ e dunque $z = w$.

$\square$

Esercizi

E3.g.4 Siano $\mathbb{Z}$ i numeri interi relativi dotati delle usuali operazioni. Sia $p \geq 1$ intero fissato. Consideriamo la relazione di equivalenza [1Z8]

$$n \sim m \iff p|(n-m)$$

cioè sono equivalenti quando $n-m$ è divisibile per p.

Mostrate che vi sono p classi di equivalenza $[0], [1], \ldots [p-1]$ Si indica lo spazio quoziente con $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ o più brevemente $\mathbb{Z}_p$.

Mostrate che le usuali operazioni di somma, sottrazione, prodotto in $\mathbb{Z}$ passano al quoziente.

§3.h Numeri naturali in ZF [246]

In questa sezione costruiremo un modello dei numeri naturali all'interno della teoria ZF degli insiemi; questo modello soddisfa gli assiomi di Peano 4.3 e ha un ordinamento che soddisfa 4.d.1, dunque questo modello gode di tutte le proprietà elencate in Sez. §4; per questo motivo in questa sezione approfondiremo solo le proprietà specifiche di questo modello.

§3.h.a Successore

Definizione 3.h.1. *Dato x si definisce il* ***successore*** *come* [24X]

$$S(x) \stackrel{def}{=} x \cup \{x\} \quad . \tag{3.h.2}$$

Spesso scriveremo Sx invece di $S(x)$ per semplicità.

Diciamo che un insieme A è ***S-saturo*** *se $\emptyset \in A$ e se per ogni $x \in A$ si ha $S(x) \in A$.*

†29

Esercizi

E3.h.3 Notate che $z \in S(x)$ se e solo se $z \in x \vee z = x$; [24V]

E3.h.4 `Prerequisiti:3.b.36,3.h.3.`Dimostrate che $x \in S(x)$ e $x \subsetneq S(x)$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '24N']* [24M]

E3.h.5 `Prerequisiti:3.b.36,(3.h.2),3.h.3.`Siano x, y elementi (qualunque, non necessariamente numeri naturali), tali che [239]

$$x \subseteq y \subseteq S(x) \tag{3.h.6}$$

si mostri che allora

$$x = y \vee y = S(x) \quad ;$$

dove le due condizioni precedenti sono mutualmente esclusive, e (nell'ipotesi (3.h.6) precedente) la seconda vale se e solo se $x \in y$; riassumendo

$$(3.h.6) \Rightarrow (x = y \iff y \neq S(x) \iff x \notin y) \quad .$$

Notate l'analogia con 3.i.9.

E3.h.7 Si mostri che la intersezione di insiemi S-saturi è un insieme S-saturo. [245]

E3.h.8 Prerequisiti:3.b.36,(3.h.2),3.h.3.[†30] Mostrate che [1YM]

$$x = y \iff S(x) = S(y) \quad .$$

In particolare questo dimostra che, se A è un insieme S-saturo, allora è ben definita la funzione $S : A \to A$, il cui grafico è la relazione

$$\{(x, y) \in A^2 : y = S(x)\} \quad ;$$

inoltre S è iniettiva.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1YN']

E3.h.9 Trovate un esempio di x, y tali che $x \in y \wedge x \subseteq y$ ma $S(x) \notin S(y)$ [24Q]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '24R']

E3.h.10 Mostrate che se $x \in y \wedge x \subseteq y$ allora $S(x) \subseteq y$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '24T'] [24S]

§3.h.b Numeri naturali in ZF

Definizione 3.h.11. *L'**assioma dell'infinito** garantisce che esiste un insieme A che è S-saturo.* [243]

Usando l'assioma dell'infinito 3.h.11 si può mostrare la esistenza dell'insieme dei numeri naturali.

Teorema 3.h.12. *$\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme S-saturo.* [244]

Dimostrazione. Dato un insieme A che sia S-saturo, si definisce $\mathbb{N}_A$ come l'intersezioni di tutti i sottoinsiemi S-saturi di A. Per 3.h.7, $\mathbb{N}_A$ è S-saturo. Dati due insieme A, B che siano S-saturi, si mostra che $\mathbb{N}_A = \mathbb{N}_B$: si indica dunque con $\mathbb{N}$ questo insieme. In particolare, dato un insieme A che sia S-saturo, si ha $\mathbb{N} \subseteq A$. □

Esempio 3.h.13. *In questo modello il primo numero naturale è* 0 *ed è identificato con* $\emptyset$. *Poi* [291]

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cup \{0\} = \{0\} = \big\{\{\}\big\}, \\ 2 &= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \Big\{\{\}, \{\{\}\}\Big\}, \\ 3 &= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \Big\{\{\}, \{\{\}\}, \big\{\{\}, \{\{\}\}\big\}\Big\}, \\ &.... \end{aligned}$$

Nota 3.h.14. *Vale questo risultato* [25C]

$$\forall y \in \mathbb{N}, y \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}, S(x) = y$$

questo può essere dimostrato per induzione, come in 4.2, o mostrando che se

$$\exists y \in \mathbb{N}, y \neq \emptyset \wedge \forall x \in \mathbb{N}, S(x) \neq y$$

[†29] In [14] un tale insieme viene definito "*inductive*".

[†30] Proposizione 1.7.4 punto 5 in [3].

allora $\mathbb{N} \setminus \{y\}$ *sarebbe un insieme S-saturo più piccolo di* $\mathbb{N}$*, una contraddizione. In particolare da 3.h.8 si ottiene che la* funzione successore

$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

è bigettiva.

Se $n \neq 0$ *chiameremo* $S^{-1}(n)$ *il* ***predecessore*** *di* n*.*

Possiamo anche dimostrare direttamente il principio di induzione.

Teorema 3.h.15 (Principio di induzione)**.** *Sia* $A \supseteq \mathbb{N}$ *e* $P(n)$ *una proposizione logica che possa essere valutata per* $n \in A$*. Supponiamo siano soddisfatte le due seguenti ipotesi:* [23B]

- $P(n)$ *è vera per* $n = 0$ *e*
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(S(n))$ *;*

allora P *è vera per ogni* $n \in \mathbb{N}$*.*
La prima ipotesi è nota come "base dell'induzione" e la seconda come "passo induttivo"

Dimostrazione. Sia $U = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$ sappiamo che $0 \in U$ e che $\forall x, x \in U \Rightarrow S(x) \in U$, così U è S-saturo e $U \subseteq N$ si conclude $U = \mathbb{N}$. □

Teorema 3.h.16. *Consideriamo la relazione d'ordine* $\subseteq$ *su* $\mathbb{N}$*; allora* [24D]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \subseteq Sy \land x \neq Sy) \iff (x \subseteq y) \quad . \tag{3.h.17}$$

Questo sarà dimostrato nell'Esercizio 3.h.26.

Per dimostrare il teorema precedente si possono usare gli esercizi nella prossima sezione.

Nota 3.h.18. *Questo modello di* $\mathbb{N}$ *soddisfa gli* Assiomi di Peano*; inoltre la relazione d'ordine soddisfa i principi richiesti in Ipotesi 4.d.1; dunque questo modello di* $\mathbb{N}$ *gode di tutte le proprietà presentate in Sez. §4: le diverse versioni del principio di induzione;* $(\mathbb{N}, \subseteq)$ *è bene ordinato; le definizioni per ricorsione; l'aritmetica; ecc.* [26K]

Quando vorremo confrontare questo modello con altri modelli, lo indicheremo con $\mathbb{N}_{ZF}$*.*

Le proprietà dell'insieme ordinato $\mathbb{N}, \subseteq$ sono dunque queste.

Proposizione 3.h.19. *Questo modello di* $\mathbb{N}$ *è un insieme bene ordinato dall'ordinamento* [26J]

$$n \leq m \iff n \subseteq m \quad .$$

Inoltre in questo modello si ha

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \in m \iff (n \subseteq m \land n \neq m) \quad . \tag{3.h.20}$$

dunque, definendo (come usuale)

$$n < m \doteq (n \leq m \land n \neq m)$$

possiamo scrivere

$$n \in m \iff n < m \quad .$$

Questo è dimostrato negli esercizi successivi, e in particolare in 3.h.28.

Per approfondimenti si veda negli appunti del corso (Cap. 1 Sez. 7 in [3]); o anche in [14],[13].

§3.h.c Insiemi transitivi

Definizione 3.h.21. *Un insieme A si dice **transitivo** se valgono queste condizione equivalenti:* [24Z]

- $$\forall x, x \in A \Rightarrow x \subseteq A \quad ,$$
  cioè ogni elemento di A è anche un sottoinsieme di A;
- $$\forall x, y, x \in y \wedge y \in A \Rightarrow x \in A \quad .$$

Esempio 3.h.22. *Esempi di insiemi transitivi sono:* [290]

$$\begin{aligned}
\{\} &= 0 \\
\{\{\}\} &= 1, \\
\left\{\{\}, \{\{\}\}\right\} &= 2, \\
\left\{\{\}, \{\{\}\}, \left\{\{\{\}\}\right\}\right\}&, \\
\left\{\{\}, \{\{\}\}, \left\{\{\{\}\}\right\}, \left\{\left\{\{\{\}\}\right\}\right\}\right\}&, \\
&\dots \\
\left\{\{\}, \{\{\}\}, \left\{\{\}, \{\{\}\}\right\}\right\} &= 3 \\
\left\{\{\}, \{\{\}\}, \left\{\{\{\}\}\right\}, \left\{\{\}, \{\{\}\}\right\}\right\}&, \\
&\dots.
\end{aligned}$$

Confrontando con 3.h.13 notate che vi sono insiemi transitivi che non sono numeri naturali.

Esercizi

E3.h.23 Se ogni elemento di A è un insieme transitivo, allora $x \in y$ è una relazione transitiva in A . (Notate che questo vale anche quando A non è un insieme transitivo). [25J]
Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '25K']*

E3.h.24 Dimostrate che per ogni $m \in \mathbb{N}$, m è un insieme transitivo. [257]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '258']*

E3.h.25 `Prerequisiti:3.h.21,3.h.10,3.h.24.` [26N]

$\forall n, k \in \mathbb{N}$ se $n \in k$ allora $Sn \subseteq k$.

(Sugg: si può dimostrare senza induzione, usate il fatto che ciascun $n \in \mathbb{N}$ è un insieme transitivo).

E3.h.26 `Prerequisiti:3.h.25,3.b.36.` Per concludere il Teorema 3.h.16 dobbiamo dimostrare [26P]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \subseteq Sy \wedge x \neq Sy) \iff (x \subseteq y) \quad . \tag{3.h.17}$$

Dimostrate che se X è un insieme in cui ogni elemento è transitivo allora

$$\forall x, y \in X, (x \subseteq Sy \wedge x \neq Sy) \iff (x \subseteq y) \quad . \tag{3.h.27}$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '26Q']*

Gli esercizi precendenti dimostrano il Teorema 3.h.16, dopodiché dai risultati in Sez. §4 otteniamo che $(\mathbb{N}, \leq)$ è bene ordinato.

A seguire altri interessanti esercizi.

Esercizi

E3.h.28 Sappiamo da 3.h.18 che la relazione $n \subseteq m$ è totale in $\mathbb{N}$. Dimostrate che [269]

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \in m \iff (n \subseteq m \wedge n \neq m) \quad . \tag{3.h.20}$$

Per 3.c.11 questo implica

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \subseteq m \iff (n \in m \vee n = m) \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '26B']*

E3.h.29 Mostrate questa affermazione [265]

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \in k \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '266']*

E3.h.30 `Prerequisiti:3.h.16,3.h.19.`Dimostrate che [25D]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}\,,\ x \subseteq y\ \wedge\ x \neq y \Rightarrow Sx \subseteq y \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '279']*

E3.h.31 Fissato $N \in \mathbb{N}$, consideriamo la relazione d'ordine $n \subseteq m$ per $n, m \in N$. Dato che $N \subseteq \mathbb{N}$ è bene ordinato, allora la Proposizione 3.h.19 implica che $(N, \subseteq)$ è bene ordinato; ciononondimeno provate a dimostrare direttamente per induzione che $n \subseteq m$ è un buon ordinamento in N. [25W]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '25X']*

E3.h.32 Dimostrate che [25Z]

$$\underline{\bigcup}\mathbb{N} = \mathbb{N} \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '260']*

§3.h.d Ordinali

Sfruttando i risultati precedenti, possiamo dare qualche cenno della teoria degli ordinali.

Definizione 3.h.33. *Un **ordinale** (secondo Von Neumann) è un insieme transitivo A tale che ogni suo elemento è un insieme transitivo.*

Esercizi

E3.h.34 `Prerequisiti:3.b.36,3.c.10.` Se A è un insieme dove $\in$ è transitiva, definiamo [25Q]

$$x \le y \doteq x \in y \vee x = y$$

si mostri che $x \le y$ è una relazione d'ordine in A (possibilmente parziale).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '25S']*

E3.h.35 Dimostrate che l'intersezione di insiemi transitivi è un insieme transitivo. [25B]

E3.h.36 Dimostrate che l'intersezione di ordinali è un ordinale. [25N]

E3.h.37 Dimostrate che se X è un ordinale e $A \in X$ allora A è un ordinale. [25M]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '25P']*

E3.h.38 Usate l'assioma di buona fondazione 3.b.36 per mostrare che se A è transitivo e $A \neq \emptyset$ allora $\emptyset \in A$. [25G]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '25H']*

E3.h.39 Dimostrare che $\mathbb{N}$ è un insieme transitivo. (Sugg.: usare l'induzione). [255]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '256']*

Questo e 3.h.24 ci dicono che $\mathbb{N}$ è un ordinale.

E3.h.40 Sia X un ordinale e [26S]

$$P_x = \{z \in X, z \in x\}$$

mostrate che

$$\forall x, y \in X \,,\; P_x = P_y \Rightarrow x = y \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '26T']*

(Notate la somiglianza con 4.d.6).

E3.h.41 `Prerequisiti:3.h.34,3.b.36,3.d.12,3.i.6,3.h.40.` [26V]

Sia X un ordinale, definiamo

$$x \le y \doteq x \in y \vee x = y$$

sappiamo da 3.h.34 che $x \le y$ è una relazione d'ordine in X (possibilmente parziale). Si mostri che $x \le y$ è un buon ordinamento.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '26W']*

Nota 3.h.42. *Consideriamo di nuovo la proposizione 3.h.19 che afferma che $\mathbb{N}_{ZF}$ è ben ordinato dalla relazione $\subseteq$.* [275]

Sappiamo da 3.h.39 e 3.h.24 che $\mathbb{N}_{ZF}$ è un ordinale; potremmo essere tentati di vedere la proposizione 3.h.19 come corollario del risultato precedente 3.h.41.

Questo purtroppo non è un modo ben posto per dimostrare questo risultato, a causa di questa cascata di dipendenze:

- *la dimostrazione di 3.h.41 si basa sul risultato 3.d.12*
- *il risultato 3.d.12 a sua volta necessita di una definizione per ricorrenza di una funzione: questo è il Teorema 4.b.1*

- *la dimostrazione del Teorema 4.b.1 usa il fatto che il principio di induzione vale in $\mathbb{N}$.*

Quindi dobbiamo prima dimostrare le proprietà di $\mathbb{N}_{ZF}$ in modo indipendente della teoria degli ordinali, e quindi dimostrare i risultati in Sec. §4, e quindi alla fine possiamo dimostrare il risultato 3.h.41, che afferma che ogni ordinale è ben ordinato dalla relazione $\subseteq$.

§3.i Buoni ordinamenti [1YQ]

Definizione 3.i.1. [07R]
*Un ordinamento totale $\leq$ su un insieme X è un **buon ordinamento** se ogni sottoinsieme non vuoto di X ha un minimo.*
In particolare X ha un minimo che indicheremo con 0_X.

La teoria dei buoni ordinamenti è molto legata alla teoria degli ordinali, di cui abbiamo dato pochi cenni in Sez. §3.h.d. Ci limitiamo a dire che ogni ordinale è il rappresentante standard di un tipo di buon ordinamento. Usando la teoria standard degli ordinali (dovuta a Von Neumann) molti degli esercizi successivi si possono riformulare e semplificare. [222]

Nota 3.i.2. *Ricordiamo che l'estremo superiore $\sup A$ di $A \subseteq X$ è (per definizione) il minimo dei maggioranti (when it exists).* [07S] *(Svolto il 2023-01-17)*
Se X è bene ordinato si ha esistenza dell'estremo superiore $\sup A$ per ogni $A \subseteq X$ che sia superiormente limitato. [†31] *(Se A non è superiormente limitato possiamo convenzionalmente decidere che $\sup A = \infty$).*

Esercizi

E3.i.3 Se $(X, \leq)$ è un insieme bene ordinato e $Y \subseteq X$ è un sottoinsieme, allora Y con (la restrizione de) l'ordinamento $\leq$ è un insieme bene ordinato. [07W]

E3.i.4 `Prerequisiti:4.b.1`. Sia X un insieme totalmente ordinato. Mostrate che sono equivalenti: [07X] *(Svolto il 2023-01-17) (Proposto il 2022-12)*

1. X è bene ordinato;
2. non esistono funzioni $f : \mathbb{N} \to X$ strettamente decrescenti.

(È un caso particolare di 3.d.12)

E3.i.5 `Prerequisiti:3.d.58,3.d.34,3.d.51,3.i.4.Difficoltà:*.Note:`*Esercizio 3 del compito del 29 Gennaio 2021.* [22F] *(Svolto il 2022-10-13 in parte)*

Sia dato $(X, \leq_X)$ dove X un insieme infinito e $\leq_X$ è un buon ordinamento.

- Se X non ha massimo, allora esiste $(Y, \leq_Y)$ tale che posto $Z = Y \times \mathbb{N}$ con $\leq_Z$ l'ordinamento lessicografico, allora $(X, \leq_X)$ e $(Z, \leq_Z)$ hanno lo stesso tipo d'ordine.

[†31] "Superiormente limitato" vuol dire che esiste $w \in X$ tale che $x \leq w$ per ogni $x \in A$. Ciò equivale a dire che l'insiemi dei maggioranti di A è non vuoto!

- Se invece X ha massimo, allora esistono $(Y, \leq_Y)$ e $k \in \mathbb{N}$ tale che, posto Z essere la concatenazione di $Y \times \mathbb{N}$ e di $\{0, \dots k\}$ (dove $Y \times \mathbb{N}$ ha l'ordinamento lessicografico, come sopra), allora $(X, \leq_X)$ e $(Z, \leq_Z)$ hanno lo stesso tipo d'ordine.
- Mostrate che, nei casi precedenti, Y è bene ordinato.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '22G']*

E3.i.6 Difficoltà:*. Sia dato l'insieme (parzialmento) ordinato $(X, \leq)$; definiamo [0DQ] *(Proposto il 2022-12)*

$$P_x \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in X : w < x\} \quad .$$

supponiamo che $(X, \leq)$ soddisfi questi due requisiti:

- $$\forall x, y \in X \ , \ P_x = P_y \Rightarrow x = y$$
- ogni insieme non-vuoto $A \subseteq X$ contiene almeno un elemento minimale, cioè
$$\exists a \in A, \forall b \in A \neg (b < a) \quad ;$$

allora $(X, \leq)$ è bene ordinato.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '26R']*

§3.i.a Successore

Definizione 3.i.7. *Sia X un insieme non vuoto bene ordinato. Supponiamo che $x \in X$ non sia il massimo, allora l'insieme dei maggioranti $\{y \in X : y > x\}$ non è vuoto, definiamo dunque l'elemento successore $S(x)$ di x come* [1Z0]

$$S(x) = \min\{y \in X : y > x\} \quad .$$

Esercizi

E3.i.8 Prerequisiti:3.i.7. [1Z1] *(Proposto il 2023-01-17)*

Supponiamo che X non abbia massimo; sia S definito come in 3.i.7; si dimostri che è una funzione iniettiva

$$S : X \to X \quad ,$$

e che $S(x) \neq 0_X$, per ogni x (cioè, 0_X non è successore di nessun elemento).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '223']*

Notiamo che in generale S non sarà surgettiva come funzione $S : X \to X \setminus \{0_X\}$: vi potrebbero essere altri elementi $y \in S, y \neq 0_X$ che non sono successori di alcun elemento. Se però, dato $y \in X$, esiste $x \in X$ per cui $y = S(x)$, diremo che *x è il **predecessore** di y*.

E3.i.9 Prerequisiti:3.i.7,3.i.8. Se $x \leq y \leq S(x)$ allora $y = x \vee y = S(x)$. [22H]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '22J']*

(Il senso di questo risultato è che $S(x)$ è l'immediato successore di x, non ci sta niente in mezzo...).

§3.i.b Segmenti e buoni ordinamenti

Nel seguito $(X, \leq_X)$ sarà un insieme ben ordinato.

Definizione 3.i.10. *Un sottoinsieme non vuoto $S \subseteq X$ è un* ***segmento iniziale*** *se $\forall x \in S, \forall y \in X,\ y < x \Rightarrow y \in S$.* [07T]

Esercizi

E3.i.11 Mostrate che l'unione di segmenti iniziali è un segmento iniziale. [07Z]

E3.i.12 Se $S \subseteq X$ è un segmento iniziale e $S \neq X$, mostrate che esiste ed è unico $s \in X \setminus S$ (detto *l'elemento successivo* a S) che estende S, tale cioè che $S \cup \{s\}$ è un segmento iniziale. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '081'] (Si noti che vi sono analogie con il concetto di "successore" visto in 3.i.7...potremmo dire che s è il successore del segmento S). [080] *(Svolto il 2023-01-17)*

E3.i.13 Prerequisiti: 3.d.44, 3.d.45, 3.d.49. Sia X un insieme bene ordinato. Mostrate che se $I \subseteq X$ è un intervallo allora $I = [a, b)$ oppure $I = [a, b]$ oppure $I = [a, \infty)$ con $a, b \in X$. (Il viceversa è ovviamente vero). [082] *(Svolto il 2023-01-17)*

In particolare un segmento iniziale è $[0_X, b)$ o $[0_X, b]$ oppure tutto X. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '083']

E3.i.14 Siano $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ insiemi non vuoti totalmente ordinati. Sia $f : X \to Y$ una funzione bigettiva strettamente crescente. Allora per ogni $S \subseteq X$ segmento iniziale si ha che $f(S)$ è un segmento iniziale di Y; e viceversa. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '085'] [084]

E3.i.15 Prerequisiti:3.i.4,4.b.1,3.d.51. [086]

Sia $(X, \leq_X)$ un insieme non vuoto bene ordinato. Mostrate che se $S \subseteq X$ è un segmento iniziale e $(X, \leq_X)$ e $(S, \leq_X)$ sono equiordinati dalla mappa $f : S \to X$ allora $X = S$ e f è l'identità.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '087'][UNACCESSIBLE UUID '088']

(Notate la differenza con la teoria delle cardinalità: un insieme infinito è in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria, *cf* 3.j.36 e 3.j.39. Inoltre se due insiemi hanno la stessa cardinalità allora vi sono molte bigezioni fra essi.)

E3.i.16 Date un esempio di un insieme totalmente ordinato $(X, \leq_X)$ che ha minimo, e di un segmento iniziale S tali che $(X, \leq_X)$ e $(S, \leq_X)$ sono equiordinati. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08B'] [089] *(Svolto il 2023-01-17)*

E3.i.17 Prerequisiti:3.i.15. Siano $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ bene ordinati; supponiamo che esista $f : X \to T$ funzione bigettiva monotona strettamente crescente, dove T un segmento iniziale di Y; allora f è unica (e unico è T). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08D'] [08C] *(Proposto il 2022-12)*

E3.i.18 Prerequisiti:3.e.24, 3.i.11, 3.i.14, 3.i.12, 3.i.17. [08F]

Siano dati due insiemi non vuoti bene ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$. Mostrate che

1. esiste un segmento iniziale S di X e una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $g : S \to Y$; oppure [†32]

[†32] Le due condizioni possono anche valere entrambe, nel qual caso X, Y hanno lo stesso tipo di ordine.

2. esiste un segmento iniziale T di Y e una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $g : X \to T$.

Nel primo caso scriveremo che $(Y, \leq_Y) \preceq (X, \leq_X)$, nel secondo che $(X, \leq_X) \preceq (Y, \leq_Y)$. (Notate che nel primo caso si ha $|Y| \leq |X|$ e nel secondo $|X| \leq |Y|$). Per l'esercizio precedente la mappa g e il relativo segmento sono uniche.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '08G']*

E3.i.19 Prerequisiti:3.i.18.Mostrate che se $(X, \leq_X) \preceq (Y, \leq_Y)$ e anche $(Y, \leq_Y) \preceq (X, \leq_X)$, allora sono *equiordinati*. [08H]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '08J']*

La relazione $\preceq$ è dunque una relazione di ordine totale fra tipi di buoni ordinamenti.

§3.i.c Esempi

Esercizi

E3.i.20 Prerequisiti:3.d.37.Il tipo di buon ordinamento di $\mathbb{N}$ è chiamato ω. Dato $k \geq 2$ naturale, $\mathbb{N}^k$ dotato dell'ordinamento lessicografico è un insieme bene ordinato (per 3.d.37), e il suo tipo di buon ordinamento è chiamato ω^k. Mostrate che $\omega^k \preceq \omega^h$ per $h > k$, e che ω^k, ω^h non hanno lo stesso tipo d'ordine. [08K]

E3.i.21 Difficoltà:*.Costruite un buon ordinamento su un insieme numerabile X tale che $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ dove S_n sono segmenti iniziali, ciascuno con tipo di ordinamento ω^n. L'ordinamento così costruito su X si indica con ω^ω. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '08N']* [08M]

E3.i.22 Difficoltà:*.Costruite una mappa crescente fra ω^ω e $\mathbb{R}$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '08Q']* [08P]

§3.j Cardinalità [1YW]

Per comodità useremo il simbolo $|A|$ per indicare la cardinalità dell' insieme A. Questo simbolo si usa come segue. Dati due insiemi A, B, scriveremo $|A| = |B|$ se gli insiemi sono **equipotenti** (o anche **equinumerosi**), cioè se esiste una funzione bigettiva fra A e B; scriveremo $|A| \leq |B|$ se esiste una funzione iniettiva da A a B. Scriveremo anche $|A| < |B|$ se esiste una funzione iniettiva da A a B, ma non una bigezione. Se assumiamo vero l'assioma della scelta allora per ogni coppia di insiemi si ha sempre $|A| \leq |B|$ oppure $|B| \leq |A|$ (si veda 3.j.20). [22B]

Proposizione 3.j.1. *Se ora fissiamo una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi di interesse, definiamo innanzitutto la relazione $A \sim B \iff |A| = |B|$; si mostra che questa è una relazione di equivalenza; dunque si ottiene che $|A| \leq |B|$ è un ordinamento totale in $\mathcal{F}/\sim$.* [1Z9]

Dimostrazione. Questo deriva dalla Proposizione 3.g.3, in quanto la relazione

$$ARB \iff |A| \leq |B|$$

è riflessiva e transitiva, e per il Teorema di Cantor–Bernstein

$$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \iff A \sim B \quad .$$

□

Nel seguito, sia $E_0 = \emptyset$ oppure $E_n = \{1, \dots n\}$ se $n \geq 1$.

Lemma 3.j.2. *Se $n, m \in \mathbb{N}, n < m$ allora $|E_n| < |E_m|$. Per la dimostrazione si può vedere il Lemma 1.12.1 degli appunti [3].* [2GK]

Definizione 3.j.3. *Per definizione* [†33] "un insieme A è **finito** e ha cardinalità n" *se è equipotente a un'insieme E_n (per una scelta di $n \in \mathbb{N}$; vi è al più un n per cui questo può avvenire, per via del il Lemma precedente). Dunque quando l'insieme è finito, $|A|$ si identifica con il numero (naturale) dei suoi elementi, scriveremo $|A| = n$. Se un insieme non è finito, allora è* ***infinito****.* [1B1]

Notiamo che la mappa nulla $f : \emptyset \to \emptyset$ è una bigezione; e $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$. Il risultato seguente è fondamentale.

Esercizio 3.j.4. *Dimostrate che $\mathbb{N}$ è infinito, e che $|\mathbb{N}| > n, \forall n \in \mathbb{N}$.* Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2GJ'] [2GH]

Ricordiamo il Teorema 1.12.2 degli appunti [3], per comodità.

Teorema 3.j.5. *Se A è infinito, allora $|A| \geq |\mathbb{N}|$. In particolare, $|A| > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.* [02S]

Definizione 3.j.6. *Un insieme A equipotente a $\mathbb{N}$ si dice* ***numerabile****;* [†34] *un tale insieme è infinito (per il risultato 3.j.4 sopra riportato). Diremo che un insieme A ha cardinalità* ***al più numerabile*** *se è finito o numerabile.* [2DD]

§3.j.a Insiemi finiti

Esercizi

E3.j.7 Sia A un insieme finito, e $B \subseteq A$, mostrate che B è finito. [02T]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '02V']*

E3.j.8 Supponiamo di avere un numero finito $m \geq 1$ di insiemi $A_1, \dots, A_m$ tutti finiti. Mostrate che $\bigcup_{j=1}^m A_j$ è un insieme finito. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '02X']* [02W]

E3.j.9 Ricordiamo che A^B è l'insieme di tutte le funzioni $f : B \to A$. Se A, B sono insiemi finiti nonvuoti mostrate che $|A^B| = |A|^{|B|}$. Cosa succede se uno, o entrambi, sono vuoti? *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '02Z']* [02Y]

E3.j.10 Se A, B sono insiemi finiti nonvuoti, calcolate la cardinalità dell'insieme delle funzioni $f : B \to A$ iniettive; e la cardinalità di quelle surgettive. Cosa succede se uno, o entrambi, dei due insiemi A, B sono vuoti? [22K]

§3.j.b Confronto

Esercizi

E3.j.11 `Prerequisiti:3.e.20.`Supponiamo che A non sia vuoto. Si ha $|A| \leq |B|$ se e solo se esiste una funzione surgettiva $f : B \to A$. (L'implicazione "se" necessita dell'assioma della scelta; si veda anche 3.b.46). [030]

E3.j.12 Mostrate che se $|A_1| \leq |A_2|$ e $|B_1| \leq |B_2|$ allora $|A_1 \times B_1| \leq |A_2 \times B_2|$. [031]

E3.j.13 Mostrate che se $|A_1| \leq |A_2|$ e $|B_1| \leq |B_2|$ allora $|A_1^{B_1}| \leq |A_2^{B_2}|$ *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '033']* [032]

E3.j.14 Mostrate che $|(A^B)^C| = |A^{(B\times C)}|$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '035']* [034] *(Svolto il 2022-10-27)*

E3.j.15 Sia I una famiglia di indici e B_i, A_i insiemi, per $i \in I$, con $|A_i| \leq |B_i|$; supponiamo che gli insiemi B_i siano a due a due disgiunti; si mostri allora che [036] *(Svolto il 2023-01-24)*

$$\left| \bigcup_{i\in I} A_i \right| \leq \left| \bigcup_{i\in I} B_i \right| .$$

(Secondo voi è possibile dimostrare questo risultato senza usare l'assioma della scelta, almeno nel caso in cui I è numerabile?) *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '037']*

E3.j.16 Sia C un insieme, I una famiglia di indici e siano B_i insiemi per $i \in I$; supponiamo che gli insiemi B_i siano a due a due disgiunti; sia $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} B_i$ per comodità; si mostri allora che [038]

$$\forall i, |B_i| \leq |C| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{B}| \leq |I \times C| \tag{3.j.17}$$
$$\forall i, |B_i| \geq |C| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{B}| \geq |I \times C| \quad . \tag{3.j.18}$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '039']*

E3.j.19 Sia C un insieme, I una famiglia di indici e siano B_i insiemi per $i \in I$ con $|B_i| = |C|$; si mostri allora che [03C]

$$|\mathcal{B}| = |C^I|$$

dove $\mathcal{B} = \prod_{i\in I} B_i$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '03D']*

E3.j.20 `Prerequisiti:3.e.24`. Mostrate che le cardinalità sono sempre confrontabili, cioè che dati due insiemi A, B si ha sempre o $|A| \leq |B|$ o $|B| \leq |A|$. (Usate il lemma di Zorn e la costruzione spiegata nell'esercizio 3.e.24). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '03G']* [03F] *(Proposto il 2022-12)*

Questo enunciato è equivalente all' Assioma della Scelta, si veda [22].

§3.j.c Cardinalità numerabile

Definizione 3.j.21. *Ricordiamo che un insieme è "numerabile" se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.* [2DF]

Se A è numerabile, esiste $a : \mathbb{N} \to A$ bigettiva; scrivendo a_n invece di $a(n)$, diremo dunque che $A = \{a_0, a_1, a_2 \ldots\}$ è una ***enumerazione****.*

Esercizi

E3.j.22 Trovato un polinomio $p(x, y)$ che, visto come funzione $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sia [03H]

†33 Questa è la definizione presentato nel corso. Esistono anche altre definizioni di "insieme finito" [17]. Vedete ad esempio l'esercizio 3.j.39

†34 Attenzione, in Inglese il termine *countable* si usa per insiemi finiti o numerabili; per indicare un insieme numerabile si deve dire **countably infinite**.

bigettivo. Se ne ricava, iterando, che esiste un polinomio q_k in k variabili bigettivo $q_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Dunque $\mathbb{N}^k$ è numerabile. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '03J'][UNACCESSIBLE UUID '03K']*

E3.j.23 Mostrate che gli insiemi $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sono numerabili. [03M]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '03N']*

E3.j.24 Prerequisiti: 3.j.15,3.j.22. [03P]

Siano $A_0, A_1 \ldots A_n \ldots$ insiemi al più numerabili, per $n \in \mathbb{N}$.

Si mostri che $B = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ è al più numerabile.

Notate che B è numerabile se ad esempio vi è almeno un n per cui A_n è numerabile.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '03Q']*

E3.j.25 Indichiamo con $\mathcal{P}_f(A)$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subseteq A$ che sono insiemi finiti. [03R] Questo è detto colloquialmente *l'insieme delle parti finite*.

Si mostri che $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ è numerabile.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '03S']*

Questo risultato vale in generale, si veda 3.j.47.

§3.j.d Cardinalità del continuo

Definizione 3.j.26. *Diremo che un insieme ha cardinalità del continuo se ha la stessa cardinalità di* $\mathbb{R}$. [03V]

Nota 3.j.27. *Cantor dimostrò che* $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. *Successivamente Cantor formulò (nel 1878) l'*ipotesi del continuo *CH:* per ogni insieme infinito $E \subseteq \mathbb{R}$, si ha che $|E| = |\mathbb{R}|$ oppure $|E| = |\mathbb{N}|$. *Per molti anni i matematici provarono a dimostrare CH (o la sua negazione). Ci vollero decenni per capire che questo non è possibile. Oggi sappiamo che, assumendo che la teoria ZF sia consistente, allora né CH né la negazione di CH possono essere dimostrati come teoremi in ZF (anche usando l'Assioma della scelta). La seconda parte dell'asserzione fu dimostrata da Gödel in 1939. La prima parte da Cohen nel 1963. Si veda nel Cap. 6 in [13].* [2F2]

Esercizi

E3.j.28 Spiegate come potreste costruire esplicitamente una bigezione fra $[0, 1)$ e $[0, 1)^2$. [03X] *(Proposto il 2022-12)*

E3.j.29 Mostrate con costruzioni esplicite che i seguenti insiemi hanno cardinalità del continuo: [03Y] *(Proposto il 2022-10-13)* *(Svolto il 2022-10-27)*

$$[0, 1], \quad [0, 1), \quad (0, 1), \quad (0, \infty) \ .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '03Z']*

E3.j.30 Prerequisiti:3.j.37, 3.j.14, 3.j.13. [040]

Mostrate che i seguenti insiemi hanno cardinalità del continuo.

$$\mathbb{R}^n, \quad \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '041'][UNACCESSIBLE UUID '042']*

E3.j.31 Prerequisiti:3.j.15,3.j.30.Siano A_t insiemi con cardinalità minore o uguale al continuo, per $t \in \mathbb{R}$. Si mostri che $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t$ ha cardinalità del continuo. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '044']* [043]

E3.j.32 Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subseteq \mathbb{R}$ che sono insiemi finiti o numerabili; si mostri che $\mathcal{A}$ ha cardinalità del continuo. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '046']* [045]

§3.j.e In generale

Aggiungiamo alcuni esercizi di carattere più generale.

Esercizi

E3.j.33 Mostrate che $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '049']* [048]

E3.j.34 Considerate l'insieme $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; e il sottoinsieme $\mathcal{A}$ delle f che possono essere definite usando un algoritmo, scritto in un linguaggio di programmazione a piacere, supponendo inoltre che il computer che lo esegue abbia una memoria potenzialmente illimitata, e tale che per ogni scelta $n \in \mathbb{N}$ in input l'algoritmo deve terminare e restituire $f(n)$. Confrontate le cardinalità di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e di $\mathcal{A}$. [04B]

E3.j.35 Calcolate la cardinalità dell'insieme $\mathcal{F}$ delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ debolmente descrescenti. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '04F']* [04D] *(Proposto il 2022-12)*

E3.j.36 Prerequisiti:4.b.1. [04G]

Un insieme A è detto *Dedekind–infinito* se è in bigezione con una sua parte propria cioè se esiste $B \subset A, B \neq A$ e $h : A \to B$ bigezione. Mostrate che un insieme A è *Dedekind–infinito* se e solo se esiste una funzione iniettiva $g : \mathbb{N} \to A$. (Questo risultato non necessita dell'assioma della scelta).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '04H']*

E3.j.37 Prerequisiti:3.j.5.Se A è infinito e B è finito o numerabile mostrate che $|A| = |A \cup B|$ usando l'esistenza di una funzione $g : \mathbb{N} \to A$ iniettiva. [04J]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '04K']*

E3.j.38 Prerequisiti:3.j.8,3.j.37.Similmente se A è infinito e B è finito mostrate che $|A| = |A \setminus B|$ usando il fatto che per ogni insieme infinito X esiste una funzione $g : \mathbb{N} \to X$ iniettiva. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '22N']* [22M]

E3.j.39 Prerequisiti:3.j.5, 3.j.36. Mostrate che un insieme A è *Dedekind–infinito* se e solo se è infinito (secondo la definizione vista all'inizio del capitolo). [04M]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '04N']*

Nota: secondo [11], la precedente equivalenza non può essere dimostrata usando solo gli assiomi di ZF (Zermelo–Fraenkel senza l'assioma della scelta) ; la precedente equivalenza può essere dimostrata usando gli assiomi di ZFC (Zermelo–Fraenkel con l'assioma della scelta); ma la sua validità in ZF è più debole dell'assioma della scelta.

E3.j.40 Prerequisiti:3.j.37,3.e.24.Difficoltà:*. [04P]
Sia X infinito. Mostrate che X si partiziona in due insiemi X_1, X_2 che hanno la stessa cardinalità di X. *(Sugg. considerate sottoinsiemi di X su cui la proprietà vale, usate Zorn) Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '04Q']* *(Proposto il 2022-12)*

E3.j.41 Prerequisiti:3.j.40,3.j.22,3.i.5.Difficoltà:*. [04R]
Sia A infinito. Mostrate che $|D \times A| = |A|$ per ogni insieme nonvuoto D finito o numerabile. †35 *(Svolto il 2022-10-13 in parte)*

(Una possibile soluzione usa 3.j.40) *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '04S']*

(Un'altra possibile soluzione usa il teorema di Zermelo, 3.i.5 e 3.j.22; in questo caso 3.j.40 diviene un corollario di questo risultato.) *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '04T']*

E3.j.42 Siano A, B infiniti. Mostrate che $|A \cup B| = \max\{|A|, |B|\}$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '04W']* [04V] *(Svolto il 2022-10-27)*

E3.j.43 Mostrate che se A è un insieme infinito, e si decompone nell'unione disgiunta di due insiemi A_1, A_2 con $|A_1| \le |A_2|$ allora $|A| = |A_2|$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '04Y']* [04X]

E3.j.44 Prerequisiti:3.e.24, 3.j.41.Difficoltà:**. [04Z]
Siano A, B infiniti. Mostrate che $|A^2| = |A|$. *(Proposto il 2022-10-13)*

Usate questo risultato per mostrare che se A, B sono nonvuoti e almeno uno è infinito allora $|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$. *(Svolto il 2022-11-15)*

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '050']*

Si veda inoltre la nota 3.j.45.

Nota 3.j.45. *Note storiche.* [27H]

- *La proposizione "*$|A^2| = |A|$ vale per ogni insieme infinito*" è equivalente all'assioma della scelta. Questo fu dimostrato da Tarski [24] nel 1928; l'articolo è online e scaricabile e contiene altre sorprendenti equivalenze. Si veda anche [22] Parte 1 Sezione 7 pagina 140 asserzione CN6.*
- *Jan Mycielski [19] riporta:* «Tarski told me the following story. He tried to publish his theorem (stated above) in the *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* but Fréchet and Lebesgue refused to present it. Fréchet wrote that an implication between two well known propositions is not a new result. Lebesgue wrote that an implication between two false propositions is of no interest. And Tarski said that after this misadventure he never tried to publish in the Comptes Rendus».

  Questo aneddoto ci mostra quanto (prima dei lavori di Godel e Cohen [6], anche i matematici più importanti non capissero l'importanza dell'assioma della scelta.

Esercizi

E3.j.46 Prerequisiti:3.j.44. Sia A infinito. Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \ge 1$. Mostrate che $|A^n| = |A|$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '052']* [051]

E3.j.47 Prerequisiti:3.j.15, 3.j.46, 3.j.44. Sia A infinito. Si mostri che l'insieme delle parti finite $\mathcal{P}_f(A)$ ha la stessa cardinalità di A. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '054'] [053]

(Proposto il 2022-12)

(Svolto il 2023-01-24)

E3.j.48 Prerequisiti: 3.j.16, 3.j.44. Sia X un insieme infinito, sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X, siano $U = X/\sim$ le classi di equivalenza. [055]

(Svolto il 2023-01-24)

- Supponiamo che ogni classe sia finita, mostrate che $|U| = |X|$.
- Supponiamo che U sia infinito e ogni classe abbia cardinalità al più $|U|$, allora $|U| = |X|$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '056']

E3.j.49 Prerequisiti:3.b.47,3.j.47,3.j.48.Difficoltà:**. [057]

Sia V uno spazio vettoriale reale. Siano A, B due basi di Hamel (si veda 3.b.47). Si mostri che $|A| = |B|$. (Questo risultato è noto come "*Teorema della dimensione*")

Più in generale, siano $L, G \subseteq V$, dimostrate che, se i vettori in L sono linearmente indipendenti e se G genera V, allora $|L| \le |G|$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '058']

Altri esercizi interessanti sono 10.g.10, 10.a.7.

§3.j.f Potenza

Ricordiamo che A^B è l'insieme di tutte le funzioni $f : B \to A$. Scriveremo $|2^A|$ per indicare la cardinalità dell'insieme delle parti di A.

Esercizi

E3.j.50 Prerequisiti:3.j.44. Siano A, B insiemi non vuoti e tali che A è infinito e $2 \le |B| \le |A|$ allora $|B^A| = |2^A|$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '05K'] [05J]

(Proposto il 2022-12)

E3.j.51 Siano A, B insiemi non vuoti, supponiamo che esista un insieme C tale che $|B| = |2^C|$ allora $|B^A| = \max\{|B|, |2^A|\}$. [05M]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '05N']

In generale nel caso in cui $|B| > |A|$ lo studio della cardinalità di $|B^A|$ è molto complesso (anche in casi apparentemente semplici come $A = \mathbb{N}$).

§3.k Operazioni su insiemi [1YX]

Esercizi

E3.k.1 Sia X un insieme non vuoto, e $A \subseteq X$. Indicheremo con $A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$ il complementare di A in X. [05R]

Definiamo la funzione caratteristica $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{Z}$ come

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

†35 Equivalentemente, mostrate che esiste una partizione U di A tale che ogni parte $B \in U$ ha cardinalità $|B| = |A|$, e la famiglia U delle parti ha cardinalità $|U| = |D|$.

Si dimostri che

$$\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A \ , \ \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \ , \ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

E3.k.2 Consideriamo ora invece la funzione caratteristica definita come prima, ma considerata come $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{Z}_2$ cioè a valori nel gruppo delle classi resto $\mathbb{Z}_2$ (più correttamente indicato come $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). [05S]

In questo caso le precedenti si possono scrivere come

$$\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_A + 1 \ , \ \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \ , \ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \ .$$

Ricordiamo la definizione della differenza simmetrica $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, si mostri che questa si scrive come

$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \ .$$

Con queste regole di calcolo si mostri che

$$A\Delta B = B\Delta A \ , \ (A\Delta B)^c = A\Delta(B^c) = (A^c)\Delta B \ , \ A\Delta B = C \iff A = B\Delta C$$

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C) \ , \ A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(A^c \cap C)$$

E3.k.3 Siano A, B, C insiemi, allora [05T]

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \ ,$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \ .$$

Dunque l'operazione di prodotto cartesiano è distributiva sull'unione e la intersezione.

E3.k.4 Se A, B, C sono insiemi non vuoti e [05V]

$$(A \times B) \cup (B \times A) = (C \times C)$$

allora $A = B = C$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '05W']*

E3.k.5 Dati quattro insiemi X, Y, A, B con $A \subset X, B \subset Y$, scrivete [05X]

$$(X \times Y) \setminus (A \times B)$$

come unione di tre insiemi a due a due disgiunti, ciascuno un prodotto cartesiano.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '05Y']*

E3.k.6 Vogliamo riscrivere le tautologie viste in 3.a.10 sotto forma di relazioni insiemistiche. [05Z]

Sia X un insieme e siano $\alpha, \beta, \gamma \subseteq X$ sottoinsiemi. Sia $x \in X$. Se definiamo $A = (x \in \alpha)$, $B = (x \in \beta)$, $C = (x \in \gamma)$ nelle tautologie, potremo poi riscrivere la tautologia come una formula fra insiemi $\alpha, \beta, \gamma, X, \emptyset$, che usi i connettivi $=, \cap, \cup$ e il complementare.

Sorprendentemente, la riscrittura può essere effettuata algoritmicamente e in maniera puramente sintattica. Scegliete una tautologie vista in 3.a.10. Nel seguito φ, ψ indicano sottoparti della tautologia che sono formule ben formate.

- Sostituite $((\varphi) \Rightarrow (\psi))$ con $((\neg(\varphi)) \vee (\psi))$ (otterrete un'altra tautologia).
- Poi sostituite sintatticamente $\neg(\varphi)$ con $(\varphi)^c$, $\vee$ con $\cup$ e $\wedge$ con $\cap$; sostituite A con α, B con β, C con γ, V con X e F con $\emptyset$.
- Infine, se la formula contiene almeno un " $\iff$ ", trasformateli tutti in "$=$"; altrimenti aggiungete "$= X$" alla fine.

Verificate che questo "algoritmo" funziona davvero!

E3.k.7 Sia X un insieme. Siano I, J famiglie non vuote di indici, e per ogni $i \in I$ sia $J_i \subseteq J$ una famiglia non vuota di indici. Per ogni $i \in I, j \in I_j$ sia $A_{i,j} \subseteq X$. Si mostri che [060]

$$\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} A_{i,j} = \bigcup_{\beta\in B} \bigcap_{i\in I} A_{i,\beta(i)}$$

dove $B = \prod_{i\in I} J_i$ e ricordiamo che ogni $\beta \in B$ è una funzione $\beta : I \to J$ per cui per ogni i si ha $\beta(i) \in J_i$. Formulate poi una simile regola scambiando il ruolo intersezione e unione (usate i complementari degli insiemi $A_{i,j}$ e le regole di de Morgan).
Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '061']*

§3.k.a Limsup e liminf di insiemi

Definizione 3.k.8. *Dati $A_1, A_2 \ldots$ insiemi , per $n \in \mathbb{N}$, definiamo* [1Z2]

(Svolto il 2022-11-29)

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \stackrel{def}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \tag{3.k.9}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \stackrel{def}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \tag{3.k.10}$$

(3.k.11)

Supponiamo che $A_n \subseteq X$ per ogni n. (Possiamo porre $X = \bigcup_n A_n$).

Esercizi

E3.k.12 Ricordiamo che [063]

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$$

è il complementare di A in X (come già definito in 3.b.6).. Mostrate che

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} (A_n^c) \ .$$

E3.k.13 `Prerequisiti:4.g.1.` Mostrate che [064]

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ frequentemente in } n\} \quad , \tag{3.k.14}$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ definitivamente in } n\} \quad . \tag{3.k.15}$$

("Frequentemente" e "definitivamente" sono discussi in Sez. §4.g).

E3.k.16 Prerequisiti:3.k.13, 4.g.6. Dati $A_1, A_2 \dots$ e $B_1, B_2 \dots$ insiemi, per $n \in \mathbb{N}$, dite se vi è una relazione (di uguaglianza o di contenimento) fra [065]

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n) \cap (\liminf_{n\to\infty} B_n) \stackrel{?}{=} \liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \quad , \tag{3.k.17}$$
$$(\liminf_{n\to\infty} A_n) \cup (\liminf_{n\to\infty} B_n) \stackrel{?}{=} \liminf_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) \quad . \tag{3.k.18}$$

Se non si ha uguaglianza, mostrate un esempio. Usate poi 3.k.12 per stabilire simili regole per il $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '066']*

§3.l Combinatoria

Esercizi

E3.l.1 Siano dati n, k naturali con $k \geq 1$. Quante diverse scelte di vettori $(j_1, \dots j_k)$ di numeri naturali vi sono per cui $j_1 + \cdots + j_k = n$? Quante diverse scelte di vettori $(j_1, \dots j_k)$ di numeri naturali positivi vi sono per cui $j_1 + \cdots + j_k = n$? *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '09P']* [09N]

E3.l.2 Siano n, m interi positivi e siano $I = \{1, \dots, n\}, J = \{1, \dots m\}$. [09Q]

- Quante sono le funzioni $f : I \to J$?
- Quante sono le funzioni $f : I \to J$ iniettive?
- Quante sono le funzioni $f : I \to J$ strettamente crescenti?
- Quante sono le funzioni $f : I \to J$ debolmente crescenti?

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '09R']*

Si veda anche l'esercizio 3.j.9.

§4 Numeri naturali [1X9]

Vogliamo propriamente definire l'insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

dei numeri naturali.

Un possibile modello, come mostrato in Sez. §3.h, è ottenuto appoggiandosi alla teoria di Zermelo—Fraenkel.

Qui invece presentiamo gli assiomi di Peano, espressi usando la *versione intuitiva* della teoria degli insiemi.

Definizione 4.1 (Assiomi di Peano)**.** [1XB] *(Svolto il 2022-11-03)*

(N1) *Esiste un numero* $0 \in \mathbb{N}$.

(N2) *Esiste una funzione* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *(chiamata "successore"), tale che* †36

(N3) $S(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{N}$ *e*

(N4) S *è iniettiva, cioè* $x \neq y$ *implica* $S(x) \neq S(y)$.

(N5) *Se* U *è un sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *tale che:* $0 \in U$ *e* $\forall x, x \in U \Rightarrow S(x) \in U$ *, allora* $U = \mathbb{N}$.

Spesso scriveremo Sn *invece di* $S(n)$ *per semplicità.*

Dai precedenti seguono subito due importanti proprietà. Uno è il principio di induzione, si veda 4.a.1. L'altro è lasciato per esercizio.

Esercizio 4.2. *Mostrate che ogni* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \neq 0$ *è successore di un altro* $k \in \mathbb{N}$*, dimostrando per induzione su* n *questa proposizione* [1YP]

$$P(n) \stackrel{def}{=} (n = 0) \vee (\exists k \in \mathbb{N}, S(k) = n) \quad .$$

Questo dimostra che la funzione successore

$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

è bigettiva.

Se $n \neq 0$ *chiameremo* $S^{-1}(n)$ *il* ***predecessore*** *di* n*.*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22Q']

(Parte di questo risultato vale più in generale, si veda in 3.i.8)

L'idea è che la funzione successore codifica gli usuali numeri secondo lo schema

$$1 = S(0), \quad 2 = S(1), \quad 3 = S(2) \ldots$$

e (avendo definito l'addizione) si avrà che $S(n) = n + 1$.

Esercizio 4.3. Prerequisiti:4.3.*Togliendo a turno uno degli assiomi (N1)—(N5), descrivete un insieme che soddisfa gli altri ma non è isomorfo ai naturali.* [1XD]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22V']

§4.a Induzione [27J]

Proposizione 4.a.1 (Principio di induzione). *Sia $A \supseteq \mathbb{N}$ e $P(n)$ una proposizione logica che possa essere valutata per $n \in A$. Supponiamo siano soddisfatte le due seguenti ipotesi:* [1XC]

- *$P(n)$ è vera per $n = 0$ e*
- *$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(S(n))$;*

allora P è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Sia $U = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$ sappiamo che $0 \in U$ e che $\forall x, x \in U \Rightarrow S(x) \in U$, allora da (N5) si conclude $U = \mathbb{N}$. □

La verifica di $P(0)$ è detta "base dell'induzione", mentre la verifica $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(S(n))$ è detta "passo induttivo" (in cui $P(n)$ viene presa come ipotesi, e viene detta "ipotesi induttiva").

Esercizi

E4.a.2 Dimostrate che $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq S(n)$. [1XF]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1XJ']*

E4.a.3 Dimostrate [†37] per induzione le seguenti asserzioni: [1XG]

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$;
5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$;
6. $n! \geq 2^{n-1}$;
7. Se $x > -1$ è un numero reale e $n \in \mathbb{N}$ allora $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (diseguaglianza di Bernoulli).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1XK']*

§4.b Definizione per ricorrenza [274]

Teorema 4.b.1. [08Z]

Sia A un insieme non vuoto; sia $a \in A$ fissato, siano date funzioni $g_n : A \to A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste ed è unica la funzione $f : \mathbb{N} \to A$ tale che

- *$f(0) = a$, e*

[†36] Stiamo usando la stessa parola *successore* usata per la definizione 3.i.7 per gli insiemi bene ordinati, e in 3.h.1 nella teoria di Zermelo-Fraenkel: vedremo che infatti le definizioni sono compatibili.

[†37] Nei successivi esercizi diamo per buona la conoscenza delle operazioni tipiche dei numeri naturali, e della loro relazione d'ordine.

- *per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(S(n)) = g_n(f(n))$.*

Si dice che la funzione f è ***definita per ricorrenza*** *dalle due precedenti condizioni.*

Dimostrazione. Traccia della dimostrazione. Notate che la dimostrazione usa solo gli assiomi di Peano e il principio di induzione. Dato $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$ ricordiamo che $S^{-1}(m)$ è il precedessore, si veda 4.2 (usando l'aritmetica potremmo scrivere [090]

$$S^{-1}(m) = m - 1 \ , \ S(k) = k + 1$$

ma questo teorema è usato nel definire l'aritmetica...) Data una qualunque $R \subseteq \mathbb{N} \times A$ definiamo la proiezione sulla prima componente

$$\pi(R) = \{n \in \mathbb{N}, \exists x \in A, (n, x) \in R\} \ .$$

Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ delle relazioni $R \subseteq \mathbb{N} \times A$ che soddisfano

$$(0, a) \in R \tag{*}$$

$$\forall n \geq 0, \forall y \in A, \ \ (n, y) \in R \Rightarrow (S(n), g_n(y)) \in R \tag{**}$$

Mostriamo che sotto queste condizioni $\pi(R) = \mathbb{N}$; sappiamo che $0 \in \pi(R)$; se $m \in \pi(R)$, allora esiste $x \in A$ per cui $(m, x) \in R$ ma allora da ** segue che $(S(m), g_m(x)) \in R$, e otteniamo $S(m) \in \pi(R)$.

La famiglia $\mathcal{F}$ è non vuota perché $\mathbb{N} \times A \in \mathcal{F}$. Sia poi T l'intersezione di tutte le relazioni in $\mathcal{F}$. T è dunque la minima relazione in $\mathcal{F}$.

Si può verificare che T soddisfa le precedenti proprietà * e **. In particolare $\pi(T) = \mathbb{N}$.

Dobbiamo ora mostrare che T è il grafico di una funzione (che è la funzione f desiderata), cioè che per ogni n esiste un unico $x \in A$ per cui $(n, x) \in T$.

Sia $A_n = \{x \in A, (n, x) \in T\}$; scriviamo $|A_n|$ per indicare il numero di elementi in $|A_n|$; siccome $\pi(T) = \mathbb{N}$ allora $|A_n| \geq 1$ per ogni n. Mostreremo che $|A_n| = 1$ per ogni n. Lo dimostreremo per induzione. Sia

$$P(n) \doteq |A_n| = 1 \quad .$$

Verifichiamo il passo induttivo.

Supponiamo per assurdo che $|A_m| = 1$ ma $|A_{Sm}| \geq 2$; moralmente in m il grafico della f "biforca" e la funzione diventa "multivoca". Definiamo per comodità $w = g_m(x), k = Sm$; potremmo togliere alcuni elementi a T (quelli che non hanno un "predecessore" secondo la relazione **) definendo

$$\tilde{T} = T \setminus \{(k, y) \ : \ y \in A, y \neq w\}$$

si mostra che $\tilde{T}$ soddisfa * e **, ma $\tilde{T}$ sarebbe più piccola di T, contro la minimalità di T. Per provare che $P(0)$, si definisce $k = 0, w = a$ e si procede allo stesso modo.

Il precente ragionamento mostra anche che la funzione è unica, perché se il grafico G di una qualsiasi funzione soddisfacente a * e ** deve contenere T, allora $T = G$. $\square$

Più in generale date $g_n : A^{n+1} \to A$, si mostra che esiste ed è unica la funzione $f : \mathbb{N} \to A$ tale che $f(0) = a$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(S(n)) = g_n(f(0), f(1), \dots f(n))$.

Esercizi

E4.b.2 Prerequisiti:4.b.1.Adattate l'esercizio 4.b.1 per definire la *successione di Fibonacci*, che soddisfa alla regola [1X7]

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

per $n \ge 2$.

Sugg. Non dovete riscrivere tutta la dimostrazione di 4.b.1, piuttosto scegliete $A = \mathbb{N}^2$ e scegliete g con astuzia.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1X8']*

E4.b.3 Definite l'intervallo di numeri naturali [294]

$$I_n = \{0, \dots n\}$$

usando una definizione ricorsiva (senza fare uso di una relazione d'ordine)

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '295']*

§4.c Aritmetica [0NN]

Definiremo l'operazione di addizione fra numeri naturali, formalmente

$$\cdot + \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad , \quad (h, k) \mapsto h + k \quad .$$

Definizione 4.c.1. *Fissato il parametro $h \in \mathbb{N}$ cominciamo col definire l'operazione $h + \cdot$ che sarà una funzione $f_h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data da $f_h(n) = h + n$; per la definizione ricorsiva vorremo esprimere le regole* [292]

- $h + 0 = h \quad ,$
- $\forall n \in \mathbb{N}, h + S(n) = S(h + n) \quad .$

A questo scopo, poniamo $A = \mathbb{N}$, e $g(n, a) = S(a)$, riscriviamo le precedenti come regole ricorsive per f_h

- $f_h(0) = h \quad ,$
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_h(S(n)) = g(n, f_h(n)) = S(f_h(n)) \quad .$

questo definisce ricorsivamente f_h. Considerando poi il parametro h come una variabile, abbiamo costruito l'operazione di addizione, e definiamo l'operazione "+" fra naturali come $h + n = f_h(n)$.

Questa operazione è commutativa e associativa, come mostrato sotto.
Notiamo che $h + 0 = f_h(0) = h$ (base della ricorsione); inoltre $0 + n = f_0(n) = n$ (si mostra facilmente per induzione).
Per dimostrare che è commutativa, mostriamo innanzitutto che

Lemma 4.c.2. $\forall n, h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(n) = S(f_h(n))$ [27N]

(Svolto il 2022-11-03)

Dimostrazione. Ricordiamo che $S(f_h(n)) = f_h(S(n))$ per definizione ricorsiva; consideriamo

$$P(n) \doteq \forall h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(n) = S(f_h(n)) \quad ;$$

$P(0)$ è la proposizione

$$\forall h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(0) = S(f_h(0)) = S(h)$$

che è vera perché è il valore iniziale della definizione ricorsiva di $f_{S(h)}$ e di f_h; per il passo induttivo assumiamo che $P(n)$ sia vera e studiamo $P(S(n))$ al cui interno possiamo dire

$$f_{S(h)}(S(n)) \overset{(1)}{=} S(f_{S(h)}(n)) \overset{(2)}{=}$$
$$SS(f_h(n)) \overset{(3)}{=} S(f_h(S(n)))$$

dove in (1) abbiamo usato la definizione ricorsiva di f_h con $S(h)$ invece di h, in (2) abbiamo usato la ipotesi induttiva, e in (3) la definizione ricorsiva di f_h; e questo completa il passo induttivo.

(Notate come nel primo passaggio è importante che nella definizione di $P(n)$ vi sia $\forall h \in \mathbb{N}, \ldots$). □

Proposizione 4.c.3. (Replaces 27Y) *L'addizione è commutativa.* [27P]

Dimostrazione. Per il lemma possiamo scrivere

$$S(h) + n = S(h + n) = h + S(n) \tag{4.c.4}$$

intuitivamente la formula è simmetrica e dunque anche la definizione di addizione deve avere una simmetria. Precisamente, sia $\tilde{f}_n(h) \overset{\text{def}}{=} f_h(n)$ allora $\tilde{f}_n(0) = n$ (come già notato) e per il lemma 4.c.2 $\tilde{f}_n(S(h)) = S\left(\tilde{f}_n(h)\right)$ ma allora $\tilde{f}$ soddisfa la stessa relazione ricorsiva di f e dunque sono identiche, così $f_h(n) = f_n(h)$. (L'idea è che se avessimo definito la addizione ricorsivamente partendo da sinistro invece che da destra, avremmo raggiunto lo stesso risultato). □

A questo punto possiamo dare un nome a $1 = S(0)$ e notare che $S(n) = n + 1$. Dunque da ora in poi potremmo fare a meno del simbolo S.

Con simili procedure si dimostra che l'addizione è associativa.

Proposizione 4.c.5. *L'addizione è associativa.* [27Q]

Dimostrazione. Consideriamo

$$P(h) \doteq \forall n, m \in \mathbb{N}, (n + m) + h = n + (m + h) \quad ;$$

ovviamente $P(0)$ è vera, inoltre $P(Sh)$ si dimostra (omettendo "$\forall n, m \in \mathbb{N}$") così

$$(n + m) + Sh = S(n + m) + h = (Sn + m) + h \overset{P(n)}{=}$$
$$= Sn + (m + h) = n + S(m + h) = n + (m + Sh) \; \square$$

Analogamente si definisce la moltiplicazione.

Definizione 4.c.6. *Si fissa il parametro m, e si definisce ricorsivamente $(m \times \cdot)$ tramite* [28V] *(Svolto il 2022-11-03)*

- $m \times 0 = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, m \times (n+1) = m \times n + m$;

poi si possono dimostrare le note proprietà (commutatività, associatività, distributività).

Esercizi

E4.c.7 Riscrivete alcune nozioni viste prima, quale il principio di induzione, e la definizione dell'addizione, usando $n+1$ invece di $S(n)$. [27R]

E4.c.8 Mostrate che la funzione $f_h(n) = (h+n)$ è iniettiva. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '27T']* [27S] *(Svolto il 2022-11-03)*

E4.c.9 Dimostrate la *proprietà di eliminazione*: se $n+h = m+h$ allora $n = m$. [27V]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '286']*

E4.c.10 Si ha $n+m = 0$ se e solo se $n = 0 \wedge m = 0$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '285']* [27W] *(Svolto il 2022-11-03)*

E4.c.11 Si ha $n \times m = 0$ se e solo se $n = 0 \vee m = 0$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '284']* [27X] *(Svolto il 2022-11-03)*

E4.c.12 Dimostrate che la moltiplicazione è commutativa. Sugg. dimostrate per induzione in n [28T]

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, (m+1) \times n = m \times n + n \quad ,$$

dopodiché ragionate come in Prop. 4.c.3. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '28W']*

E4.c.13 Dimostrate che l'addizione distribuisce rispetto alla moltiplicazione. Sugg. dimostrate per induzione in h [281]

$$\forall m, n, h \in \mathbb{N}, \ m \times (n+h) = m \times n + m \times h \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '28Y']*

E4.c.14 `Prerequisiti:4.c.13.`Dimostrate che la moltiplicazione è associativa. Sugg. dimostrate per induzione in n [27Z]

$$\forall m, n, h \in \mathbb{N}, (m \times n) \times h = m \times (n \times h) \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '28X']*

E4.c.15 Dati $n \neq 0$ e $h \in \mathbb{N}$ scrivete una definizione ricorsiva dell'elevamento a potenza n^h; indi dimostrate che $n^{h+k} = n^n n^k$ e $(n^h)^k = n^{(hk)}$. [280]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '2DG']*

Nel seguito scriveremo semplicemente nm invece di $n \times m$.

§4.d Ordinamento [27K]

Ipotesi 4.d.1. *Studieremo una relazione d'ordine (possibilmente parziale) $\le$ su $\mathbb{N}$ tale che* [26H]

$$\forall x \in \mathbb{N}, (0 \le x) \quad , \tag{4.d.2}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x < Sy) \iff (x \le y) \quad ; \tag{4.d.3}$$

dove (come al solito)

$$x < y \doteq (x \le y) \wedge (x \ne y) \quad .$$

Teorema 4.d.4. *Vi è una unica relazione d'ordine $\le$ su $\mathbb{N}$ tale che* (4.d.3),(4.d.2) *in* 4.d.1 *valgano, e questo è un buon ordinamento.* [26Y]

Questo teorema sarà dimostrato in seguito: unicità in 4.d.5, buon ordinamento in 4.f.6. L'esistenza di una tale relazione deriva dal modello Z-F, come visto in precedenza e ricapitolato in Sezione §4.e; oppure l'ordinamento si può definire usando l'aritmetica, come mostrato in Sezione §4.d.a.

Esercizi

E4.d.5 Supponiamo che $\le$ sia una relazione di ordine (possibilmente parziale) su $\mathbb{N}$ soddisfacente (4.d.3),(4.d.2) in 4.d.1 allora $\le$ è unico. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '270']* [267]

E4.d.6 Sia [271]

$$P_x = \{z \in \mathbb{N}, z < x\}$$

mostrate che

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \ , \ P_x = P_y \Rightarrow x = y$$

usando le proprietà nell'Ipotesi 4.d.1.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '272']*

(Notate la somiglianza con 3.h.40).

E4.d.7 Impostando $n = x = y$ in (4.d.3) otteniamo che $n < Sn$. [276]

E4.d.8 Prerequisiti:4.d.7,4.d.1.Usando le proprietà in 4.d.1 e assumendo che $\le$ sia una relazione d'ordine totale (come effettivamente dimostreremo), mostrate che [277]

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (n < m) \Rightarrow (Sn < Sm) \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '278']*

E4.d.9 Se $\preceq$ è un ordinamento totale su $\mathbb{N}$ allora sono equivalenti [26X]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \preceq y \preceq Sx) \Rightarrow (x = y \vee y = Sx) \quad , \tag{4.d.10}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \prec Sy) \iff (x \preceq y) \quad ; \quad \text{(come in (4.d.3))}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \prec y) \iff (Sx \preceq y) \quad . \tag{4.d.11}$$

Notate l'analogia con 3.h.5

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '296']*

§4.d.a Ordinamento dall'aritmetica [287]

Avendo già definito l'aritmetica, una definizione comoda di ordinamento è come segue.

Definizione 4.d.12. *Dati $n, m \in \mathbb{N}$, si dirà che $n \leq m$ se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $n + k = m$* [288]

Mostreremo che $\leq$ è una relazione di ordine totale, che è un buon ordinamento. Vediamo innanzitutto alcune proprietà elementari ma fondamentali.

Lemma 4.d.13. *Siano $n, m, k \in \mathbb{N}$.* [289]

1. *Per ogni n si ha $0 \leq n$*
2. *$n \leq m$ se e solo se $n < S(m)$.*
   Notate che questi due punti soddisfano (4.d.3),(4.d.2) in 4.d.1
3. *Per ogni n si ha $n < S(n)$*
4. *$n < m$ se e solo se $S(n) \leq m$.*
5. *Se $n \leq m \leq S(n)$ allora $m = n$ oppure $m = S(n)$.*

Le dimostrazioni sono lasciate per esercizio 4.d.18. (Una volta dimostrato che la relazione è totale, allora per 4.d.9 le ultime due sono equivalenti).

Proposizione 4.d.14. *$\leq$ è una relazione di ordine.* [28B]

Dimostrazione. Proprietà riflessiva: $n+0 = n$. Proprietà antisimmetrica: se $n+k = m$ e $m + h = n$ allora $n + k + h = n$ dunque per eliminazione 4.c.9 $h + k = 0$, e per 4.c.10 $h = k = 0$ così $n = m$. Proprietà transitiva: se $n + k = m$ e $m + h = p$ allora $n + k + h = p$. □

Dunque questa relazione "$\leq$" definita in 4.d.12 soddisfa la regola 4.d.1; mostreremo che ogni tale ordinamento è un buon ordinamento; qui presentiamo comunque una dimostrazione per questo caso particolare. [298]

Proposizione 4.d.15. *$\leq$ è una relazione di ordine totale.* [28Z]

Dimostrazione. Si considera la proposizione

$$P(n) \doteq \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m \vee m \leq n$$

Si ha che $P(0)$ è vera. Diamo per vera $P(n)$; prendiamo un m;

- se $m \leq n$ allora $m \leq S(n)$ per il lemma (punto 2), così $P(Sn)$ vale;
- se $\neg m \leq n$ ma $P(n)$ vale, allora $n \leq m$, ma non potendo essere $n = m$, si ottiene $n < m$, che comporta $S(n) \leq m$ per il lemma (punto 4);

in ogni caso $P(S(n))$ è dimostrata partendo da $P(n)$. □

Proposizione 4.d.16. *$\leq$ è un buon ordinamento.* [297]

Dimostrazione. Traccia della dimostrazione. Per il Lemma 4.d.13 (punto (2)) sappiamo che questo ordinamento soddisfa il principio forte di induzione 4.f.2; così possiamo provare (come in Esercizio 4.f.5) che ogni sottoinsieme non vuoto ha un elemento minimale; ma sappiamo che l'ordinamento è totale, dunque l'elemento minimale è il minimo. □

Definizione 4.d.17 (Sottrazione)**.** *Se $m \geq n$, esiste ed è unico h tale che $m = n + h$ (l'unicità segue da 4.c.9); indicheremo questo h come $m - n$.* [28C]

Esercizi

E4.d.18 Mostrate le proprietà in 4.d.13. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '28F']* [28D]

E4.d.19 Mostrate che se $n \leq m$ allora $m - n \leq m$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '28H']* [28G]

E4.d.20 Mostrate che se $n \neq 0$ allora $n \times m \geq m$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '28P']* [28N]

E4.d.21 `Argomenti:Divisione con resto.` [28J]

Dimostrate che, dati $d, n \in \mathbb{N}, d \geq 1$ esistono e sono unici due numeri $q, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < d$ per cui $n = q \times d + r$ (dove n è il "dividendo" d è il "divisore" , q è il "quoziente" e r è il "resto") *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '28K']*

E4.d.22 *(Replaces 282)* [28M]

Sia $h \neq 0$, dimostrate che se $n \times h = m \times h$ allora $n = m$. *(Sugg. usate la sottrazione)*

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '28S']*

In particolare la mappa $n \mapsto n \times h$ è iniettiva.

§4.d.b Ordinamento e aritmetica [28Q]

L'ordinamento è compatibile con l'aritmetica.

Proposizione 4.d.23. [28R]

- (Compatibilità di addizione e ordinamento) *Si ha $n \leq m$ se e solo se $n+k \leq m+k$.*
- (Compatibilità di moltiplicazione e ordinamento) *Quando $k \neq 0$ si ha $n \leq m$ se e solo se $n \times k \leq m \times k$.*

In particolare (ricordando 4.d.22) la mappa $n \mapsto n \times h$ è strettamente crescente (e dunque iniettiva).

Dimostrazione. Useremo alcune proprietà lasciate per esercizio.

- Se $n \leq m$, per definizione $m = n + h$, allora $n + k \leq m + k$ in quanto $m + k = n + h + k$ (notate che stiamo usando l'associatività). Se $n + k \leq m + k$ sia allora j l'unico naturale tale che $n + k + j = m + k$ ma allora $n + j = m$ per eliminazione 4.c.9.

- Se $n \leq m$ allora $m = n + h$ dunque $m \times k = n \times k + h \times k$ così $n \times k \leq m \times k$. Viceversa sia $k \neq 0$ e sia $n \times k \leq m \times k$ cioè $n \times k + j = m \times k$: dividiamo j per k usando la divisione con resto 4.d.21, scriviamo $j = q \times k + r$ dunque per associatività $(n + q) \times k + r = m \times k$, ma per unicità della divisione con resto $r = 0$: infine raccogliendo $(n + q) \times k = m \times k$ e usando 4.d.22 concludiamo che $(n + q) = m$.

□

§4.e Compatibilità Z-F e Peano [26F]

Torniamo ora al modello $\mathbb{N}_{ZF}$ di $\mathbb{N}$ costruito appoggiandosi alla teoria di Zermelo—Fraenkel, visto in Sez. §3.h. Vogliamo vedere che questo modello soddisfa gli assiomi di Peano.

Ricordiamo che, dato x (qualunque, non necessariamente numero naturale) si definisce il successore come

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \cup \{x\} \quad .$$

È facile vedere che **N1** e **N3** sono vere. La proprietà **N5** segue dal fatto che $\mathbb{N}_{ZF}$ è il più piccolo insieme S-saturo. **N2** e **N4** derivano da 3.h.8.

Abbiamo inoltre visto nel Teorema 3.h.16 che la relazione $\subseteq$ soddisfa i requisiti delle Ipotesi 4.d.1.

§4.f Induzione generalizzata, buon ordinamento [27M]

Proposizione 4.f.1 (Induzione generalizzata)**.** *Sia $N \in \mathbb{N}$, sia $P(n)$ una proposizione logica vera per $n = N$ e tale che* [1XR]

$$\forall n \geq N, P(n) \Rightarrow P(S(n)) \quad ,$$

allora P è vera per ogni $n \geq N$.

Presentiamo adesso il principio di induzione forte.

Proposizione 4.f.2 (Induzione forte)**.** *Assumiamo che un ordinamento (parziale) associato a $\mathbb{N}$ soddisfi 4.d.1. Sia $P(n)$ una proposizione logica vera per $n = 0$ e tale che* [1XS]

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Big(\big(\forall k \leq n, P(k) \big) \Rightarrow P(Sn) \Big) \tag{4.f.3}$$

allora P è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Questo principio è apparentemente più forte di quello usuale; ma vedremo che è in effetti equivalente.

Anche questo risultato si può generalizzare richiedendo che $P(N)$ sia vera, e scrivendo l'ipotesi induttiva nella forma "$\forall k, N \leq k \leq n, P(k)$": si otterrà che $P(n)$ è vera per $n \geq N$.

Si noti che il principio di buon ordinamento è in un qualche senso equivalente al principio di induzione; si veda 4.f.8.

Esercizi

E4.f.4 Prerequisiti:4.d.1,4.a.1.Difficoltà:*. [1XN]

Usate il principio di induzione 4.a.1 per dimostrare il principio di induzione forte 4.f.2

Attenzione: usate le proprietà nell'Ipotesi 4.d.1, ma non assumete che $\le$ sia un ordinamento totale: infatti useremo questo risultato per dimostrarlo.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1XQ']*

E4.f.5 Prerequisiti:4.d.1,4.f.2.Difficoltà:*. [1XP]

Assumiamo che un ordinamento (parziale) $\le$ associato a $\mathbb{N}$ soddisfi 4.d.1. Usate il principio di induzione forte 4.f.2 per mostrare che ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto ha un elemento minimale, cioè

$$\exists a \in A\ ,\ \forall b \in A\ ,\ \neg(b < a) \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1XZ']*

E4.f.6 Prerequisiti:4.d.6,4.f.5,3.i.6.Usate i prerequisiti per mostrare che $(\mathbb{N}, \le)$ è ben ordinato. [273]

E4.f.7 Prerequisiti:4.f.2.Usate l'induzione forte per dimostrare che ogni $n \ge 2$ si fattorizza nel prodotto di numeri primi. [1XT]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1XV']*

E4.f.8 Difficoltà:*. Sia A un insieme bene ordinato [†38] dall'ordinamento $\le$; sia $m = \min A$; allora per proposizioni $P(a)$ con $a \in A$ si può usare un metodo di dimostrazione, detto *induzione transfinita*, in cui [1XY]

- si richiede che $P(m)$ sia vera, e
- si dimostra il "passo induttivo"

$$\forall n \in \mathbb{N}\Big(\big(\forall k < n, P(k)\big) \Rightarrow P(n)\Big)$$

Si dimostri che se la proposizione P soddisfa le due precedenti, allora $\forall x \in A, P(x)$.

Si dimostri inoltre che se $A = \mathbb{N}$ allora il "passo induttivo" è equivalente al passo induttivo della induzione forte (definita in 4.f.2).

Altri esercizi che usano l'induzione sono: 9.a.9

§4.g Frequentemente, definitivamente [26G]

Siano $\mathbb{N}$ i numeri naturali.

Definizione 4.g.1 (frequentemente, definitivamente). *Sia* P(n) *una proposizione logica che dipende da una variabile libera $n \in \mathbb{N}$. Diremo che* [018] *(Svolto il 2022-10-27)*

P(n) *vale definitivamente in n se*	$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ *con* $n \ge m$ *vale* P(n) *;*
P(n) *vale frequentemente in n se*	$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ *con* $n \ge m$ *per cui* P(n) *vale.*

[†38] Come definito in 3.i.1.

Questa definizione è equivalente alla definizione 6.b.2 per variabile reale $x \to \infty$; si può ulteriormente generalizzare, come visto in 3.d.28.

Nota 4.g.2. *In Inglese si può tradurre* frequentemente *come* frequently *e* definitivamente *come* eventually*; ma questi termini non sono molto usati.*[†39] [23Q]

Esercizi

E4.g.3 Notate che «*P(n)* vale definitivamente in *n*» implica «*P(n)* vale frequentemente in *n*». [019]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '01B']*

E4.g.4 Notate che «(non *P(n)*) vale frequentemente in *n*» se e solo se «non (*P(n)* vale definitivamente in *n*)». [01C]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '01D']*

E4.g.5 Notate che «*P(n)* vale frequentemente in *n*» se e solo se «*P(n)* vale per un numero infinito di *n*». [01F]

(Questa equivalenza non è vera in un qualunque insieme ordinato. Si veda invece 3.d.29 per la corretta formulazione).

E4.g.6 Siano ora $P(n), Q(n)$ due proposizioni. [01G] *(Svolto il 2022-10-27// in parte)*

- Dite quali implicazioni vi sono fra
  - "$(P(n) \wedge Q(n))$ vale definitivamente" e
  - "$P(n)$ vale definitivamente e $Q(n)$ vale definitivamente".
- Similmente per le proposizioni
  - "$(P(n) \vee Q(n))$ vale definitivamente" e
  - "$P(n)$ vale definitivamente oppure $Q(n)$ vale definitivamente".

Formulate inoltre simili risultati per la nozione di "frequentemente".

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '01H']*

E4.g.7 Siano $P(n), Q(n)$ due proposizioni. Se *"$P(n)$ vale definitivamente* e *$Q(n)$ vale frequentemente"* allora "$(P(n) \wedge Q(n))$ *vale frequentemente"*. [29G]

[†39] Con alcune importanti eccezioni, come ad esempio [15]

§5 Gruppi, Anelli, Campi [1ZD]

Vediamo brevemente queste definizioni.

Definizione 5.1. *Un **gruppo** è un insieme G munito di una operazione binaria $*$, che ad ogni coppia $a, b \in G$ associa un elemento $a * b \in G$, rispettando le seguenti proprietà* [1ZF] (Svolto il 2022-11-15)

1. *proprietà associativa: dati $a, b, c \in G$ vale $(a * b) * c = a * (b * c)$.*
2. *esistenza dell'elemento neutro: un elemento indicato con e tale che $a*e = e*a = a$.*
3. *Esistenza dell'inverso: ad ogni elemento $a \in G$ è associato un elemento **inverso** a', tale che $a * a' = a' * a = e$. L'inverso dell'elemento a è spesso indicato con a^{-1} (o $-a$ se il gruppo è commutativo).* †40

*Un gruppo si dice **commutativo** (o abeliano) se vale anche $a*b = b*a$ per ogni coppia $a, b \in G$.*

Definizione 5.2. *Un **anello** è un insieme A dotato di due operazioni binarie* [1ZG] (Svolto il 2022-11-15)

- *$+$ (detta somma o addizione) e*
- *$\cdot$ (detta "moltiplicazione", indicata anche con il simbolo $\times$ o $*$, e spesso omesso),*

tale che

- *A con $+$ è un gruppo commutativo (in genere l'elemento neutro si indica con 0);*
- *l'operazione $\cdot$ ha elemento neutro (in genere l'elemento neutro si indica con 1) ed è associativa;*
- *la moltiplicazione distribuisce sull'addizione, sia a sinistra*

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in A$$

  sia a destra

$$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a) \quad \forall a, b, c \in A$$

*Un anello si dice **commutativo** se la moltiplicazione è commutativa. (Nel qual caso si equivalgono le distributività a destra o a sinistra).*

Si assume in genere che $0 \neq 1$ (altrimenti l'insieme $\{0\}$ sarebbe un anello).

Esempi di anelli commutativi sono: gli interi $\mathbb{Z}$, i polinomi $A[x]$ con coefficienti scelti in un anello commutativo A.

Un esempio di anello non commutativo molto usato è dato dalle matrici $\mathbb{R}^{n\times n}$, con la loro usuale operazione di addizione e moltiplicazione.

Definizione 5.3. *Un **campo** F è un anello per cui la moltiplicazione è commutativa, e ogni elemento $x \in F$ con $x \neq 0$ ha un inverso x^{-1} per la moltiplicazione.* [1ZH] (Svolto il 2022-11-15)

(Così $F \setminus \{0\}$ è un gruppo commutativo per la moltiplicazione, si veda 5.13).

Esempi di campi sono: i numeri razionali $\mathbb{Q}$, i numeri reali $\mathbb{R}$ e i numeri complessi $\mathbb{C}$.

Nota 5.4. *In genere*[†41] *si usano le scritture a sinistra al posto delle scritture a destra (dove x, y, z sono nel campo e n è intero positivo)* [20R] *(Svolto il 2022-11-15)*

$$\begin{array}{|c|c|}
x - y & x + (-y) \\
\frac{x}{y} & x \cdot y^{-1} \\
x + y + z & (x + y) + x \\
xyz & (x \cdot y) \cdot z \\
nx & \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ volte}} \\
x^n & \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}} \\
x^{-n} & (x^{-1})^n
\end{array}$$

Precisamente, nx significa "sommare x a se stesso n volte"; l'operazione $n \mapsto n \cdot x$ si può definire ricorsivamente ponendo $0 \cdot x = 0$ e $(n+1) \cdot x = n \cdot x + x$. Similmente x^n significa "moltiplicare x per se stesso n volte": si veda l'esercizio 5.21.

Nota 5.5. *Il teorema di Hurwitz [47] asserisce che se V è un campo ed è anche uno spazio vettoriale reale con un prodotto scalare, allora $V = \mathbb{R}$ oppure $V = \mathbb{C}$.* [1ZW]

Definizione 5.6. *Un **anello ordinato** F è un anello con una relazione d'ordine totale $\leq$ per la quale, per ogni $x, y, z \in F$,* [1ZJ]

- $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;
- $x, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$.

Per via di 5.13, se F è un campo, nella seconda ipotesi potremmo equivalentemente scrivere $x, y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$. (Riguardo alla seconda ipotesi si veda anche 5.14) Per approfondimenti si vedano le referenze in [40]. Assumeremo che in un anello ordinato la moltiplicazione sia commutativa.

Esempi di campi ordinati sono: i numeri razionali $\mathbb{Q}$ i numeri reali $\mathbb{R}$. I numeri complessi $\mathbb{C}$ non ammettono un ordinamento che soddisfi le proprietà sopra viste (esercizio 5.19).

Definizione 5.7. *Un campo ordinato F è **archimedeo** se $\forall x, y \in F$ con $x > 0, y > 0$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ per cui $nx > y$. (Si veda 5.4 per la definizione di nx).* [1ZK]

[†42]

Esercizi

E5.8 L'elemento neutro di un gruppo è unico. *Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1ZN']* [1ZM]

E5.9 In un gruppo, l'inverso di un elemento è unico. *Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1ZQ']* [1ZP]

E5.10 Fissato un elemento $g \in G$ in un gruppo, le mappe $L_g : G \to G$ e $R_g : G \to G$ [29C]

[†40]La notazione a^{-1} è giustificato dal fatto che l'elemento inverso è unico: *cf* 5.9.

[†41]Tratto dal 1.13 in [23]

[†42]Parti dei seguenti esercizi sono tratti da Cap. 2 Sez. 7 in [3], oppure Cap. 1 in [23],

$$L_g(h) = g * h \ , \ R_g(h) = h * g$$

di moltiplicazione a destra e a sinistra sono bigezioni.

E5.11 Provate[†43] che in un gruppo: [1ZR]

1. Se $x + y = x + z$ allora $y = z$.
2. Se $x + y = x$ allora $y = 0$.
3. Se $x + y = 0$ allora $y = -x$.
4. $-(-x) = x$.

E5.12 Provate[†44] che in un anello: [1ZS]

1. $0 \cdot x = 0$
2. $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.
3. $(-x)(-y) = xy$.
4. $(-1)x = -x$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '299']*

E5.13 Considerate la proprietà [203]

$$\forall x, y \in A \ , \ x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

questa può essere falsa in un anello A; gli anelli per cui vale sono detti *domini d'integrità* [38].

Si mostri che un campo F è sempre un dominio di integrità. Conseguentemente $F \setminus \{0\}$ è un gruppo commutativo per la moltiplicazione. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '204']*

E5.14 Supponiamo che in un anello A vi sia un ordinamento totale $\leq$ tale che per ogni $x, y, z \in A$ si ha $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$; allora mostrate che sono equivalenti [1ZT]

- $x \leq y \ \wedge \ 0 \leq z \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z$;
- $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot y \geq 0$.

E5.15 Prerequisiti:3.d.4,5.12,5.14. Provate[†45] che in un anello ordinato F: [1ZV]

1. per ogni $x \in F, x^2 \geq 0$, in particolare $1 = 1^2 > 0$;
2. $x > 0 \Rightarrow -x < 0$
3. $y > x \Rightarrow -y < -x$;
4. $x \leq y \wedge a \leq 0 \Rightarrow a \cdot x \geq a \cdot y$;
5. $x \geq a \wedge y \geq b \Rightarrow x + y \geq a + b$;
6. $x > a \wedge y \geq b \Rightarrow x + y > a + b$;
7. $x \geq a \geq 0 \wedge y \geq b \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq a \cdot b$;

Provate che in un campo ordinato F:

†43[23] Prop. 1.14
†44[23] Prop. 1.16
†45Dal Cap. 2 Sez. 7 in [3], oppure [23] Prop. 1.18

1. $x > a > 0 \wedge y > b \geq 0 \Rightarrow x \cdot y > a \cdot b$;
2. $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$;
3. $y > x > 0 \Rightarrow x^{-1} > y^{-1} > 0$;
4. $x \cdot y > 0$ se e solo se x e y sono concordi (cioè o entrambi > 0 o entrambi < 0);

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '29B']*

E5.16 In un campo ordinato F chiamiamo $P = \{x \in F : x \geq 0\}$ l'insieme dei numeri positivi (o nulli); soddisfa le seguenti proprietà: †46 [1ZX]

- $x, y \in P \Rightarrow x + y, x \cdot y \in P$,
- $P \cap (-P) = \{0\}$ e
- $P \cup (-P) = F$.

viceversa se in un campo F possiamo trovare un insieme $P \subseteq F$ che le soddisfi, allora F è un campo ordinato ponendo $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$.

E5.17 Non tutti i campi sono insiemi infiniti. Considerate $X = \{0, 1\}$ e le operazioni $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ e $1 \cdot 1 = 1$. Verificate che è un campo. Mostrate che non può essere un campo ordinato. [1ZY]

E5.18 Consideriamo l'anello delle matrici $\mathbb{R}^{2\times 2}$ poniamo [1ZZ]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

allora verificate che

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

concludete che l'anello delle matrici non è commutativo.

E5.19 Mostrate che non esiste un ordinamento $\leq$ su $\mathbb{C}$ tale che $(\mathbb{C}, \leq)$ sia un campo ordinato. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '20S']* [08V]

E5.20 Fissiamo $N \geq 2$ intero che non sia un quadrato perfetto. Consideriamo il sottoinsieme F di $\mathbb{R}$ dato dai numeri x che si possono scrivere come $x = a + b\sqrt{N}$, con $a, b \in \mathbb{Q}$; gli associamo le operazioni di $\mathbb{R}$: mostrate che F è un campo. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '201']* [200]

E5.21 Sia F un campo; dati $\alpha \neq 0$ e $h \in \mathbb{N}$ considerate la definizione ricorsiva dell'elevamento a potenza α^h data da $\alpha^0 = 1$ e $\alpha^{(n+1)} = \alpha^n \cdot \alpha$; indi dimostrate che $\alpha^{h+k} = \alpha^h \alpha^k$ e $(\alpha^h)^k = \alpha^{(hk)}$ per ogni $k, h \in \mathbb{N}$. [202]

E5.22 `Prerequisiti:`5.21.Dato $\alpha \neq 0$ in un campo, definite che $\alpha^0 = 1$ e che α^{-n} sia l'inverso moltiplicativo di α^n quando $n \geq 1$ naturale. (Usate 5.21). Per $n, m \in \mathbb{Z}$ mostrate che [20T]

$$\alpha^n \alpha^m = \alpha^{n+m} \quad , \quad (\alpha^h)^k = \alpha^{(hk)} \quad ;$$

se il campo è ordinato e $\alpha > 1$ mostrate che $n \mapsto \alpha^n$ è strettamente monotona crescente.

E5.23 Sia F un anello commutativo, $a, b \in F$, $n \in \mathbb{N}$ allora [205]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

in cui il fattore

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

si chiama *"coefficiente binomiale"*. (Questo risultato è noto come il teorema binomiale, formula di Newton, binomio di Newton o sviluppo binomiale). Per dimostrarlo per induzione, verificate che

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

per $0 \leq k, k+1 \leq n$.

†46 Dal Cap. 2 Sec. 7 in [3]

§6 Retta reale [09X]

Indicheremo nel seguito con $\mathbb{R}$ la retta reale, e con $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ la sua estensione. [†47]

Useremo gli *intervalli* (si veda la definizione in 3.d.44).

Nota 6.1. *Dato un insieme $I \subset \mathbb{R}$ vi sono vari modi di dire che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è **monotona**. Elenchiamo innanzitutto i diversi tipi di monotonia* [2DJ]

$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) \le f(y) \tag{6.2}$$
$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) \tag{6.3}$$
$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) \ge f(y) \tag{6.4}$$
$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) > f(y) \tag{6.5}$$

Purtroppo nell'uso comune vi sono diverse e incompatibili convenzioni usate nel nominare le precedenti definizioni. Ecco una tabella, in cui ogni convenzione è una colonna.

(6.2)	*non decrescente*	*crescente*	*debolmente crescente*
(6.3)	*crescente*	*strettamente crescente*	*strettamente crescente*
(6.4)	*non crescente*	*decrescente*	*debolmente decrescente*
(6.5)	*decrescente*	*strettamente decrescente*	*strettamente decrescente*

In questo testo viene usate la convenzione nell' ultima colonna.

(La prima colonna è, a mio parere, problematica. Spesso porta all'uso, purtroppo comune, di frasi come "*f è una funzione non decrescente*" o "*prendiamo una funzione f non decrescente*"; questa può dare adito a confusione: sembra dire che f non soddisfa il requisito di essere decrescente, ma non specifica se è monotona. Chi segue la convenzione in prima colonna (a mio parere) dovrebbe sempre dire anche "monotona").

Esercizi

E6.6 `Prerequisiti:3.d.49.` [09Y]

Si mostri che ogni intervallo I in $\mathbb{R}$ ricade in una delle categorie precedentemente viste in 3.d.45. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '09Z']*

E6.7 `Prerequisiti:5.22.` Sia fissato $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Sappiamo che, per ogni $n \ge 1$ naturale, esiste ed è unico un $\beta > 0$ tale che $\beta^n = \alpha$, e β viene denotato dalla notazione $\sqrt[n]{\alpha}$. (Si veda ad es. la Proposizione 2.6.6 Cap. 2 Sez. 6 degli appunti del corso [3] oppure Teorema 1.21 in [23]). Dato $q \in \mathbb{Q}$, scriviamo $q = n/m$ con $n, m \in \mathbb{Z}, m \ge 1$, definiamo [20V]

$$\alpha^q \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[m]{\alpha^n} \quad .$$

Mostrate che questa definizione non dipende dalla scelta della rappresentazione $q = n/m$; che

$$\alpha^q = \left(\sqrt[m]{\alpha}\right)^n \quad ;$$

che per $p, q \in \mathbb{Q}$

$$\alpha^q \alpha^p = \alpha^{p+q} \quad , \quad (\alpha^p)^q = \alpha^{(pq)} \quad ;$$

mostrate che quando $\alpha > 1$ allora $p \mapsto \alpha^p$ è strettamente monotona crescente.

E6.8 Prerequisiti:6.7.Difficoltà:*.Fissato $\alpha > 1$, definite, per $x \in \mathbb{R}$, [20W]

$$\alpha^x = \sup\{\alpha^p : p \in \mathbb{Q}, p \le x\} \quad ;$$

mostrate che:

- è una buona definizione (cioè che l'insieme a destra è superiormente limitato e non vuoto).
- che se x è razionale allora α^x così definito coincide con la definizione nel precedente esercizio 6.7;
- mostrate che $x \mapsto \alpha^x$ è strettamente crescente.
- Mostrate che
$$\alpha^x \alpha^y = \alpha^{x+y} \quad , \quad (\alpha^x)^y = \alpha^{(xy)} \quad .$$

Si veda anche l'esercizio 14.a.5.

E6.9 Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che [20X]

$$\forall L \in \mathbb{R}, L > b \Rightarrow L > a \quad .$$

Dimostrate che $b \ge a$.

E6.10 Sia fissato $I = \{1, \dots n\}$. Siano dati n punti distinti $y_1, \dots y_n \in \mathbb{R}$; cerchiamo una permutazione $\sigma : I \to I$ per cui le diseguaglianze triangolari fra punti successivi siano uguaglianze cioè [0B0]

$$|y_{\sigma(i+2)} - y_{\sigma(i+1)}| + |y_{\sigma(i+1)} - y_{\sigma(i)}| = |y_{\sigma(i+2)} - y_{\sigma(i)}|$$

per $i = 1, \dots n-2$. Si mostri che ne esistono solo due, le chiamiamo σ_1, σ_2. Suggerimento: mostrate che ogni tale permutazione necessariamente mette i punti "in ordine", cioè si ha

$$\forall i, y_{\sigma_1(i+1)} > y_{\sigma_1(i)} \quad , \quad \forall i, y_{\sigma_2(i+1)} < y_{\sigma_2(i)}$$

(a meno di decidere quale è σ_1 e quale è σ_2).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0B1']

§6.a Intorni [29H]

(Svolto il 2022-11-24)

Gli intorni sono una famiglia di insiemi associata a un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, oppure a $x_0 = \pm\infty$. Gli intorni sono insiemi che contengono un insieme "esempio". Vediamo qui alcune definizioni.

Definizione 6.a.1 (Intorni). *Gli intorni "bucati" di punti $x_0 \in \mathbb{R}$ si dividono in tre classi.* [0B2]

- *Intorni di $x_0 \in \mathbb{R}$, che contengono un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ per un $\delta > 0$;*
- *intorni destri di $x_0 \in \mathbb{R}$, che contengono un insieme del tipo $(x_0, x_0 + \delta)$ per un $\delta > 0$;*

†47 La struttura topologica di $\overline{\mathbb{R}}$ sarà ulteriormente discussa in 8.b.2.

- *intorni sinistri di $x_0 \in \mathbb{R}$, che contengono un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0)$ per un $\delta > 0$;*

in ogni caso gli intorni "bucati" non devono contenere il punto x_0. Gli intorni "pieni" si ottengono aggiungendo x_0. Gli "intorni pieni" sono la base per la topologia standard su $\mathbb{R}$.

Ai precedenti aggiungiamo poi gli intorni di $\pm\infty$:

- *intorni di ∞ , che contengono un insieme del tipo (y, ∞) al variare di $y \in \mathbb{R}$;*
- *intorni di $-\infty$, che contengono un insieme del tipo $(-\infty, y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$;*

in questo caso non distinguiamo intorni "bucati" e intorni "pieni".

(Nella letteratura Inglese gli *intorni bucati* si chiamano "*deleted neighbourhoods*" o "*punctured neighbourhoods*").

Esercizio 6.a.2. Prerequisiti:3.d.13.Difficoltà:*. *Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano $\mathcal{F}$ tutti gli intorni di x_0. Associamo l'ordinamento* [29J] *(Proposto il 2022-11-24)*

$$I, J \in \mathcal{F} \ , I \le J \iff I \supseteq J$$

mostrate che l'ordinamento è filtrante.

(Questo vale sia per intorni "bucati" che "pieni"; sia per "destri" che "sinistri" e "bilaterali").

(Si veda anche 8.15 per un simile enunciato in spazi topologici).

§6.b Frequentemente, definitivamente [29K]

Scriveremo $\overline{\mathbb{R}}$ per $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Definizione 6.b.1 (punto di accumulazione)**.** *Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, un punto $x \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice* punto di accumulazione *per A se ogni intorno "bucato" di x interseca A.* [0BG]

Definizione 6.b.2 (frequentemente, definitivamente)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per I. Sia* P(x) *una proposizione logica che possiamo valutare per $x \in I$. Definiamo che* [0B3]

"P(x) *vale definitivamente per x tendente a x_0" se*	*esiste un intorno U di x_0 $\forall x \in U \cap I$, vale* P(x) ;
"P(x) *vale frequentemente per x tendente a x_0" se*	*per ogni intorno U di x_0 $\exists x \in U \cap I$ per cui* P(x) ;

dove si intende che gli intorni sono "bucati".

Nota 6.b.3. *Come già visto in 4.g.4, anche in questo caso le due seguenti proposizioni sono equivalenti.* [0B4]

- *"non $\Big(P(x)$ vale definitivamente, per x tendente a $x_0 \Big)$",*
- *" $\big($ non $P(x) \big)$ vale frequentemente per x tendente a x_0".*

Nota 6.b.4. *Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ non è punto di accumulazione per I, allora si ha sempre che* "*$P(x)$* vale definitivamente per x tendente a x_0" . [22X]

Proposizione 6.b.5. *Supponiamo per semplicità che $I = \mathbb{R}$. Mettendo insieme le idee precedenti, possiamo scrivere equivalentemente:* [20C]

- *se $x_0 \in \mathbb{R}$,*

$\exists \delta > 0, \forall x \neq x_0, \lvert x - x_0 \rvert < \delta \Rightarrow P(x)$	*$P(x)$ vale definitivamente per x tendente a x_0*
$\forall \delta > 0, \exists x \neq x_0, \lvert x - x_0 \rvert < \delta \wedge P(x)$	*$P(x)$ vale frequentemente per x tendente a x_0*

- *nel caso in cui $x_0 = \infty$*

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x, x > y \Rightarrow P(x)$	*$P(x)$ vale definitivamente per x tendente a ∞*
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x, x > y \wedge P(x)$	*$P(x)$ vale frequentemente per x tendente a ∞*

- *e similmente $x_0 = -\infty$*

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x, x < y \Rightarrow P(x)$	*$P(x)$ vale definitivamente per x tendente a $-\infty$*
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x, x < y \wedge P(x)$	*$P(x)$ vale frequentemente per x tendente a $-\infty$*

§6.c Estremi superiori e inferiori [29M]

Rivediamo preliminarmente le caratterizzazioni degli estremi superiori e inferiori in $\mathbb{R}$, viste in Sez. §3.d.c (o in Cap. 1 Sec. 5 negli appunti [3]). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

Definizione 6.c.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Ricordiamo che **l'estremo superiore** di un insieme A è il minimo dei maggioranti; lo indicheremo con la usuale scrittura $\sup A$. Se A è superiormente limitato allora $\sup A$ è un numero reale; in caso contrario, per convenzione, si pone $\sup A = +\infty$.* [08T]

Proposizione 6.c.2. *Sia dunque $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, sia $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; si possono facilmente dimostrare le seguenti proprietà:* [208] *(Svolto il 2022-11-24)*

$\sup A \le l$	$\forall x \in A, x \le l$
$\sup A > l$	$\exists x \in A, x > l$
$\sup A < l$	$\exists h < l, \forall x \in A, x \le h$
$\sup A \ge l$	$\forall h < l, \exists x \in A, x > h$

la prima e la terza derivano dalla definizione di estremo superiore, [†48] *la seconda e la quarta per negazione; nella terza si può concludere equivalentemente che $x < h$, e nella quarta che $x \ge h$.*

Se $l \neq +\infty$ allora usa anche scrivere (sostituendo $h = l - \varepsilon$)

$\sup A < l$	$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, x \le l - \varepsilon$
$\sup A \ge l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > l - \varepsilon$

Combinando le precedenti, riotteniamo il risultato già visto in 3.d.41

Corollario 6.c.3. *Preso $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, allora $\sup A$ è l'unico numero $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ che soddisfa queste due proprietà* [20K] *(Svolto il 2022-11-24)*

$$\forall x \in A, x \le \alpha$$
$$\forall h < \alpha, \exists x \in A, x > h$$

come già visto in 3.d.41 per il caso più generale di insiemi totalmente ordinati.

[†48] In particolare nella terza si può pensare che $h = \sup A$.

Definizione 6.c.4. *Similmente, dato $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto,* l'estremo inferiore *di A è il massimo dei minoranti; lo indicheremo con la usuale scrittura* $\inf A$. *Se A è inferiormente limitato allora* $\inf A$ *è un numero reale; in caso contrario, per convenzione, si pone* $\inf A = -\infty$. [209]

Nota 6.c.5. *Si noti che se si sostituisce A con* [0B5]
(Proposto il 2022-11-24)

$$-A = \{-x : x \in A\}$$

e l con $-l$, si passa dalle definizioni del sup *a quelle del* inf *(e viceversa).*

Proposizione 6.c.6. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, sia $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; valgono le seguenti proprietà:* [20B]

$\inf A \ge l$	$\forall x \in A, x \ge l$
$\inf A < l$	$\exists x \in A, x < l$
$\inf A > l$	$\exists h > l, \forall x \in A, x \ge h$
$\inf A \le l$	$\forall h > l, \exists x \in A, x < h$

Se $l \neq -\infty$ allora usa anche scrivere (sostituendo $h = l + \varepsilon$)

$\inf A > l$	$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, x \ge l + \varepsilon$
$\inf A \le l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x \le l + \varepsilon$

Corollario 6.c.7. *Preso $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, allora* $\inf A$ *è l'unico numero $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ che soddisfa queste due proprietà* [20M]
(Proposto il 2022-11-24)

$$\forall x \in A, x \ge \alpha$$
$$\forall h > \alpha, \exists x \in A, x < h$$

Spesso le precedenti definizioni e proprietà si usano in questa forma.

Definizione 6.c.8. *Data J famiglia di indici non vuota, sia $a_n \in \mathbb{R}$ per $n \in J$. Si definiscono gli estremi superiori e inferiori come* [20H]
(Svolto il 2022-11-24)

$$\sup_{n \in J} a_n = \sup A \quad , \quad \inf_{n \in J} a_n = \inf A$$

dove $A = \{a_n : n \in J\}$ è l'immagine della successione.

Dato D non vuoto, sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione. Si definiscono gli estremi superiori e inferiori come

$$\sup_{x \in D} f(x) = \sup A \quad , \quad \inf_{x \in D} f(x) = \inf A$$

dove $A = \{f(x) : x \in D\}$ è l'immagine della funzione.

§6.c.a Esercizi

Siano I, J generici insiemi non vuoti. Si vedano le definizioni in Sez. §6.c

Esercizi

E6.c.9 Sia a_n una successione a valori reali, per $n \in I$ un insieme di indici; siano $r > 0, t \in \mathbb{R}, \rho < 0$; mostrate che [0B6]
(Svolto il 2022-11-24)

$$\sup_{n \in I}(a_n + t) = t + \sup_{n \in I} a_n \ , \ \sup_{n \in I}(r a_n) = r \sup_{n \in I} a_n \ , \ \sup_{n \in I}(\rho a_n) = \rho \inf_{n \in I} a_n \ .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '22W']*

E6.c.10 Sia $a_{n,m}$ una successione reali a due indici $n \in I, m \in J$, mostrate che [0B7]

(Svolto il 2022-11-24)

$$\sup_{n\in I, m\in J} a_{n,m} = \sup_{n\in I}\left(\sup_{m\in J} a_{n,m}\right) \ .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0B8']*

E6.c.11 `Prerequisiti:6.c.10,6.c.9`. Siano a_n, b_n successioni reali, per $n \in I$, mostrate che [0B9]

(Svolto il 2022-11-24)

$$\sup_{n,m\in I}(a_n + b_m) = (\sup_{n\in I} a_n) + (\sup_{n\in I} b_n) \ ,$$

ma

$$\sup_{n\in I}(a_n + b_n) \le (\sup_{n\in I} a_n) + (\sup_{n\in I} b_n) \ ;$$

trovate un caso in cui la disuguaglianza è stretta. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0BB']*

E6.c.12 `Prerequisiti:6.c.10`. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e sia [0BC]

$$A \oplus B = \{x + y \ : \ x \in A, y \in B\}$$

la *somma di Minkowski* [†49] dei due insiemi: mostrate che

$$\sup(A \oplus B) = (\sup A) + (\sup B) \ .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0BD']*

E6.c.13 Siano $I_n \subseteq \mathbb{R}$ (per $n \in \mathbb{N}$) intervalli non vuoti chiusi e limitati, tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$: si mostri che $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ è non vuoto. [0BF]

*Questo risultato è noto come **"teorema dell'intersezione di Cantor"** [45]. Si estende a contesti più generali, si vedano 10.j.11 e 8.d.4.*

Se sostituiamo $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Q}$ e assumiamo che $I_n \subseteq \mathbb{Q}$, il risultato vale lo stesso?

E6.c.14 Si studino le equivalenze in proposizione 6.c.2 per il caso in cui $\sup A = +\infty$: cosa dicono le formule a destra? [20P]

(Svolto il 2022-11-24)

E6.c.15 Riscrivete le proprietà della proposizione 6.c.6 per i casi visti in 6.c.8. [20J]

E6.c.16 Calcolate estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi (dove n, m sono interi). [20Y]

(Proposto il 2022-12)

$$\left\{\frac{mn}{m^2+n^2} \ : \ n,m \ge 1\right\} \quad , \quad \left\{\frac{mn}{m+n} \ : \ n,m \ge 1\right\}$$
$$\{2^n + 2^m \ : \ n,m \in \mathbb{N}\} \quad , \quad \{2^n + 2^m \ : \ n,m \in \mathbb{Z}\}$$
$$\left\{\frac{m^2-2}{n} \ : \ n,m \in \mathbb{Z}, n \ne 0\right\} \quad , \quad \left\{\frac{m+1}{m^2} \ : \ m \in \mathbb{Z}, m \ne 0\right\}$$

§6.d Limiti [29N]

Scriveremo $\overline{\mathbb{R}}$ per $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Definizione 6.d.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.* [20D]

L'idea di limite (destro o sinistro o bilaterale) è così espressa.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$	*per ogni intorno V "pieno" di l, esiste intorno U "bucato" di x_0 tale che per ogni $x \in U \cap I$, si ha $f(x) \in V$*

dove l'intorno U sarà destro o sinistro se il limite è destro o sinistro; si può anche dire che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$	*per ogni intorno V "pieno" di l, si ha $f(x) \in V$ definitivamente per x tendente a x_0*

aggiungendo che $x > x_0$ se il limite è destro, oppure $x < x_0$ se il limite è sinistro.

Scriviamo ora esplicitamente queste idee.

Proposizione 6.d.2. *Sia I un insieme, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per I, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione, $l \in \mathbb{R}$.* [0BH]

Mettendo insieme tutte le definizioni viste precedentemente, otteniamo queste definizioni di limite.

Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0 \rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0 \rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0 \rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $l = \pm\infty$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0 \rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0 \rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0 \rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0 \rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0 \rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0 \rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$

Sia $l \in \mathbb{R}$, $x_0 = \pm\infty$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$

Nota 6.d.3. *Si noti che se si sostituisce $f \mapsto -f$, si passa dalle definizioni con $l = \infty$ a quelle del $l = -\infty$ (e viceversa). Un'altra simmetria si ottiene scambiando $x_0 \to -x_0$ e gli intorni destri e sinistri.* [0BJ]

§6.e Limiti superiori e inferiori [29P]

Dalla precedente definizione passiamo alle definizioni di "*limite superiore*" $\limsup$ e "*limite inferiore*" $\liminf$. L'idea è così espressa.

Definizione 6.e.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I, $f : I \to \mathbb{R}$* [20F]

†49 La *somma di Minkowski* ritornerà nella sezione §12.f.

funzione. Si definiscono

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{U \text{ intorno di } x_0} \sup_{x\in U\cap I} f(x) \tag{6.e.2}$$

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{U \text{ intorno di } x_0} \inf_{x\in U\cap I} f(x) \tag{6.e.3}$$

dove il primo "inf" (risp. il "sup") si esegue rispetto alla famiglia di tutti gli intorni U di x_0 (sempre del tipo "col buco"); e gli intorni saranno destri o sinistri se il limite è destro o sinistro.

Nota 6.e.4. *Usando le proprietà di* inf, sup, *otteniamo ad esempio queste caratterizzazioni* [20G] (Svolto il 2022-11-29)

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le l \iff \forall z > l,\ \textit{definitivamente per } x \to x_0, f(x) < z\ ;$$

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \ge l \iff \forall z < l,\ \textit{frequentemente per } x \to x_0, f(x) > z\ ;$$

e così via. (In questa scrittura semplificata, diamo per sottointeso che $x \in I$).

In particolare, ponendo $l = \limsup_{x\to x_0} f(x)$, le precedenti caratterizzano esattamente il "limsup".

Corollario 6.e.5. *Si ha $\alpha = \limsup_{x\to x_0} f(x)$ se e solo se* [20N]

$$\forall z > \alpha,\ \textit{definitivamente per } x \to x_0, f(x) < z\ ;$$

$$\forall z < \alpha,\ \textit{frequentemente per } x \to x_0, f(x) > z\ .$$

Le esplicitiamo ulteriormente in quanto segue. (Si raccomanda di provare a riscrivere autonomamente alcune voci, a titolo di esercizio).

Proposizione 6.e.6. *Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$, dividiamo la definizione in due condizioni:* [†50] [0BK]

$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le l$ $\limsup_{x\to x_0} f(x) \ge l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \ne x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \ne x_0, x \in I, f(x) > l - \varepsilon$
$\limsup_{x\to x_0^+} f(x) \le l$ $\limsup_{x\to x_0^+} f(x) \ge l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I, f(x) > l - \varepsilon$
$\limsup_{x\to x_0^-} f(x) \le l$ $\limsup_{x\to x_0^-} f(x) \ge l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I, f(x) > l - \varepsilon$

[†50] Nelle seguenti tabelle tutte le virgole "," dopo l'ultimo quantificatore devono essere interpretate come congiunzioni "∧", ma sono state scritte come "," per alleggerire la notazione.

$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq l$ $\liminf_{x\to x_0} f(x) \leq l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I, f(x) < l+\varepsilon$
$\liminf_{x\to x_0^+} f(x) \geq l$ $\liminf_{x\to x_0^+} f(x) \leq l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I, f(x) < l+\varepsilon$
$\liminf_{x\to x_0^-} f(x) \geq l$ $\liminf_{x\to x_0^-} f(x) \leq l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I, f(x) < l+\varepsilon$

Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l = \pm\infty$:

$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I, f(x) < z$
$\liminf_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I, f(x) < z$
$\liminf_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I, f(x) < z$

Nel caso $x_0 = \pm\infty$ e $l = \pm\infty$:

$\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\liminf_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) < z$
$\liminf_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) < z$

Nel caso $x_0 = \pm\infty$ e $l \in \mathbb{R}$:

$\limsup_{x\to\infty} f(x) \leq l$ $\limsup_{x\to\infty} f(x) \geq l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < l+\varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) > l-\varepsilon$
$\limsup_{x\to-\infty} f(x) \leq l$ $\limsup_{x\to-\infty} f(x) \geq l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < l+\varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) > l-\varepsilon$
$\liminf_{x\to\infty} f(x) \leq l$ $\liminf_{x\to\infty} f(x) \geq l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) < l+\varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$
$\liminf_{x\to-\infty} f(x) \leq l$ $\liminf_{x\to-\infty} f(x) \geq l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) < l+\varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$

Nota 6.e.7. *Notate che* [OBM]

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

e

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Nota 6.e.8. *Si noti che se si sostituisce $f \mapsto -f$, $l \mapsto -l$, si passa dalle definizioni del* lim sup *a quelle del* lim inf *(e viceversa). Un'altra simmetria si ottiene scambiando $x_0 \to -x_0$ e gli intorni/limiti destri e sinistri.* [OBN]

Esercizi

E6.e.9 Siano $A_1, A_2 \ldots$ insiemi , per $n \in \mathbb{N}$; sia $X = \bigcup_n A_n$. Definiamo la funzione caratteristica $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ come [OBP]

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

Useremo le definizioni $\limsup_n A_n$ e $\liminf_n A_n$ viste in eqn. (3.k.9) e (3.k.10). Si ha

$$\mathbb{1}_{(\limsup_n A_n)} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n} \quad , \tag{6.e.10}$$

$$\mathbb{1}_{(\liminf_n A_n)} = \liminf_n \mathbb{1}_{A_n} \quad . \tag{6.e.11}$$

E6.e.12 Fissiamo una successione a_n a valori reali; consideriamo ora la definizione in 6.e.1 ponendo $I = \mathbb{N}$ e $x_0 = \infty$, in modo che gli intorni di x_0 siano gli insiemi contenenti $[n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} : m \ge n\}$; con questi presupposti mostrate che si ha [OBQ]

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_n \sup_{m\ge n} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\ge n} a_n \quad ,$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_n \inf_{m\ge n} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\ge n} a_n \quad ., \tag{6.e.13}$$

E6.e.14 `Prerequisiti:6.e.1,6.a.2,3.d.13,7.d.4,7.d.9.Difficoltà:*.` [29R]

(Proposto il 2022-11-24)

Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione. Come in 6.a.2 siano $\mathcal{F}$ tutti gli intorni di x_0 con l'ordinamento filtrante

$$U, V \in \mathcal{F} \ , U \le V \iff U \supseteq V \quad .$$

Sia

$$s, i : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \quad , \quad s(U) = \sup_{x\in U\cap I} f(x) \quad , \quad i(U) = \inf_{x\in U\cap I} f(x)$$

notate che sono funzioni monotone, e mostrate che [†51]

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{U\in\mathcal{F}} s(U) = \lim_{U\in\mathcal{F}} s(U) \tag{6.e.15}$$

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{U\in\mathcal{F}} i(U) = \lim_{U\in\mathcal{F}} i(U) \tag{6.e.16}$$

dove i limiti sono definiti in 7.d.4.

E6.e.17 Prerequisiti:6.e.14. [29S]

Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I, e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni. Mostrate che (Svolto il 2022-11-24)

$$\limsup_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) \le \limsup_{x\to x_0} f(x) + \limsup_{x\to x_0} g(x) \quad .$$

E6.e.18 Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione. Siano $r > 0, t \in \mathbb{R}, \rho < 0$; mostrate che [29T]

$$\limsup_{x\to x_0}(f(x) + t) = t + \limsup_{x\to x_0} f(x) \ , \quad \limsup_{x\to x_0}(rf(x)) = r \limsup_{x\to x_0} f(x) \ ,$$
$$\limsup_{x\to x_0}(\rho f(x)) = \rho \liminf_{x\to x_0} f(x) \ .$$

Altri esercizi su limiti di successioni si trovano in Sez. §7.a.

§6.f Approssimazione di numeri irrazionali [29Q]

Nei prossimi esercizi useremo le seguenti definizioni.

Definizione 6.f.1. *Per $x \in \mathbb{R}$ sia $\lfloor x \rfloor$ la parte intera inferiore di x definita da* [0BS]

$$\lfloor x \rfloor \stackrel{def}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$$

(detta in Inglese floor function*).*

Definizione 6.f.2. *$x - \lfloor x \rfloor$ è la parte frazionaria di x.* [0BT]

(Posto $\varphi(x) = x - \lfloor x \rfloor$, notate che $\varphi(3,1415) = 0,1415$ ma $\varphi(-4,222) = 0,778$ perché $\lfloor -4,222 \rfloor = -5$).

Esercizi

E6.f.3 Notate che $k = \lfloor x \rfloor$ è l'unico intero per cui si ha $k \le x < k + 1$ o equivalentemente $0 \le (x - k) < 1$ o equivalentemente $x - 1 < k \le x$. [0BV]

E6.f.4 Prerequisiti:6.f.1.Dati $x \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}, N \ge 2$, si dimostri che almeno un elemento dell'insieme $\{x, 2x, \dots, (N-1)x\}$ dista al massimo $1/N$ da un intero, cioè esistono $n, m \in \mathbb{Z}$ con $1 \le n \le N - 1$ tali che $|nx - m| \le 1/N$. [0BW]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0BX']

E6.f.5 Prerequisiti:6.f.1,6.f.4.Dati $x, b \in \mathbb{R}$ con $x \ne 0$ irrazionale, e $\varepsilon > 0$, si dimostri che esiste un M naturale tale che $Mx - b$ dista al massimo ε da un intero. [0BY]

Sia $\varphi(x) = x - \lfloor x \rfloor$ la parte frazionaria di x, si ha $\varphi(x) \in [0, 1)$. Il risultato precedente implica che la successione $\varphi(nx)$ è densa nell'intervallo $[0, 1]$.

Notate che invece se $x \ne 0$ è razionale cioè $x = n/d$ con n, d interi primi tra loro e $d > 0$, allora la successione $\varphi(nx)$ assume tutti e soli i valori $\{0, 1/d, 2/d, \dots (d - 1)/d\}$.

(Questo si dimostra con il Lemma di Bézout [39]).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0BZ']

E6.f.6 Prerequisiti:6.f.4. *(Teorema di approssimazione di Dirichlet)* Dato un numero irrazionale x, si dimostri che esistono infiniti razionali α tali che si può rappresentare $\alpha = m/n$ in modo da soddisfare la relazione [0C1]

$$\left|x - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2} \quad .$$

Alcuni commenti.

- Si noti per ogni fissato $n \geq 2$ esiste al più un m per cui la precedente relazione vale; ma potrebbe non esisterne uno.
- Si noti che se la relazione vale per un α razionale, vi sono solo finite scelte di rappresentazioni per cui vale,
- e sicuramente vale per la scrittura "canonica" con n, m primi fra loro.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0C2']

Notate che il teorema di Hurwitz [37] dice che per ogni irrazionale ξ esistono infiniti $m, n \in \mathbb{Z}$ coprimi per cui [2B0]

$$\left|\xi - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, n^2}.$$

E6.f.7 Fissati $k > 0$, $\varepsilon > 0$ e un numero razionale x, si dimostri che esistono solo finiti razionali α tali che si può rappresentare $\alpha = m/n$ in modo da soddisfare la relazione [0C3]

$$\left|x - \frac{m}{n}\right| \leq \frac{k}{n^{1+\varepsilon}} \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0C4']

E6.f.8 Dimostrare che per ogni razionale m/n si ha [0C5]

$$\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{4n^2}.$$

Si ottiene che l'insieme $A = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2}\right)$ è un aperto che contiene ogni numero razionale, ma $A \neq \mathbb{R}$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0C6']

§6.g Algebrici

Definizione 6.g.1. *Un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ è detto* algebrico *se esiste un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con coefficienti razionali tale che $p(\alpha) = 0$. In caso contrario α è detto* trascendente. [0C7]

Notiamo che ogni $\alpha = n/m$ razionale è algebrico, in quanto radice di $p(x) = mx - n$.

Definizione 6.g.2. *Dato un anello commutativo A, l'insieme dei polinomi $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con coefficienti $a_i \in A$ è usualmente denotato da $A[x]$; questo insieme, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi, è un anello commutativo.* [0C8]

Vogliamo mostrare che i numeri algebrici sono un campo.

†51 *cf* 6.e.2, (6.e.3).

Esercizi

E6.g.3 Dato $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, si costruisca un $q \in \mathbb{Z}[z]$ tale che $q(\alpha) = 0$. [0C9]

Dunque la definizione di *algebrico* si può dare equivalentemente con i polinomi a coefficienti interi.

E6.g.4 Dato $\alpha \neq 0$ e $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, si costruisca un $q \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $q(1/\alpha) = 0$. [0CB]

Dunque se $\alpha \neq 0$ è algebrico allora $1/\alpha$ è algebrico.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0BR']*

E6.g.5 Dato $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, dato $b \in \mathbb{Q}$ si costruisca un $q \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $q(b\alpha) = 0$. [0CC]

Dunque se α è algebrico allora $b\alpha$ è algebrico.

E6.g.6 Dato $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, dato $b \in \mathbb{Q}$ si costruisca un $q \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $q(b + \alpha) = 0$. [0CD]

Dunque se α è algebrico allora $b + \alpha$ è algebrico.

E6.g.7 Difficoltà:*.Più in generale, dati $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, $q \in \mathbb{Q}[z]$, e date α, β tali che $p(\alpha) = 0 = q(\beta)$, si costruisca un polinomio $r \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $r(\alpha + \beta) = 0$. [0CF]

(Sugg. si usi la teoria del risultante [48]).

Dunque se α, β sono algebrici allora $\alpha + \beta$ è algebrico.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0CG']*

E6.g.8 Si mostri che se α è algebrico allora α^2 è algebrico. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0CJ']* [0CH]

E6.g.9 Se α, β sono algebrici si mostri che $\alpha\beta$ è algebrico. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0CM']* [0CK]

Quanto sopra dimostra che i numeri algebrici sono un campo.

§7 Successioni e serie [OCN]

§7.a Successioni

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una successione di numeri reali (come definita in in 3.e.2).

Dato $N \in \mathbb{N}$ nel seguito scriveremo $\sup_{n\geq N} a_n$ invece di $\sup\{a_N, a_{N+1} \ldots\}$, e analogamente per l'estremo inferiore. (Questo è in accordo con quanto discusso in 6.c.8)

Esercizi

E7.a.1 Prerequisiti:6.c.7. [OCP]

Si ha che $\sup_{n\geq N} a_n = \sigma \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se

$$\forall n \geq N, a_n \leq \sigma \quad \text{e} \tag{7.a.2}$$
$$\forall L < \sigma, \exists n \geq N, a_n > L \tag{7.a.3}$$

(notate che se $\sigma = \infty$ la prima è banalmente vera, mentre se $\sigma = -\infty$ quest'ultima è vera perché non vi sono L).

Soluzione. 7.a.4. *Segue dalla caratterizzazione 6.c.3.* [OCQ]

E7.a.5 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione con $a_n \sim n^n$. Si dimostri che, posto $s_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_n$ si ha $s_n \sim a_n$. [OCR]

E7.a.6 Siano e_n, d_n due successioni reali tali che $d_n \leq e_n$ per ogni n, e supponiamo che $\limsup_n e_n = \liminf_n d_n = b$ (possibilmente infinito): mostrate allora che $\lim_n e_n = \lim_n d_n = b$. *Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OCT']* [OCS]

E7.a.7 Prerequisiti:6.c.11,6.e.12. Siano a_n, b_n successioni a valori reali, mostrate che [OCV] *(Svolto il 2022-11-24)*

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} a_n) + (\limsup_{n\to\infty} b_n) \ ;$$

trovate un caso in cui la disuguaglianza è stretta. *Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OCW']*

E7.a.8 Difficoltà:*. [OCX]

Sia $a_{n,m}$ una successione reale [†52] a due indici $n, m \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

- per ogni m esista il limite $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$, e che
- esista finito il limite $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ uniformemente in n, cioè

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall h \geq m\ \ |a_{n,h} - b_n| < \varepsilon \ .$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m} \tag{7.a.9}$$

nel senso che se uno dei due limiti esiste (possibilmente infinito), allora esiste anche l'altro, e sono uguali.

[†52] Questo risultato vale più in generale se $a_{n,m}$ sono elementi di uno spazio metrico; inoltre un simile risultato si ha quando i limiti $n \to \infty$ e/o $m \to \infty$ vengono rimpiazzati con limiti $x \to \hat{x}$ e/o $y \to \hat{y}$ dove le precedenti variabili si muovono in spazi metrici. Si veda ad esempio 18.12.

Trovate un semplice esempio in cui i due limiti in (7.a.9) sono infiniti.

Trovate un esempio in cui $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ ma il limite non è uniforme e la precedente uguaglianza (7.a.9) non vale.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0CZ']*

E7.a.10 Prerequisiti:7.a.8,7.a.6. Sia di nuovo $a_{n,m}$ una successione reale a due indici $n, m \in \mathbb{N}$; supponiamo che, per ogni n, esista finito il $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ uniformemente in n, e che esista finito il $\lim_n b_n$. Si può concludere che esistono i limiti $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$ per ogni fissato m? Sapete scrivere un'uguaglianza come in eqn. (7.a.9) in cui però a destra si usino i limiti superiori o inferiori di $a_{n,m}$ per $n \to \infty$, al posto dei limiti $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$? [0D0]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0D1']*

E7.a.11 Difficoltà:*. Mostrate che da ogni successione $(a_n)_n$ si può estrarre una sottosuccessione monotona. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0D3']* [0D2]

E7.a.12 Difficoltà:*. Mostrate che da ogni successione $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ si può estrarre una sottosuccessione monotona per cui [0D4]

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0D5']*

E7.a.13 Argomenti:costante di Eulero-Mascheroni. Prerequisiti:3.f.4. [0D6]

Mostrate che esiste finito il limite

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right) \quad .$$

Questa γ è detta Costante di Eulero - Mascheroni. Si può definire in moltissimi modi diversi (si veda il link precedente) fra cui

$$\gamma = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x$$

dove le parentesi $\lfloor\cdot\rfloor$ indicano la funzione parte intera $\lfloor x \rfloor \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$. Nella immagine 1 la costante γ è l'area blu.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0D8']*

E7.a.14 Note:*Ese 5 del compito gennaio 2010.* [0D9]

Sia $a_k = \sqrt[3]{k^3 + k} - k$. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \frac{1}{3} \log(n)$$

nel senso che il rapporto fra queste due successioni tende a 1 quando $n \to \infty$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0DB']* *[UNACCESSIBLE UUID '0DC']*

E7.a.15 Note:*Esercizio 1 del compito 9 Aprile 2011.* Sia (a_n) una successione di numeri reali, con $a_n \ge 0$. [0DD]

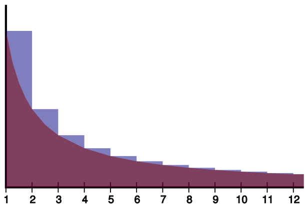


Figura 1: Rappresentazione della costante di Eulero-Mascheroni
Immagine di William Demchick, Creative Commons Attribution 3.0 Unported License, tratta da wikipedia.

1. Si mostri che se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora convergono anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m\right)$$

2. Assumendo inoltre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, poniamo

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \ b = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m\right) \ , \ c = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

si mostri allora che $a^2 = 2b + c$.

Esercizio 7.a.16. *Siano a_n, b_n successioni reali (che possono avere segno variabile, assumere valore zero, e non sono necessariamente infinitesime).* [0DJ]

Ricordiamo che la notazione $a_n = o(b_n)$ significa:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \overline{n} \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon |b_n| \ .$$

Si mostri che queste due asserzioni sono equivalenti.

- *Definitivamente in n si ha che $a_n = 0 \iff b_n = 0$; precisato questo si ha $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$, dove si decide che $0/0 = 1$ (in particolare a_n, b_n hanno definitivamente lo stesso segno, quando non sono entrambi nulli);*
- *si ha che $a_n = b_n + o(b_n)$.*

La seconda condizione appare in Definizione 3.2.7 in [3] dove viene indicata con la notazione $a_n \sim b_n$.

Deducete che $a_n \sim b_n$ è una relazione di equivalenza.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '29Y']

Esercizio 7.a.17. Prerequisiti:3.g.3.*Siano a_n, b_n successioni reali (che possono avere segno variabile, assumere valore zero, e non sono necessariamente infinitesime); sia $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo spazio di tutte le successioni.* [02F]

Ricordiamo che la notazione $a_n = O(b_n)$ significa:

$$\exists M > 0, \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \overline{n} \Rightarrow |a_n| \leq M |b_n| \ .$$

Si mostrino queste asserzioni:

- *per $a, b \in X$, $a = (a_n)_n$, $b = (b_n)_n$ consideriamo la relazione*

$$aRb \iff a_n = O(b_n)$$

mostrate che R è un preordine;

- *definiamo $x \asymp y \iff (xRy \land yRx)$ allora $\asymp$ è una relazione di equivalenza, inoltre R è invariante per $\asymp$, la sua proiezione $\preceq$ è una relazione d'ordine su $X/\asymp$; (sugg. usate la Prop. 12.g.3).*

- *Definite (come usuale)*

$$\hat{a} \prec \hat{b} \iff (\hat{a} \preceq \hat{b} \land \hat{a} \neq \hat{b})$$

per $\hat{a}, \hat{b} \in X/\asymp$, $(a_n)_n \in \hat{a}$, $(b_n)_n \in \hat{b}$ rappresentanti; assumendo che $b_n \neq 0$ (definitivamente in n), mostrate che

$$\hat{a} \prec \hat{b} \iff 0 = \liminf_n \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{b_n} < \infty \quad .$$

Chiamiamo gli elementi di $X/\asymp$ ordini di grandezza. *La precendente discussione è collegato alla Definizione 3.2.3 (e seguenti) in [3].*

Si vedano anche gli esercizi 6.c.11 e 6.c.10.

§7.a.a Sommazione per parti

Esercizi

E7.a.18 Siano $(a_n)_n, (b_n)_n$ successioni di numeri reali e sia c_n definita come da 7.c.29; siano poi [217]

$$A_n = \sum_{h=0}^{n} a_h \ , \ B_n = \sum_{h=0}^{n} b_h \ , \ C_n = \sum_{h=0}^{n} c_h$$

le somme parziali delle tre serie, supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ sia convergente: si mostri che

$$C_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} B_i = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(B_i - B) + A_n B \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '216']*

E7.a.19 Note:*Tratto da Rudin [23] Prop. 3.41.* [21H]

Siano $(a_n)_n (b_n)_n$, successioni, sia $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $A_{-1} = 0$, $0 \leq p \leq q$, allora

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p \quad .$$

§7.b Successioni definite per ricorrenza

Esercizi

E7.b.1 Siano $f(x) = x - x^3$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione definita per ricorrenza da $x_{n+1} = f(x_n)$. Si dimostri che esiste un $\lambda > 0$ tale che se $|x_0| < \lambda$ allora $x_n \to 0$, mentre se $|x_0| > \lambda$ allora $|x_n| \to \infty$; e possibilmente si calcoli questo λ. [0DK]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0DM']*

E7.b.2 `Note:`*metodo Babilonese per la radice quadrata.* Sia $S > 0$ e consideriamo la successione definita per ricorrenza da [0DN]

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{S}{x_n}\right) \quad ;$$

mostrate che $x_n \to \sqrt{S}$ e che, per $S \in [1/4, 1]$ e $x_0 = 1$, la convergenza è superquadratica, cioè

$$\left|x_n - \sqrt{S}\right| \le 2^{1-2^n} \quad .$$

Trovate una funzione $f(x)$ (dipendente da S) tale che la precedente iterazione si possa vedere come un metodo di Newton, cioè

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{S}{x}\right).$$

Generalizzate il metodo Babilonese per trovare una radice $\sqrt[k]{S}$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0DP']*

§7.c Serie

§7.c.a Criteri

Teorema 7.c.1 (Criterio della radice). *Sia $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ allora* [219]

- *Se $\alpha < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;*
- *Se $\alpha = 1$ non si può concludere nulla;*
- *Se $\alpha > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge, e inoltre $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.*

Dimostrazione. [21B]

- Se $\alpha < 1$, preso $L \in (\alpha, 1)$ si ha definitivamente $\sqrt[n]{|a_n|} < L$ dunque vi è un N per cui $|a_n| \le L^{N-n}$ per ogni $n \ge N$ e si conclude per confronto con la serie geometrica.
- Per le due serie $1/n$ e $1/n^2$ si ha $\alpha = 1$.
- Se $\alpha > 1$ si ha frequentemente $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ dunque $|a_n| > 1$, in contrasto con il criterio necessario.

□

Teorema 7.c.2 (Criterio del rapporto, o di D'Alambert)**.** *Assumiamo che $a_n \neq 0$. Sia $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ allora* [21C]

- *Se $\alpha < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;*
- *se $\alpha \geq 1$ non si può concludere nulla.*

Dimostrazione.

- Se $\alpha < 1$, preso $L \in (\alpha, 1)$ si ha definitivamente $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L$ dunque vi è un N per cui $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L$ per ogni $n \geq N$, per induzione si mostra che $|a_n| \leq L^{n-N}|a_N|$ e si conclude per confronto con la serie geometrica.
- Vediamo alcuni esempi. Per le due serie $1/n$ e $1/n^2$ si ha $\alpha = 1$.

  Definendo
  $$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ pari} \\ 2^{2-n} & n \text{ dispari} \end{cases} \tag{7.c.3}$$
  si ottiene una serie convergente ma per cui $\alpha = 2$.

□

Nota 7.c.4. *Se è possibile applicare il criterio del rapporto 7.c.2, abbiamo visto nella dimostrazione che, per un $L < 1$, vi è un N per cui $|a_n| \leq L^{n-N} a_N$ per ogni $n \geq N$, e dunque $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq L < 1$, cioè si applica il criterio della radice 7.c.5.* [0F1]

Teorema 7.c.5 (Criterio di condensazione di Cauchy)**.** *Se $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ ha termini positivi ed è monotona (debolmente) decrescente, la serie converge se e solo se converge la serie* [21D]
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad .$$

Dimostrazione. Dato che la successione $(a_n)_n$ è decrescente, allora per $h \in \mathbb{N}$
$$2^h a_{2^{(h+1)}} \leq \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k \leq 2^h a_{2^h} \quad . \tag{7.c.6}$$

Notiamo ora che
$$\sum_{h=0}^{N} \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k = \sum_{n=2}^{2^{N+1}} a_n$$
e dunque
$$\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{2^{(N+1)}} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \quad .$$

dunque possiamo sommare i termini in (7.c.6) per ottenere
$$\sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^{(h+1)}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^h}$$

laddove il termini a destra è finito se e solo se quello a sinistra è finito, in quanto

$$\sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^h} = a_1 + 2\sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^{(h+1)}} \quad ;$$

si conclude la dimostrazione con il teorema di confronto. □

Il criterio di Dirichlet per le serie generalizza il criterio *dei segni alterni* di Leibniz.

Teorema 7.c.7 (criterio di Dirichlet)**.** *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Se b_n tende monotonamente a 0 e se la serie delle somme parziali di a_n è limitata, cioè se* [21F]

$$b_n \ge b_{n+1} > 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad , \quad \exists M > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}\,, \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| < M \quad ,$$

allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$$

è convergente.

La dimostrazione è lasciata come esercizio (sugg. si usi 7.a.19)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '21G']

In particolare, ponendo $a_n = (-1)^n$ si dimostra l'esistenza del limite nel criterio di Leibniz.

Teorema 7.c.8 (criterio di Leibniz)**.** *Sia b_n una successione per cui* [238]

$$b_n \ge b_{n+1} > 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad ,$$

allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$$

è convergente; inoltre, chiamato ℓ il valore della serie, poste

$$B_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n b_n$$

le somme parziali, si ha che la successione B_{2N} è decrescente , la successione B_{2N+1} è crescente, e entrambe convergono a ℓ.

Teorema 7.c.9 (Criterio di Raabe)**.** *Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dove i termini sono positivi: $a_n > 0$. Definiamo* [0DR] (Svolto il 2022-12-13)

$$z_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

per comodità.

- *Se $z_n \le 1$ definitivamente in n, allora la serie non converge.*

- *Se esiste $L > 1$ tale che $z_n \geq L$ definitivamente in n, cioè equivalentemente se*

$$\liminf_{n\to\infty} z_n > 1 \quad ,$$

allora la serie converge.

Inoltre, fissato $h \in \mathbb{Z}$, si può definire

$$z_n = (n+h)\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

oppure

$$z_n = n\left(\frac{a_{n+h}}{a_{n+h+1}} - 1\right)$$

come ad esempio

$$z_n = n\left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1\right)$$

e il criterio vale allo stesso modo. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0DS']

§7.c.b Esercizi

Esercizi

E7.c.10 Sia $\alpha > 0$; usate il criterio di Raabe 7.c.9 per studiare la convergenza della serie [214] *(Svolto il 2022-12-13)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '215']*

E7.c.11 Sia $\alpha > 0$; usate il criterio di condensazione 7.c.5 per studiare la convergenza della serie [23D] *(Svolto il 2022-12-13)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

E7.c.12 Data una serie $\sum_n^\infty a_n$ dire se le condizioni successive sono necessarie e/o sufficienti per la convergenza. [0DW]

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\ \forall k \in \mathbb{N}\ \left|\sum_{j=n}^{n+k} a_k\right| < \varepsilon \tag{7.c.13}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\ \left|\sum_{j=n}^{n+k} a_k\right| < \varepsilon \tag{7.c.14}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \forall k \in \mathbb{N}\ \sum_{j=n}^{n+k} |a_k| < \varepsilon \tag{7.c.15}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\ \sum_{j=n}^{n+k} |a_k| < \varepsilon \tag{7.c.16}$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0DX']*

E7.c.17 Trovate due successioni $(a_n)_n, (b_n)_n$ con $a_n, b_n > 0$ tali che $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ è convergente, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ è non convergente, e $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$. *Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID 'ODZ']` [ODY] *(Proposto il 2022-12-13)*

E7.c.18 `Note:`*Esame del 9 aprile 2011.*Sia (a_n) una successione di numeri reali (non necessariamente positivi) tali che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga ad $a \in \mathbb{R}$; sia $b_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$; si mostri che se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge allora $a = 0$. [OFO]

E7.c.19 Trovare due esempi di $a_{i,j} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ [OF2] *(Proposto il 2022-12)*

- tale che, per ogni i, $\sum_j a_{i,j} = 0$, mentre per ogni j, $\sum_i a_{i,j} = \infty$;
- tale che, per ogni i, $\sum_j a_{i,j} = 0$, mentre per ogni j, $\sum_i a_{i,j} = 1$.

Riuscite a trovare esempi dove sia abbia inoltre che $|a_{i,j}| \le 1$ per ogni i, j?

E7.c.20 `Note:`*Compitino del 4 Apr 2009, ese 1.* Data una successione $(a_n)_n$ di numeri strettamente positivi, si dice che *il prodotto infinito* $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge* se esiste finito e strettamente positivo il limite dei prodotti parziali, cioè [OF4] *(Proposto il 2022-12-13)*

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N} a_n \in (0, +\infty) \quad .$$

Si dimostri che

1. se $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ converge allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$;
2. se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - 1|$ converge, allora converge anche $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$;
3. trovate un esempio in cui la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - 1)$ converge ma $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = 0$.

E7.c.21 Indichiamo con $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subseteq \mathbb{N}$ che sono insiemi finiti. Questo è detto *l'insieme delle parti finite*. [OF5]

Abbreviamo $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ nel seguito.

Data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali e un $B \in \mathcal{P}$ indichiamo con $s(B) = \sum_{n\in B} a_n$ la somma finita con indici in B.

Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga ma non converga assolutamente. Allora:

- $\{s(F) : F \in \mathcal{P}\}$ è denso in $\mathbb{R}$.
- Esiste un riordinamento σ di $\mathbb{N}$, cioè una funzione bigettiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che l'insieme delle somme parziali $\sum_{n=0}^{N} a_{\sigma(n)}$ (al variare di N) è denso in $\mathbb{R}$.

E7.c.22 `Note:`*Questo risultato è attribuito a Riemann , si veda 3.54 in [23]..* [OF7]

Sia data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (a un valore finito) ma $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$; per ogni l, L con $-\infty \le l \le L \le +\infty$ esiste una permutazione $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che, posto $S_N = \sum_{k=0}^{N} a_{\pi(k)}$, si ha che

$$\limsup_{N\to\infty} S_N = L \quad , \quad \liminf_{N\to\infty} S_N = l \quad .$$

E7.c.23 Sia data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali positivi tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$: dimostrare che per ogni $l \in \mathbb{R}$ esiste una successione $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ per ogni n, tale che [0F8]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n a_n) = l \quad .$$

Se invece $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S < \infty$, cosa si può dire dell'insieme E delle somme $\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n a_n) = l$, al variare di $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ per ogni n?

- Analizzate i casi in cui $a_n = 2^{-n}$ oppure $a_n = 3^{-n}$
- Mostrate che E è sempre chiuso.
- Sotto quali ipotesi si ha che $E = [-S, S]$?

Suggerimento. Sia $\tilde{E}$ l'insieme delle somme $\sum_n (\varepsilon_n a_n) = l$, al variare di $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ per ogni n; notate che $\tilde{E} = \{(S + x)/2 \,:\, x \in E\}$.

E7.c.24 `Note:`*Compitino del 12 gen 2019.* Mostrate che la seguente serie converge [0F9] *(Svolto il 2022-12-13)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdots (3n)} \right)^2$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0FB']*

E7.c.25 Dire per quali $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ si ha che [21M] *(Proposto il 2022-12)*

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta (\log(\log n))^\gamma}$$

converge.

E7.c.26 `Note:`*compitino 29 Gennaio 2021.* Sia $\alpha > 0$. Dite (giustificando) per quali α le seguenti serie convergono o divergono [23F] *(Proposto il 2022-12-13)*

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[4]{n^8 + n^\alpha} - n^2 \right)$$
- $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha + 1} \right)$$
- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^{\alpha \log_2(n)}}$$

  dove i logaritmi sono in base 2.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '23G']*

E7.c.27 Note:*Compitino del 26 gen 2016.* Sia [20Z]

$$z_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)} \quad ;$$

Mostrate che $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \infty \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '213']

E7.c.28 Note:*esercizio 2, compito 15 Gennaio 2014.* Sia $(a_n)_{n\geq 0}$ una successione di numeri reali positivi. Posto $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ si mostri che: [210]

- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/s_n$ converge;
- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/(s_n)^2$ converge.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '21K']

Si veda anche l'esercizio 24.1.

§7.c.c Prodotto di Cauchy

Definizione 7.c.29. *Date due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ a valori reali o complessi, il loro* ***prodotto di Cauchy*** *è la successione $(c_n)_n$ data da* [0FH]

$$c_n \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad .$$

Esercizi

E7.c.30 Se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \geq 0$ si mostri che [0FJ]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

con la convenzione che $0 \cdot \infty = 0$.

E7.c.31 Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono assolutamente, si mostri che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge assolutamente e [0FK] *(Proposto il 2022-12-13)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad .$$

E7.c.32 Prerequisiti:7.a.18.Note:*Noto come: Teorema di Mertens..* [0FM]

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, si mostri che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0FN']

E7.c.33 Si discuta il prodotto di Cauchy della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ con se stessa. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0FQ'] [0FP]

Si veda anche l’esercizio 19.a.1.

§7.d Successioni generalizzate, o “reti” [29X]

Definizione 7.d.1. *Sia nel seguito* $(J, \leq)$ *un insieme ordinato con la* proprietà filtrante [21J]

$$\forall x, y \in J\ \exists z \in J,\ x < z \wedge y < z \tag{7.d.2}$$

(Si veda la sezione §3.d.a).

Una funzione $f : J \to X$ *viene chiamata* ***rete***.

Questa f *è una generalizzazione del concetto di* successione*; infatti l’insieme* $J = \mathbb{N}$ *con il suo usuale ordinamento ha la proprietà filtrante*

In questa sezione ci concentriamo sul caso $X = \mathbb{R}$.

Nota 7.d.3. *Notate che questa definizione si discosta da quella generalmente usata, si veda in [35] o in [15]; ma è equivalente a tutti gli effetti pratici, per quanto spiegato in 3.d.32, 7.d.12, 8.15.* [2B3]

Definizione 7.d.4. Prerequisiti:3.d.24, 3.d.28, Sez. §3.d.a. [0FR]

Dato J *insieme ordinato (parzialmente) e filtrante, e data* $f : J \to \mathbb{R}$*, vogliamo definire il concetto di limite di* $f(j)$ *“per* $j \to \infty$*”.* †53.

- *Diremo che*
  $$\lim_{j\in J} f(j) = l \in \mathbb{R}$$
  se
  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in J\ \forall j \in J,\ j \geq k \Rightarrow |l - f(j)| < \varepsilon \quad .$$
  Similmente si definiscono i casi $l = \pm\infty$ *(imitando le definizioni usate quando* $J = \mathbb{N}$*.) (Questa è la definizione negli appunti del corso, cap. 4 sez. 2 in [3])*

- *Equivalentemente possiamo dire che*
  $$\lim_{j\in J} f(j) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$
  se per ogni intorno U *di* l *si ha che* $f(j) \in U$ *definitivamente per* $j \in J$*; dove* definitivamente *è stato definito in 3.d.28.*

- *Ricordiamo da 3.d.21 che* “un intorno di ∞ in J” *è un sottoinsieme* $U \subseteq J$ *tale che* $\exists k \in J \forall j \in J, j \geq k \Rightarrow j \in U$*. Allora possiamo imitare la definizione 6.d.1.*

  Data $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *si ha* $\lim_{j\in J} f(j) = l$ *quando per ogni intorno* V *“pieno” di* l *in* $\mathbb{R}$*, esiste intorno* U *di* ∞ *in* J *tale che* $f(U) \subseteq V$*.*

In particolare questa ultima definizione si può usare per definire i limiti di $f : J \to E$ *dove* E *è uno spazio topologico.*

Definizione 7.d.5. *Presa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale, $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ è una* sottosuccessione *quando n_k è una successione strettamente crescente di numeri naturali.* [230]

Similmente presa $f : J \to \mathbb{R}$, sia $H \subseteq J$ un sottoinsieme cofinale *(come definito in 3.d.18): sappiamo da 3.d.25 che H è* filtrante. *Allora la restrizione $h = f|_H$ è una rete $h : H \to \mathbb{R}$, ed è detta* "una **sottorete** di f"*.*

Più in generale, supponiamo che $(H, \leq_H)$ sia cofinale in $(J, \leq)$ per mezzo di una mappa $i : H \to J$; ricordiamo che questo significa (adattando (3.d.20)) che

$$(\forall h_1, h_2 \in H, h_1 \leq_H h_2 \Rightarrow i(h_1) \leq i(h_2)) \,\wedge\, (\forall j \in J\, \exists h \in H,\ i(h) \geq j) \quad ; \tag{7.d.6}$$

*allora $h = f \circ i$ è una **sottorete**.*

Esercizi

E7.d.7 Dimostrate che le asserzioni in 7.d.4 sono equivalenti. [22Z]

E7.d.8 `Prerequisiti:7.d.4,7.d.1,3.d.26.`Mostrate che se esiste il limite $\lim_{j\in J} f(j)$ allora è unico. [0FS]

E7.d.9 Supponiamo che f sia monotona, mostrate che $\lim_{j\in J} f(j)$ esiste (possibilmente infinito) e coincide con $\sup_J f$ (se è crescente) o con $\inf_J f$ (se è decrescente). [0FT]

Deducete che

$$\limsup_{j\in J} f(j) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\in J} \sup_{k\geq j} f(k)$$

$$\liminf_{j\in J} f(j) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\in J} \inf_{k\geq j} f(k)$$

sono sempre ben definiti.

E7.d.10 Mostrate che esiste il limite $\lim_{j\in J} f(j) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se [0FV]

$$\limsup_{j\in J} f(j) = \liminf_{j\in J} f(j) = \ell \ .$$

E7.d.11 `Prerequisiti:3.d.13,3.d.25,7.d.4,7.d.1,3.d.27.`Supponiamo che $H \subseteq J$ sia *cofinale* e sia $h = f|_H$ la sottorete (come definito in 7.d.5); [22Y]

Supponiamo che $\lim_{j\in J} f(j) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ si mostri che $\lim_{j\in H} h(j) = l$.

Simimente se $(H, \leq_H)$ è cofinale in $(J, \leq)$ per mezzo di una mappa $i : H \to J$, e , e $h = f \circ i$.

Nota 7.d.12. *Supponiamo che l'insieme J sia diretto ma non filtrante; allora per 3.d.24 esso ammette un elemento massimo che chiamiamo ∞; le precedenti definizioni e proprietà si possono dare anche in questo caso, ma sono banali, in quanto si dimostra che* [237]

$$\lim_{j\in J} f(j) = \liminf_{j\in J} f(j) = \limsup_{j\in J} f(j) = f(\infty) \quad .$$

§7.e Serie generalizzate

§7.e.a Serie generalizzate a termini positivi

Definizione 7.e.1. *Sia I una famiglia infinita di indici e sia $a_i : I \to [0,\infty]$ una successione generalizzata, definiamo la somma $\sum_{i\in I} a_i$ come* [0FW]

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left\{\sum_{i\in K} a_i \,:\, K \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$$

dove $\mathcal{P}_f(I)$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti $K \subseteq I$.

Esercizi

E7.e.2 `Prerequisiti:`3.1.1.`Note:`*Dal compitino del 27 marzo 2010.*.Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la sommatoria [0FX]

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(n+m+1)^\alpha} \quad .$$

converge. Si discuta poi, per $N \geq 3$, la convergenza di

$$\sum_{(m_1,\ldots m_N)\in\mathbb{N}^N} \frac{1}{(1+m_1+\ldots+m_N)^\alpha} \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0FY']*

E7.e.3 Sia I una famiglia di indici, sia a_i una successione con $a_i \geq 0$; sia poi $\mathcal{F}$ una partizione di I (non necessariamente di cardinalità finita); mostrare allora che [0FZ]

$$\sum_{F\in\mathcal{F}} \sum_{i\in F} a_i = \sum_{i\in I} a_i \quad .$$

E7.e.4 `Difficoltà:*`. Siano I famiglia di indici; sia $a_{i,j} : I\times\mathbb{N} \to [0,\infty]$ una successione generalizzata, tale che $j \mapsto a_{i,j}$ è debolmente crescente per ogni fissato i; si dimostri allora che [0G0]

$$\sum_{i\in I} \lim_{j\to\infty} a_{i,j} = \lim_{j\to\infty} \sum_{i\in I} a_{i,j} \quad .$$

(Questa è una versione per le serie del noto *Teorema di convergenza monotona*).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0G2']*

E7.e.5 Estendete il precedente 7.e.4, sostituendo $\mathbb{N}$ con un insieme di indici J filtrante secondo un ordinamento $\leq$. [0G3]

[†53] Notate che ∞ è un simbolo ma non è un elemento di J : se lo fosse dovrebbe essere il massimo, ma un insieme filtrante non può avere massimo, *cf* 3.d.24

§8 Topologia [0G5]

Sia X un insieme fissato e non vuoto. Useremo questa notazione. Per ogni insieme $A \subseteq X$ definiamo che $A^c = X \setminus A$ è il **complementare di A**.

Definizione 8.1. *Uno **spazio topologico** è una coppia (X, τ) dove X è un insieme (non vuoto) con associata la famiglia τ degli aperti, che è detta **topologia**.* [2DY]

Definizione 8.2. *La **topologia** $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di sottoinsiemi di X che vengonono chiamati **aperti**. Questa famiglia gode di tre proprietà: $\emptyset, X$ sono aperti; l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto; l'unione di un numero arbitrario di aperti è un aperto.* [0G6]

*Un insieme A è **chiuso** se A^c è aperto.*

Definizione 8.3. *Siano dati $A, B \subseteq X$.* [0G7]

1. *La **parte interna** di A, denotata da $A°$, è l'unione di tutti gli aperti contenuti in A, e dunque è il più grande aperto contenuto in A;*
2. *la **chiusura** di B, denotata da $\overline{B}$, è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono B, cioè è il più piccolo chiuso che contiene B.*
3. *A si dice **denso in** B se $\overline{A} \supseteq B$.*[†54]
4. *La **frontiera** ∂A di A è $\partial A = \overline{A} \setminus A°$.*

Definizione 8.4. *Si dice che uno spazio topologico (X, τ) è T_2, o "di Hausdorff", se $\forall x, y \in X$ esistono $U, V \in \tau$ aperti disgiunti con $x \in U, y \in V$.* [0G8]

Definizione 8.5. *Ogni insieme X può essere associato a diverse topologie. Di seguito due semplici esempi:* [2F6]

- *La **topologia discreta** è quella in cui tutti gli insiemi sono aperti, e dunque chiusi. Equivalentemente, la topologia discreta è quella in cui ogni singoletto è un aperto.*
- *La **topologia indiscreta** è quella in cui $X, \emptyset$ sono gli unici insiemi aperti (e chiusi).*

Ulteriori informazioni si possono trovare in Cap. 2 of [23] o in [15].

Nota 8.6. *Uno spazio metrico è un caso particolare di spazio topologico, in quanto gli aperti dello spazio metrico soddisfano i requisiti della definizione 8.2; la topologia associata è sempre Hausdorff. I seguenti risultati dunque valgono anche per gli spazi metrici.* [2DH]

Esercizi

E8.7 Mostrate che se lo spazio è T_2 allora ogni singoletto $\{x\}$ è chiuso. [0G9]

E8.8 Mostrate che se $A \subseteq B$ allora $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ e $A° \subseteq B°$ [0GB]

E8.9 Mostrate che se $A = B^c$ allora $(\overline{B})^c = A°$, usando le definizioni 8.2 e 8.3. [0GC]

E8.10 Notate che $A \supseteq A°$ e $B \subseteq \overline{B}$, in genere. Mostrate che A è aperto se e solo se $A = A°$; e che B è chiuso se e solo se $B = \overline{B}$, usando le definizioni 8.2 e 8.3. [0GD]

E8.11 Argomenti:parte interna. Dato X spazio topologico e $A \subseteq X$, mostrate che [0GF]

$$A^\circ = (A^\circ)^\circ \ .$$

usando la definizione di A° data sopra.

(Per il caso di X spazio metrico, si veda anche il 10.b.16)

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0GG']*

E8.12 Argomenti:chiusura. Dato X spazio topologico e $A \subseteq X$, mostrate che [0GH]

$$\overline{A} = \overline{\left(\overline{A}\right)}$$

sia per passaggio al complementare rispetto al 8.11, sia usando la definizione di $\overline{A}$ come *"intersezione di tutti i chiusi che contengono A"*.

(Per il caso di X spazio metrico, si veda anche il 10.b.19)

E8.13 Argomenti:chiusura, parte interna. Sia dato X spazio topologico e $A \subseteq X$ aperto. [0GJ]

1. Mostrate che $A \subseteq \left(\overline{A}\right)^\circ$ (la parte interna della chiusura di A).
2. Trovate un esempio di insieme $A \subset \mathbb{R}$ aperto per cui $A \neq \left(\overline{A}\right)^\circ$.
3. Formulate poi una simile relazione per A chiuso, passando ai complementari.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0GK']*

E8.14 Dati gli insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$, si determinino le relazioni tra le seguenti coppie di insiemi [0GM]

$$\begin{array}{ccc} \overline{A \cup B} & \text{e} & \overline{A} \cup \overline{B}\,, \\ \overline{A \cap B} & \text{e} & \overline{A} \cap \overline{B}\,, \\ (A \cup B)^\circ & \text{e} & A^\circ \cup B^\circ\,, \\ (A \cap B)^\circ & \text{e} & A^\circ \cap B^\circ\,. \end{array}$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0GP']*

E8.15 Prerequisiti:3.d.15,3.d.13,3.d.24.Difficoltà:*.*(Replaces 29W)* Sia (X, τ) uno spazio topologico. Consideriamo l'ordinamento discendente fra insiemi [†55], con questo ordinamento τ è un insieme diretto; notiamo che ha minimo, dato da $\emptyset$. [0GQ]

Supponiamo ora che la topologia sia Hausdorff. Preso poi $x \in A$, sia $\mathcal{U} = \{A \in \tau : x \in A\}$ la famiglia degli aperti che contengono x: mostrate che $\mathcal{U}$ è un insieme diretto; mostrate che ha minimo se e solo se il singoletto $\{x\}$ è aperto (e in questo caso il minimo è $\{x\}$). [†56]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0GR']*

Per l'esercizio 3.d.24, quando $\{x\}$ non è aperto allora $\mathcal{U}$ è un insieme filtrante, e dunque può essere usato come famiglia di indici per definire un "limite" non banale (si veda la nota 7.d.12). Vedremo applicazioni in sezione §8.g.

E8.16 Note:*Compito del 25 Marzo 2017.*Siano (X,τ), (Y,θ) due spazi topologici con intersezione non vuota e si supponga che le topologie ristrette a $C = X \cap Y$ coincidano (cioè $\tau_{|C} = \theta_{|C}$) [†57] e che C sia aperto in entrambi le topologie (cioè $C \in \tau, C \in \theta$). Si dimostri che esiste una sola topologia σ su $Z = X \cup Y$ tale che $\sigma_{|X} = \tau$ e $\sigma_{|Y} = \theta$ e che $X, Y \in \sigma$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0GT'][UNACCESSIBLE UUID '0GV'] [0GS]

§8.a Intorni, punti aderenti, punti isolati, punti di accumulazione [29V]

Definizione 8.a.1 (Intorni). [†58] *Sia (X,τ) uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$.* [0GW]

- *Si chiama **intorno** di x_0 un qualunque soprainsieme di un aperto contenente x_0 .*
- *Si chiama **sistema fondamentale di intorni** di x_0 una famiglia $\{U_i\}_{i\in I}$ di intorni di x_0 con la proprietà che ogni intorno di x_0 contenga almeno uno degli U_i .*

*Diremo che U è un **intorno aperto di** x_0 semplicemente per dire che U è un aperto che contiene x_0.*

Definizione 8.a.2. *Siano $E, F \subseteq X$:* [0GX]

- *un punto $x_0 \in X$ si dice **aderente a** E se ogni intorno U di x_0 ha intersezione non vuota con E;*
- *un punto $x_0 \in E$ si dice **isolato in** E se esiste un intorno U di x_0 tale che $E \cap U = \{x_0\}$;*

(Notate che, in certi casi, gli insiemi possono avere al più un numero numerabile di punti isolati: si veda 10.g.7 e 8.i.3, e anche 10.g.8).

Definiamo inoltre questo concetto (già visto in 6.b.1 per il caso $X = \mathbb{R}$).

Definizione 8.a.3 (punto di accumulazione). *Dato $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ si dice **punto di accumulazione** per A se per ogni intorno U di x si ha che $U \cap A \setminus \{x\}$ è non vuoto.* [†59] [0GY]

*L'insieme di tutti i punti di accumulazione di A si chiama **derivato** e verrà indicato con $D(A)$.*

Nella letteratura Inglese *punto di accumulazione* si traduce anche come *"limit point"* (il che può creare confusione con la definizione 10.b.39); per questo non useremo questa dicitura. [†60] [2BN]

Esercizi

E8.a.4 Verificate che nelle definizioni 8.a.2 e 8.a.3 potete equivalentemente usare, al posto degli intorni U di x_0, gli intorni aperti U di x_0. [0GZ]

E8.a.5 Verificate che nelle definizioni 8.a.2 e 8.a.3 potete equivalentemente usare intorni U di x_0 scelti in un sistema fondamentali di intorni fissato. [0H0]

[†54] Spesso quando si dice "A è denso in B" si ha che B è chiuso e $A \subseteq B$: in questo caso "denso" è $\overline{A} = B$.
[†55] Per riportarci formalmente alla definizione vista in 3.d.15 definiamo $A \preceq B \iff A \supseteq B$ e associamo l'ordinamento $\preceq$ a τ.
[†56] Notate che, il singoletto $\{x\}$ è aperto se e solo se x è un punto isolato.
[†57] Ricordiamo che $\tau_{|C} = \{B \cap C : B \in \tau\}$.
[†58] Definizione 5.6.4 negli appunti [3]
[†59] Potremmo chiamare $U \setminus \{x\}$ un "intorno bucato"; dunque stiamo chiedendo che l'intorno bucato $U \setminus \{x\}$ abbia intersezione non vuota con A; come già avevamo fatto in 6.b.1.
[†60] Si veda a questo proposito [43].

E8.a.6 Verificate che l'insieme dei punti aderenti ad A coincide con la chiusura di A. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0H2']* [0H1]

E8.a.7 Prerequisiti:8.a.6. Verificate che $\overline{A} = A \cup D(A)$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0H4']* [0H3]

E8.a.8 Un punto $x \in X$ è punto di accumulazione per X [†61] se e solo se il singoletto $\{x\}$ non è aperto. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0H6']* [0H5]

E8.a.9 Argomenti:frontiera. Sia $A \subset X$. Ricordiamo la definizione di *frontiera* $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. Si noti che ∂A è chiuso: infatti posto $B = A^c$ il complementare, si verifica facilmente che $\partial A = \overline{A} \cap \overline{B}$. In particolare abbiamo mostrato che $\partial A = \partial B$. [0H7]

Mostrate che i tre insiemi $\partial A, A^\circ, B^\circ$ sono disgiunti, e che la loro unione è X; in particolare mostrate che i tre insiemi sono caratterizzati da queste tre proprietà:

- ogni intorno di x interseca sia A che B;
- esiste intorno di x contenuto in A;
- esiste intorno di x contenuto in B.

(Si veda anche 10.b.26 per il caso di spazi metrici). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0H8']*

E8.a.10 Argomenti:frontiera.Difficoltà:*. [0H9]

Dato X spazio topologico e $A \subseteq X$; se A è aperto (o chiuso) la frontiera ∂A non ha parte interna; si ha $\partial A \supseteq \partial\partial A$ con uguaglianza se ∂A non ha parte interna; inoltre $\partial\partial A = \partial\partial\partial A$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0HB'][UNACCESSIBLE UUID '0HC']*

E8.a.11 Prerequisiti:8.a.7. Se (X, τ) è uno spazio topologico e $A \subset X$ non ha punti isolati, allora anche $\overline{A}$ non ha punti isolati. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0HF']* [0HD]

E8.a.12 Note:*compitino 12/1/2013.* Sia A un sottoinsieme aperto di X. Si dimostri che, per ogni sottoinsieme B di X, vale l'inclusione $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Si dimostri con un esempio che la conclusione non vale se si rimuove l'ipotesi che A sia aperto. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0HH']* [0HG]

E8.a.13 Dato $E \subseteq X$, distinguiamo i punti $x \in X$ in tre insiemi distinti che sono una partizione di X. [0HJ]

- Per ogni intorno U di x, $U \setminus \{x\}$ interseca E. Questi sono i *punti di accumulazione* di E.
- $x \in E$ e esiste un intorno U di x tale che $U \cap E = \{x\}$. Questi sono i *punti isolati* in E.
- *Descrivete ora voi il terzo insieme di punti*

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0HK']*

§8.b Esempi [2BD]

Esercizi

E8.b.1 Consideriamo su $\mathbb{R}$ le famiglia $\tau_+ = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Mostrate che è una topologia. È Hausdorff? Calcolate chiusura, parte interna, frontiera e derivato di questi insiemi: [0HM]

$$\{0\} \quad , \quad \{0,1\} \quad , \quad [0,1] \quad , \quad (0,1) \quad ,$$
$$[0,\infty) \quad , \quad (-\infty,0] \quad , \quad (0,\infty) \quad , \quad (-\infty,0) \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0HN']*

E8.b.2 `Prerequisiti:`8.h.7,8.h.8.Sia $X = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, consideriamo la famiglia $\mathcal{B}$ di parti di X che contiene [0HP]

- gli intervalli aperti (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$,
- le semirette $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$ con $a \in \mathbb{R}$,
- le semirette $[-\infty, b) = (-\infty, b) \cup \{-\infty\}$ con $b \in \mathbb{R}$.

(Notate l'analogia degli insiemi nel secondo e terzo punto, con gli "intorni di infinito" visti in Sez. §6.a).

Si mostri che $\mathcal{B}$ verifica le proprietà *(a),(b)* viste in 8.h.7. Sia τ dunque la topologia generata da questa base. Lo spazio topologico (X, τ) è detto **retta estesa**, spesso indicata $\overline{\mathbb{R}}$.

Questo spazio topologico è T_2, è compatto (Esercizio 8.d.6), e è omoemorfo all'intervallo $[0, 1]$. Può essere dotato di una distanza che genera la topologia sopra descritta.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0HQ']*

E8.b.3 `Prerequisiti:`8.h.7,8.h.8.Sia $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, consideriamo questa famiglia $\mathcal{B}$ di parti di X: [0HR]

- gli intervalli aperti (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$,
- gli insiemi $(a, +\infty) \cup (-\infty, b) \cup \{\infty\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

Si mostri che $\mathcal{B}$ verifica le proprietà *(a),(b)* viste in 8.h.7. Sia τ dunque la topologia generata da questa base. Lo spazio topologico (X, τ) è detto **retta compattificata a un punto**. Questo spazio topologico è T_2, è compatto (Eser. 8.d.7); è omeomorfo alla circonferenza (Eser. 10.o.8); dunque può essere dotato di una distanza che genera la topologia sopra descritta.

E8.b.4 `Argomenti:ordinamento diretto.Prerequisiti:`3.d.15. [0HS]

Sia $(J, \leq)$ un insieme con ordinamento diretto. Decidiamo che un "aperto" in J è un insieme A che contiene una "semiretta" della forma $\{k \in J : k \geq j\}$ (per un $j \in J$) [†62]. Sia dunque τ la famiglia di tutti tali aperti, a cui aggiungiamo $\emptyset, J$. Mostrate che τ è una topologia. Questa topologia è Hausdorff? Quali sono i punti di accumulazione?

E8.b.5 Argomenti:punto di accumulazione, massimo, ordinamento diretto.Prerequisiti:3.d.15, 8.b.4. [0HT]

Trovate un semplice esempio di insieme $(J, \leq)$ con ordinamento diretto che ha massimo ma, associandovi la topologia τ_J dell'esempio precedente, non ha punti di accumulazione.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0HV']

E8.b.6 Argomenti:ordinamento diretto. Prerequisiti:3.d.13, 3.d.15, 3.d.24. [0HW]

Sia $(I, \leq)$ un insieme con ordinamento diretto e con un massimo che chiamiamo ∞. Chiamiamo $J = I \setminus \{\infty\}$ e assumiamo che J sia filtrante (con l'ordinamento indotto) e non vuoto. In questo caso proponiamo una topologia più fine. La topologia τ per I contiene:

- $\emptyset, I$;
- gli insiemi A che contengono una "semiretta", della forma $\{k \in I : k \geq j\}$, per un $j < \infty$ (che sono detti "intorni di ∞");
- i sottoinsiemi di I che non contengono ∞.

Mostrate che τ è una topologia. Questa topologia è Hausdorff? Mostrate che ∞ è l'unico punto di accumulazione.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0HX']

La precedente costruzione si può usare in questo modo.

Nota 8.b.7. *Sia $(J, \leq)$ un insieme (non vuoto) con ordinamento filtrante. Sappiamo da 3.d.24 che J non ha massimo. Estendiamo $(J, \leq)$ aggiungendo un punto "∞": poniamo $I = J \cup \{\infty\}$ e decidiamo che $x \leq \infty$ per ogni $x \in J$. Si verifica facilmente che $(I, \leq)$ è un ordinamento diretto, e ovviamente ∞ è il massimo di I.* †63 *Sia τ la topologia definita in 8.b.6. Sappiamo che ∞ è punto di accumulazione. Questa topologia può spiegare in senso topologico il limite già definito in 7.d.4, e altri esempi che vedremo in Sez. §8.g.* [0HY]

§8.c Topologie generate [2BJ]

Esercizi

E8.c.1 Prerequisiti:3.b.23. Sia X un insieme e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di parti di X; definiamo τ come l'intersezione di tutte le topologie che contengono $\mathcal{V}$ cioè [0J1]

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{\sigma, \sigma \supseteq \mathcal{V}, \sigma \text{ topologia in } X\}$$

Mostrate che τ è una topologia.

τ è la *"topologia generata da $\mathcal{V}$"*; è anche detta *"la più piccola topologia che contiene $\mathcal{V}$"*.

Si vedano anche gli esercizi 8.h.8.

§8.d Compattezza [2BF]

Definizione 8.d.1. *Un sottoinsieme $K \subseteq X$ è* compatto [†64] *se da ogni famiglia di aperti $(A_i)_{i\in I}$ la cui unione $\bigcup_{i\in I} A_i$ copre K si può scegliere un numero finito $J \subset I$ di aperti la cui unione $\bigcup_{i\in J} A_i$ copre K.* [0J3]

Se formulate questi esercizi in spazi metrici, potete usare il teorema 10.j.1 a pagina 138 per trattare con gli insiemi compatti.

Esercizi

E8.d.2 Supponiamo che lo spazio topologico sia compatto. Si mostri che ogni sottoinsieme chiuso è compatto. [0J4]

E8.d.3 Supponiamo che lo spazio topologico sia T_2 (si veda 8.4). Si mostri che ogni sottoinsieme compatto è chiuso. [0J5]

E8.d.4 `Argomenti:compatti.Prerequisiti:8.d.3.` `Note:`*Per il caso reale si può vedere 6.c.13. Per il caso di spazi metrici si veda 10.j.11..* [0J6]

Sia (X, τ) uno spazio topologico T_2 e siano $A_n \subseteq X$ sottoinsiemi compatti non vuoti tali che $A_{n+1} \subseteq A_n$: allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Cosa succede se lo spazio non è T_2? *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0J7']*

E8.d.5 `Prerequisiti:8.d.3.`Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici, con X compatto e Y uno spazio T_2. Sia $f : X \to Y$ continua e iniettiva; si mostri che f è un omeomorfismo fra X e la sua immagine $f(X)$. [0J8]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0J9']*

E8.d.6 `Prerequisiti:8.b.2.`Si mostri che la *retta estesa* (lo spazio topologico mostrato in 8.b.2) è compatta. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0JC']* [0JB]

E8.d.7 `Prerequisiti:8.b.3.`Si mostri che la *retta compattificata* (lo spazio topologico mostrato in 8.b.3) è compatta. [0JD]

Si veda anche l'esercizio 8.f.7 per una caratterizzazione degli insiemi compatti tramite le *reti*.

§8.e Connessione [2BG]

Definizione 8.e.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Dati $A, B \subseteq X$, per abbreviare le formule useremo la notazione (nonstandard)* [2BR]

- *A**i**B per dire che A, B hanno intersezione non vuota,*
- *A**d**B per dire che sono disgiunti, e*
- ***n**A per dire che A non è vuoto.*

[†61] Stiamo prendendo $A = X$ nella definizione 8.a.3.
[†62] Potremmo chiamare un tale A un *intorno di infinito*, come già si fece in Sez. §6.a.
[†63] Dunque $(I, \leq)$ non è un ordinamento filtrante.
[†64] Dalla definizione si ricava che l'insieme vuoto è compatto. Alcuni testo però escludono esplicitamente questo caso.

Ricordiamo la definizione di s/connessione *(Cap. 5 Sez. 11 degli appunti [3] oppure Cap. 2 in [23]).*

- *Lo spazio X è sconnesso se è l'unione disgiunta di due aperti non vuoti.*
- *Lo spazio X è connesso se non è sconnesso. Questo può essere scritto in molteplici modi, come ad esempio*

$$\forall A, B \in \tau, (\mathbf{n}A \ \wedge \ \mathbf{n}B \ \wedge \ X \subseteq A \cup B) \Rightarrow A\mathbf{i}B \, .$$

- *Un suo sottoinsieme $E \subseteq X$ nonvuoto è sconnesso se è sconnesso con la topologia indotta; cioè se E è coperto dall'unione di due aperti, ciascuno dei quali interseca E, ma che sono disgiunti in E; in simboli,*

$$\exists A, B \in \tau, E\mathbf{i}A \ \wedge \ E\mathbf{i}B \ \wedge \ E \subseteq A \cup B \ \wedge \ A \cap B \cap E = \emptyset \, . \tag{8.e.2}$$

- *Similmente $E \subseteq X$ nonvuoto è connesso se è connesso con la topologia indotta. Questo si può scrivere così*

$$\forall A, B \in \tau, (E\mathbf{i}A \ \wedge \ E\mathbf{i}B \ \wedge \ E \subseteq A \cup B) \Rightarrow A \cap B \cap E \neq \emptyset \, . \tag{8.e.3}$$

  o equivalentemente

$$\forall A, B \in \tau, (E \subseteq A \cup B \wedge A \cap B \cap E = \emptyset) \Rightarrow (E \subseteq A \vee E \subseteq B) \, . \tag{8.e.4}$$

Nota 8.e.5. *È consuetudine assumere che l'insieme vuoto sia connesso; questo caso però è di scarso interesse, in genere lo escluderemo nei seguenti esercizi.* [2BS]

Vi sono molte maniere equivalenti di esprimere le precedenti definizioni; le lasciamo come (semplici) esercizi. Questo Lemma inoltre potrebbe essere utile.

Lemma 8.e.6. *Se $Y \subseteq X$ è connesso e $Y \subseteq E \subseteq \overline{Y}$, allora E è connesso.* [2FY]

Per la dimostrazione sia veda il Teorema 5.11.6 in [3], o Theorem 20 nel Chap. 1 in [15].

Esercizi

E8.e.7 Mostrate che le condizioni (8.e.3),(8.e.4) in 8.e.1 sono equivalenti. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '2BV']* [2BT]

E8.e.8 Lo spazio X è sconnesso se e solo se è l'unione disgiunta di due chiusi non vuoti. [0JF]

E8.e.9 Un sottoinsieme $E \subseteq X$ nonvuoto è sconnesso se E è coperto dall'unione di due chiusi, ciascuno dei quali interseca E, ma che sono disgiunti dentro E. [0JG]

E8.e.10 `Prerequisiti:8.e.1`.X è sconnesso se e solo se esistono $A, B \subseteq X$ nonvuoti la cui unione copre X, ma tali che $\overline{B}\mathbf{d}A$ e $B\mathbf{d}\overline{A}$. [0JH]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0JJ']*

E8.e.11 Difficoltà:*.Supponiamo che $E \subseteq X$ sia sconnesso, possiamo supporre che [0JK]

$$\exists A, B \in \tau, E \mathbf{i} A \ \wedge \ E \mathbf{i} B \ \wedge \ E \subseteq A \cup B \ \wedge \ A \mathbf{d} B \,. \tag{8.e.12}$$

cioè che esistano di due aperti disgiunti, ciascuno dei quali interseca E e che E sia coperto dalla loro unione?

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0JM'][UNACCESSIBLE UUID '0JP']* Si veda anche 10.e.6.

E8.e.13 Sia (X, τ_X) uno spazio topologico, e $Y \subseteq X$ lo spazio topologico con la topologia indotta [2DK]

$$\tau_Y = \{A \cap Y : A \in \tau_X\} \,.$$

Fissato $E \subseteq Y$, si considerino queste affermazioni.

(cX) E è connesso nello spazio topologico (X, τ_X);

(cY) E è connesso nello spazio topologico (Y, τ_Y).

Le due asserzioni sono equivalenti?

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '113']*

E8.e.14 Note:*Proposizione 5.11.2 appunti [3].* [2BW]

Un insieme $E \subseteq X$ è disconnesso se e solo se esiste una funzione continua $f : E \to \mathbb{R}$ che assume esattamente due valori, ad esempio $f(E) = \{0, 1\}$.

E8.e.15 Note:*Teorema 5.11.7 appunti [3].* [0JQ]

Sia I una famiglia di indici. Si mostri che se E_i è una famiglia di sottoinsiemi connessi di X tali che

$$\forall i, j \in I \,,\ E_i \cap E_j \neq \emptyset \,,$$

allora $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ è connesso.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0JR']*

Definizione 8.e.16. *Dato $x \in X$, diremo che la **componente connessa** di X contenente x è l'unione di tutti i connessi che contengono x (e notiamo che il singoletto $\{x\}$ è connesso). L'esercizio precedente 8.e.15 mostra che la* componente connessa *è, per l'appunto, un connesso.* [0JT]

Esercizi

E8.e.17 Note:*Sezione 5.11.2 negli appunti [3].*Si mostri che due componenti connesse o sono disgiunte o coincidono. Dunque lo spazio X si partiziona in componenti connesse. [0JV]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0JW']*

E8.e.18 Sia $C \subseteq X$ un insieme chiuso; sia K una componente connessa di C: si mostri che K è chiuso. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0JZ']* [0JY]

E8.e.19 Si trovi un esempio di uno spazio (X, τ) dove vi è una componente connessa che non è aperta. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '2G0']* [2FZ]

E8.e.20 Sia ora (X, d) uno spazio metrico dove le palle aperte $B(x, r)$ sono anche chiuse. Si mostri che le componenti connesse di X sono tutti e solo i singoletti $\{x\}$. [0K0]

(Uno spazio dove gli unici connessi sono singoletti è detto *totalmente disconnesso*).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0K1']*

Si vedano anche gli esercizi in Sez. §10.e.

§8.f Reti [2B6]

Useremo i concetti di *ordinamento diretto*, *ordinamento filtrante* e *insieme cofinale* già discussi in Sez. §3.d.a. Sia nel seguito (Y, σ) uno spazio topologico Hausdorff.

Definizione 8.f.1. *Sia (Y, σ) spazio topologico Hausdorff. Sia $(J, \leq)$ un insieme con ordinamento filtrante (definita in 3.d.13). Sia $\varphi : J \to Y$ una **rete** (già incontrata in Sez. §7.d).* [0K4]

Si pone $\lim_{j \in J} \varphi(x) = \ell \in Y$ se e solo se, per ogni intorno V di ℓ in Y si ha che $\varphi(j) \in V$ definitivamente per $j \in J$.

La definizione di *definitivamente* è in 3.d.28, e significa che esiste $k \in J$ tale che per ogni $j \geq k$ si ha $\varphi(j) \in V$.

Anche in questo case vale quanto discusso nella nota 7.d.3.

Definizione 8.f.2. *Data una rete $x : J \to Y$, un punto $z \in Y$ si dice **punto limite** per x se esiste una sottorete $y : H \to Y$ tale che $\lim_{j \in H} y(j) = z$.* [2B4]

(Notate che "sottorete" si intende come nel caso generale visto alla fine di 7.d.5, dove $y = x \circ i$ per mezzo di una mappa $i : H \to J$ che soddisfa (7.d.6)).

Esercizi

E8.f.3 `Prerequisiti:3.d.24.` Sia J un insieme diretto ma non filtrante; allora sia $m \in J$ il suo massimo (che esiste per quanto visto in 3.d.24); se definiamo $\lim_{j \in J} \varphi(x)$ come in 8.f.1, mostrate che il limite esiste sempre e vale $\varphi(m)$. [0K5]

E8.f.4 Sia (Y, σ) spazio topologico Hausdorff, sia $A \subseteq Y$. Si mostri che $\overline{A}$ coincide con l'insieme di tutti i possibili limiti di reti $\varphi : J \to A$ (al variare della scelta di J e poi di φ). [0K6]

E8.f.5 Sia (Y, σ) spazio topologico Hausdorff, sia $A \subseteq Y$. Si mostri che $x \in Y$ è punto di accumulazione per A se e solo se esiste un J insieme filtrante e esiste una rete $\varphi : J \to A \setminus \{x\}$ tale che $\lim_{j \in J} \varphi(x) = x$. [0K7]

E8.f.6 `Prerequisiti:3.d.18,7.d.5.Difficoltà:**.` [2B7]

Sia (Y, σ) uno spazio topologico Hausdorff. Sia J un insieme filtrante e $x : J \to Y$ una rete in Y. Per ogni $\alpha \in J$ definiamo $E_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x_\beta : \beta \in J, \beta \geq \alpha\}$ e

$$E = \bigcap_{\alpha \in J} \overline{E_\alpha}$$

Mostrate che E coincide con l'insieme L dei punti limite (definito in 8.f.2).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '2FK']*

E8.f.7 `Prerequisiti:3.d.18,7.d.5,8.f.6.Difficoltà:**.` [0K8]

Sia (Y, σ) uno spazio topologico Hausdorff. Mostrate che Y è compatto se e solo se ogni rete a valori in Y ammette una sottorete convergente.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0K9']*

§8.g Continuità e limiti [2B8]

Definizione 8.g.1 (Limite). [†65] *Siano (X,τ) e (Y,σ) due spazi topologici, con (Y,σ) Hausdorff.* [†66] *Sia $E \subseteq X$ e $f : E \to Y$. Sia inoltre x_0 un punto di accumulazione di E in X. Si pone $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in Y$ se e solo se, per ogni intorno V di ℓ in Y, esiste U intorno di x_0 in X tale che $f(U \cap E \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.* [0KB]

Definizione 8.g.2. *Siano (X,τ) e (Y,σ) due spazi topologici, con (Y,σ) Hausdorff; sia $f : X \to Y$ una funzione.* [2B9]

*Si dice che f è **continua in** x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

*Si dice che f è **continua** se (equivalentemente)*

- *f è continua in ogni punto, cioè $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$ per ogni $y \in X$, oppure*
- *se $f^{-1}(A) \in \tau$ per ogni $A \in \sigma$.*

(Teor. 5.7.4 negli appunti [3].).

*Una funzione continua bigettiva $f : X \to Y$ tale che la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ sia di nuovo continua, è detta **omeomorfismo**.*

Esercizi

E8.g.3 Considerate questa affermazione. [2BB] *(Proposto il 2022-12)*

«Sia $f : X \to Y$ e $x_0 \in X$, allora f è continuo in x_0 quando, per ogni insieme aperto $B \subseteq Y$ con $f(x_0) \in B$, abbiamo che $f^{-1}(B)$ è aperto.»

Questa affermazione non è corretta.

Costruite un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua in $x_0 = 0$ ma tale che, per ogni $J = (a,b)$ intervallo limitato aperto non vuoto, $f^{-1}(J)$ non è aperto. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '2BC']*

E8.g.4 `Difficoltà:*.` [225]

Sia Y uno spazio topologico. Diciamo che Y soddisfa la proprietà (P) rispetto ad uno spazio topologico X quando soddisfa la condizione: per ogni $A \subseteq X$ denso ed per ogni coppia di funzioni continue $f,g : X \to Y$ tali che $f(a) = g(a)$ per ogni $a \in A$ si ha necessariamente che $f = g$.

Dimostrare che Y è di Hausdorff se e solo se soddisfa la proprietà (P) rispetto ad ogni spazio topologico X.

E8.g.5 `Prerequisiti:8.b.7.`Spiegate come la definizione 8.f.1 si può vedere come un caso particolare della 8.g.1. (Sugg. procedete come in nota 8.b.7 e ponete $E = J, X = I, x_0 = \infty$). [0KC]

E8.g.6 `Prerequisiti:8.g.5.`Siano X, Y spazi topologici Hausdorff. Sia $E \subseteq X$, sia $f : E \to Y$, sia x_0 un punto di accumulazione di E in X. [0KD]

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ allora, per ogni rete $\varphi : J \to X$ con $\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$ si ha $\lim_{j\in J} f(\varphi(j)) = \ell$.

[†65] Definizione 5.7.2 negli appunti [3].

[†66] Per avere unicità del limite e dunque dare un significato univoco a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ come elemento di Y.

- Consideriamo l'insieme filtrante J dato dagli intorni di x_0; [†67] consideriamo le reti $\varphi : J \to X$ con la proprietà che $\varphi(U) \in U \setminus \{x_0\}$ per ogni $U \in J$; notiamo che si ha $\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$.
  Se per ogni tale rete si ha $\lim_{j\in J} f(\varphi(j)) = \ell$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKF']

E8.g.7 Prerequisiti:8.f.3,8.g.5.Siano X, Y spazi topologici Hausdorff. Sia $f : X \to Y$, $x_0 \in X$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti. [OKG]

1. f è continua in x_0;
2. per ogni rete $\varphi : J \to X$ tale che
$$\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$$
si ha
$$\lim_{j\in J} f(\varphi(j)) = f(x_0) \quad .$$

Suggerimento per dimostrare che 2 implica 1. Supponiamo che x_0 sia punto di accumulazione. Consideriamo l'insieme filtrante J dato dagli intorni di x_0; consideriamo le reti $\varphi : J \to X$ con la proprietà che $\varphi(U) \in U$ per ogni $U \in J$; notiamo che si ha $\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKH']

§8.h Basi [2B5]

Definizione 8.h.1 (Base). *Dato uno spazio topologico (X, τ), una **base** [†68] è una collezione $\mathcal{B}$ di aperti (cioè $\mathcal{B} \subseteq \tau$) con la proprietà che ogni elemento di τ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.* [OKK]

Per esempio, se X è uno spazio metrico, allora la famiglia di tutte le palle aperte è una base.

Esercizi

E8.h.2 Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X; preso un aperto $A \in \tau$, per ogni $x \in A$ possiamo scegliere un $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x$, e tali che $A = \bigcup_{x\in A} B_x$. [OKM]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKN'][UNACCESSIBLE UUID 'OKP']

E8.h.3 Prerequisiti:8.h.2.Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X. Mostrate che, dato $x \in X$, [OKQ]
$$\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$
è un sistema fondamentale di intorni di x .

E8.h.4 Prerequisiti:8.a.5, 8.h.3, 8.h.2.Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X. Mostrate che, dato $A \subseteq X$, si ha che [OKS]
$$A^\circ = \bigcup \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq A\}$$

[†67] Il fatto che questo sia filtrante è stato mostrato in 3.d.24, 8.15 e 8.a.8
[†68] Si veda [15] pag. 46, o capitolo 5 sezione 6 definizione 5.6.4 negli appunti [3], o [44] per una introduzione.

mentre
$$\overline{A} = \{x \in X : \forall B \in \mathcal{B}, x \in B \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset\}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKT']

E8.h.5 Prerequisiti:8.h.2.Dato X, date $\mathcal{C}$ base per una topologia σ su X, e $\mathcal{B}$ base per una topologia β su X, si ha che $\sigma \supseteq \beta$ se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni $B \in \mathcal{B}, B \ni x$ esiste $C \in \mathcal{C}, C \ni x, C \subseteq B$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OM8'] [OM7]

E8.h.6 Prerequisiti:8.c.1.Sia $X = \{1, 2, 3\}$ e sia $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$; sia τ la più piccola topologia che contiene $\mathcal{B}$, mostrate che $\mathcal{B}$ non è una base per τ. [OKV]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKW']

È dunque interessante cercare di capire quando una famiglia $\mathcal{B}$ può essere base per una topologia.

E8.h.7 Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X; allora valgono le due proprietà seguenti. [OKX]

(a) $\underline{\bigcup}\mathcal{B} = X$ cioè l'unione di tutti gli elementi della base è X.

(b) Dati $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ esiste $B_3 \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKY']

E8.h.8 Prerequisiti:8.c.1,ZF:4.Viceversa sia X un insieme e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi che verifica le precedenti proprietà *(a),(b)* viste in 8.h.7. Sia σ la famiglia degli insiemi che si ottengono come unione di elementi di $\mathcal{B}$, in simboli [†69] [OKZ]

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \ : I \text{ famiglia di indici e } A_i \in \mathcal{B} \forall i \in I \right\} \ ;$$

si intende che anche $\emptyset \in \sigma$. Si mostri che σ è una topologia.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OM0']

E8.h.9 Prerequisiti:topologia generata 8.c.1, 8.h.7, 8.h.8.Riprendiamo 8.h.8. Sia di nuovo X un insieme e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi che verifica le precedenti proprietà *(a),(b)* viste in 8.h.7; sia τ la più piccola topologia che contiene $\mathcal{B}$. Si verifichi $\mathcal{B}$ è una base per τ. [OM1]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OM2']

Possiamo dunque dire che una famiglia che soddisfa *(a),(b)* è una base per la topologia che essa genera. Questo risponde all'interrogativo posto in 8.h.6.

E8.h.10 Prerequisiti:8.c.1,8.h.7,8.h.8. Siano ora $X_1, \ldots X_n$ spazi topologici con topologie rispettivamente $\tau_1, \ldots \tau_n$; sia $X = \prod_{i=1}^n X_i$ il prodotto cartesiano. Applichiamo i precedenti risultati per definire la **topologia prodotto** τ: questa si può vedere in due maniere equivalenti. [OM3]

[†69] Come già discusso in ZF:4, si potrebbe anche usare la notazione più compatta $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\underline{\bigcup}\mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}\right\}$.

- Unione di tutti i prodotti cartesiani di aperti [†70]

$$\tau = \Big\{ \bigcup_{j\in J} \prod_{i=1}^{n} A_{i,j} \,:\, A_{1,j} \in \tau_1, \dots A_{n,j} \in \tau_n \forall j \in J, J \text{ famiglie arbitrarie di indici} \Big\} \ .$$

- τ è la più piccola topologia che contiene i prodotti cartesiani di aperti.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0M4']

E8.h.11 Prerequisiti:8.h.10,8.h.7,8.h.8.Siano ora $X_1, \dots X_n$ spazi topologici con topologie rispettivamente $\tau_1, \dots \tau_n$ e siano $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots \mathcal{B}_n$ basi per questi spazi; sia $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ il prodotto cartesiano, e sia [0M5]

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} A_i \,:\, A_1 \in \mathcal{B}_1, A_2 \in \mathcal{B}_2, \dots A_n \in \mathcal{B}_n \right\}$$

la famiglia di tutti i prodotti cartesiani di elementi scelti dalle rispettive basi. Mostrate che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia prodotto. (Questo esercizio generalizza il precedente 8.h.10, prendendo $\mathcal{B}_i = \tau_i$).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0M6']

Vedete anche l'esercizio 10.b.33 per una applicazione al caso di spazi metrici.

E8.h.12 Prerequisiti:8.h.10,8.h.11,8.h.5. Siano ora, più in generale, I un'insieme non vuoto di indici, e siano (X_i, τ_i) spazi topologici , al variare di $i \in I$; siano $\mathcal{B}_i$ basi per τ_i. (La scelta $\mathcal{B}_i = \tau_i$ è ammissibile). [2F7]

Sia $X = \prod_{i\in I} X_i$ il prodotto cartesiano.

Definiamo la *topologia prodotto* τ su X, similmente a 8.h.10, ma con una differenza.

Una base $\mathcal{B}$ per τ è data dalla famiglia di tutti gli insieme della forma $A = \prod_{i\in I} A_i$ dove

$$\forall i \in I, A_i \in \mathcal{B}_i \vee A_i = X_i \quad ,$$

e inoltre $A_i = X_i$ eccetto eventualmente un numero finito di i.

Dimostrate che $\mathcal{B}$ soddisfa i requisiti visti in 8.h.7, dunque è una base per la topologia τ che essa genera. Dimostrate che la topologia prodotto τ non dipende dalla scelta delle basi $\mathcal{B}_i$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2F8']

E8.h.13 Prerequisiti:3.d.15, 8.h.7. Verifichiamo che quanto espresso in 8.15 vale anche per le "basi". Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X; consideriamo l'ordinamento discendente fra insiemi (formalmente $A \preceq B \iff A \supseteq B$); con questo ordinamento $(\mathcal{B}, \preceq)$ è un insieme diretto, il cui minimo è $\emptyset$. Supponiamo ora che la topologia sia Hausdorff. Preso poi $x \in X$, sia $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{B} \,:\, x \in A\}$ la famiglia degli elementi della base che contengono x: mostrate che $\mathcal{U}$ è un insieme diretto; mostrate che ha minimo se e solo se il singoletto $\{x\}$ è aperto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0MB'] [0M9]

E8.h.14 Si consideri un insieme totalmente ordinato X (con almeno due elementi), e [2F5]

[†70] Così definita all'inizio della sezione 6 del capitolo 5 degli appunti [3].

la famiglia $\mathcal{F}$ di tutti gli intervalli aperti

$$(x,\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in X : x < z\} \ , \ (-\infty,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in X : z < y\} \ , \\ (x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in X : x < z < y\} \qquad (8.h.15)$$

per tutti $x, y \in X$. (*Cf.* 3.d.45.) Dimostrare che questa è una base per una topologia, *i.e.* che soddisfa 8.h.8. Quindi $\mathcal{F}$ è una base per la topologia τ che essa genera. Questa topologia τ è chiamata **topologia d'ordine**.

Se X non ha né massimo né minimo, allora gli intervalli (x, y) da soli sono già una base per τ. Questo è il caso delle usuali topologie in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$.

E8.h.16 Prerequisiti:8.h.12.Si considerino spazi topologici (X_i, τ_i), ciascuno con la topologia discreta (e ciascuno X_i ha almeno due elementi). Sia $I = \mathbb{N}$ o $I = \{0, 1, \dots N\}$; definiamo $X = \prod_{i\in I} X_i$ il prodotto cartesiano. Definiamo la *topologia prodotto* τ su X, come definito in 8.h.12. Mostrate una semplice base per questa topologia. Inoltre, se $I = \mathbb{N}$, mostrate che la topologia τ non è la topologia discreta. [2FD]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2FF']

E8.h.17 Prerequisiti:8.h.14,8.h.12,3.d.34,8.h.12. [2F9]

Si considerino insiemi totalmente ordinati $(X_i, \le_i)$ (con almeno due elementi), e le associate *topologia d'ordine* τ_i.

Sia $I = \mathbb{N}$ o $I = \{0, 1, \dots N\}$; definiamo $X = \prod_{i\in I} X_i$ il prodotto cartesiano.

Si considerino queste due topologie.

- Definiamo la *topologia prodotto* τ su X, come definito in 8.h.12.
- Dotiamo X dell' ordine lessicografico $\preceq$, e poi della topologia d'ordine σ. (Si rivedano 3.d.34,8.h.12)

Quale relazione di inclusione si ha fra σ e τ?

Se ciascun X_i è finito, dimostrate che queste due topologie coincidono [†71].

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2FC']

§8.i Spazi primo- e secondo-numerabili [2BK]

Definizione 8.i.1. *Uno spazio topologico soddisfa il primo assioma di numerabilità se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni che sia numerabile.* [0MC]

Definizione 8.i.2. *Uno spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità se esiste una base numerabile.* [0MD]

Esercizi

E8.i.3 Difficoltà:*.Se (X, τ) soddisfa il secondo assioma di numerabilità, se $A \subseteq X$ è composto solo da punti isolati, allora A ha cardinalità numerabile o finita. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0MG'] [0MF]

E8.i.4 Prerequisiti:8.h.4. Se (X,τ) soddisfa il secondo assioma di numerabilità, dato $A \subseteq X$ esiste un sottoinsieme numerabile $B \subseteq A$ tale che $\overline{B} \supseteq A$. In particolare l'intero spazio X ammette un sottoinsieme numerabile denso: si dice che X è *separabile*. Il viceversa vale ad esempio negli spazi metrici, si veda 10.b.28. Si veda anche 10.g.3 per un applicazione in $\mathbb{R}^n$. [0MH]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0MJ']*

Gli assiomi di numerabilità ritorneranno negli esercizi 10.b.27 e 10.b.28.

§8.j Spazi non primo-numerabili [2BM]

Esercizi

E8.j.1 [†72] Prerequisiti:8.h.12,8.h.1.Difficoltà:*.Sia Ω un insieme non vuoto; consideriamo $X = \mathbb{R}^\Omega$. [0MM]

1. Siano
$$U^f_{E,\rho} = \{g \in X, \forall x \in E, |f(x) - g(x)| < \rho\}$$
dove $f \in X$, $\rho > 0$ e $E \subset \Omega$ finito. Mostrate che la famiglia di questi $U^f_{E,\rho}$ soddisfa i requisiti di 8.h.8, ed è dunque una *base* per una topologia τ (Sugg. usate 8.h.12). Questa topologia è la *topologia prodotto* delle topologie di $\mathbb{R}$.

   In particolare per ciascun $f \in X$ gli insiemi $U^f_{E,\rho}$ sono un sistema fondamentale di intorni.
2. Verificate che la topologia è T_2.
3. Notate che X è uno spazio vettoriale, e mostrate che l'operazione di somma è continua, come operazione $X \times X \to X$; a questo scopo, mostrate che se $f, g \in X, h = f + g$, per ogni intorno V_h di h esistono intorni V_f, V_g di f, g tali che $V_f + V_g \subseteq V_h$.
4. Dati $B_i \subset \mathbb{R}$ aperti non-vuoti , uno per ciascun $i \in \Omega$, mostrate che $\prod_i B_i$ è aperto se e solo se $B_i = \mathbb{R}$ salvo al più finiti i.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0MN']*

E8.j.2 Prerequisiti:8.h.1,8.j.1,8.f.1.Difficoltà:*.Sia Ω un insieme infinito più che numerabile; consideriamo $X = \mathbb{R}^\Omega$ con la topologia τ vista in 8.j.1. [2BP]

1. Mostrate che ogni punto in (X,τ) non ammette un sistema fondamentale numerabile di intorni.
2. Posto
$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in X, f(x) \neq 0 \text{ per al più numerabili } x \in \Omega\} \qquad (8.j.3)$$
mostrate che si ha $\overline{C} = X$;
3. che se $(f_n) \subset C$ e $f_n \to f$ puntualmente allora $f \in C$.

[†71] Notate che la topologia d'ordine su un insieme finito coincide con la topologia discreta; usate 8.h.16.
[†72] Questi due esercizi 8.j.1,8.j.2, sono tratti da un testo originalmente pubblicato dal Prof. Ricci in http://dida.sns.it/dida2/cl/08-09/folde0/pdf9 nel Marzo 2014.

4. Sia I l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di Ω, questo è un insieme filtrante se ordinato per inclusione; consideriamo la rete

$$\varphi : I \to X \quad , \varphi(A) = \mathbb{1}_A$$

si ha che $\forall A \in I, \varphi(A) \in C$ ma

$$\lim_{A \in I} \varphi(A) = \mathbb{1}_X \notin C \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2BQ']

E8.j.4 Difficoltà:*.Restringiamo la topologia descritta nell'esempio precedente all'insieme $Y = [0,1]^{[0,1]}$ (cioè, restringiamo $\mathbb{R}$ a $[0,1]$, e poniamo $\Omega = [0,1]$). Trovate una successione $(f_n) \subset Y$ che non ammetta una sottosuccessione convergente. [0MP]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0MQ']

Ricordiamo la definizione 8.d.1: uno spazio X è "compatto per ricoprimenti" *se, per ogni $(A_i)_{i \in I}$ famiglia di aperti tale che $\bigcup_{i \in I} A_i = X$, esiste una sotto famiglia finita $J \subset I$ tale che $\bigcup_{i \in J} A_i = X$. Sappiate che, per un importante teorema dovuto a Tychonoff, questo spazio Y è "compatto per ricoprimenti". Questo esercizio vi mostra invece che Y non è "compatto per successioni".*

§9 Miscellanea [2FB]

Questa sezione ospita materiale che non rientrava pienamente in nessun'altra sezione.

§9.a Poligoni [2G3]

Presentiamo alcune semplici proprietà geometriche dei poligoni, che possono essere rigorosamente provate sia con metodi analitici (incorporando oggetti geometrici come sottoinsiemi del piano cartesiano), o metodi puramente geometrici (nello spirito di [12]).

Nel seguito useremo il celebre Teorema di Jordan; una semplice dimostrazione si può trovare in [27].

Teorema 9.a.1. *Sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva semplice chiusa nel piano e $C = \varphi([0,1])$ sia il suo supporto. (Si veda* 21.a.1 *per la definizione). Il complementare $\mathbb{R}^2 \setminus C$ è costituito esattamente da due componenti connesse, che sono aperte. Una di questi componenti è limitata (ed è chiamato* "l'interno della curva", *o anche* "la regione delimitata dalla curva"*) e l'altro è illimitato (l'esterno). La curva C è la frontiera di ognuna delle due componenti.* [2FW]

La dimostrazione del Teorema di Jordan inizia spesso con un semplice Lemma (di nuovo, si veda [27]; o il Teorema 6 in [12]).

Definizione 9.a.2. *Chiameremo* "curva poligonale" *una curva $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ nel piano, spezzata (cioè, lineare a tratti) e non autointersecantesi (cioè, iniettiva). Analiticamente, vi sono punti $V_0, V_1, \dots V_n$ (chiamati "vertici") nel piano, e vi sono $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = 1$ tali che* [2G6]

$$\varphi(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} V_{i+1} + \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} V_i \quad \text{quando} \quad t_i \le t \le t_{i+1} \ .$$

La curva poligonale *è chiusa se $\varphi(0) = \varphi(1)$. In questo caso richiediamo che φ sia iniettiva quando ristretta a $[0,1)$.*

Lemma 9.a.3. *Sia $C = \varphi([0,1])$, sia P la regione delimitata dalla curva poligonale chiusa, e sia E l'esterno; ricordiamo che C, P, E è una partizione del piano. Fissiamo $A, B \notin C$ e supponiamo che il segmento AB intersechi C in k punti, nessuno dei quali sia un vertice; allora, se k è dispari A, B sono in regioni diverse, cioè $A \in P \Leftrightarrow B \notin P$; se k è pari, A, B sono nella stessa regione.* [2FX]

Definizione 9.a.4. *Un* poligono *è la figura piana delimitata da una curva poligonale chiusa.* †73 [2FN]

Nota 9.a.5. *Consideriamo una curva poligonale, con n vertici $V_1, \dots V_n$. Quanti lati ha il poligono che essa delimita?* [2CD]

Dipende. Se alcuni vertici in sequenza sono allineati, allora la figura nel piano avrà visivamente meno di n lati e vertici. Per questo motivo, distingueremo il poligono non etichettato *(che è il sottoinseme del piano) dal* poligono etichettato *(in cui teniamo conto anche della posizione dei vertici); il* poligono etichettato *è meno intuitivo, ma la trattazione matematica è più semplice. Si veda la figura* 3 a pagina 122.

Figura 2: Esempi di poligoni con molti lati (pari o dispari) e solo due orecchie. Figura per 9.a.8

Esercizi

E9.a.6 Difficoltà:*. Sia $n \geq 3$ intero; consideriamo un poligono di $n+1$ vertici. Si mostri che può essere tagliato in due poligoni con rispettivamente h, k lati, e $3 \leq h \leq n, 3 \leq k \leq n$. Per "tagliare" intendiamo, collegare due vertici (non contigui) del poligono con un segmento che passa internamente, e che non tocca altri vertici o lati. L'intersezione dei due poligoni è il segmento BD, e non hanno altri punti in comune. [29Z]

Sugg. esiste almeno un vertice B in cui l'angolo interno β è "convesso" (cioè $0 < \beta \leq \pi$ radianti); siano A, C i vertici contigui; si ragioni sul triangolo ABC.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1QT']*

E9.a.7 Dimostrate per induzione che la somma degli angoli interni di un poligono di $n \geq 3$ lati è $(n-2)\pi$. [1XH]

(La dimostrazione è facile se il poligono è convesso; nel caso generale 9.a.8 può essere utile).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1XM']*

E9.a.8 Un *orecchio* di un poligono è il triangolo ABC formato da tre vertici consecutivi A, B, C del poligono, tali che il segmento AC si trova all'interno del poligono. Ciò implica che il triangolo ABC non contiene alcun punto della curva poligonale al suo interno; e che i due segmenti AB, BC possono essere rimossi dal poligono e sostituiti con AC per creare un nuovo poligono. Due orecchie sono *disgiunte* se le loro parti interne non si intersecano, o in modo equivalente se non hanno un lato in comune. [0JN]

Dimostrate il *teorema delle due orecchie*: ogni poligono (con almeno quattro vertici) ha almeno due orecchie disgiunte. (Vedere [18, 42] per più dettagli).

(Sugg. considerate poligoni etichettati, per evitare le complicazioni di situazioni come quella presentata in figura 3 nella pagina seguente.)

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '2FV']*

E9.a.9 Difficoltà:*. Si mostri che ogni poligono può essere *"triangolato"*, cioè decomposto come unione di triangoli che non si sovrappongono. [†74] [1XW]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1XX']*

E9.a.10 Di nuovo, diremo che un vertice B è "convesso" se l'angolo interno β è convesso (cioè $0 < \beta \leq \pi$ radianti). Dimostrate che il poligono è convesso se e solo se tutti i suoi vertici sono convessi. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '2G5']* [2FP]

[†73] La curva poligonale è parte del poligono. Vi sono anche altre definizioni, si veda ad esempio in [60].
[†74] I triangoli possono sovrapporsi lungo i lati e/o nei vertici.

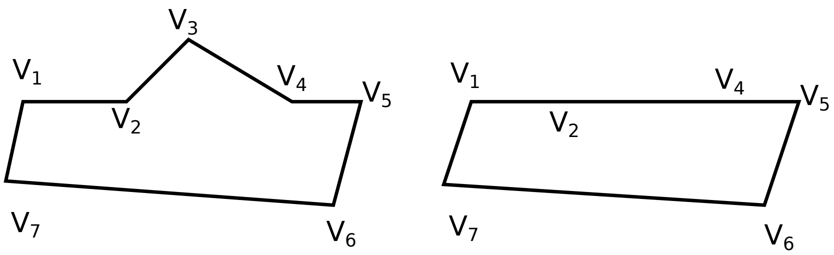


Figura 3: Un poligono per cui la rimozione di un orecchio fa decrescere il numero di lati (non etichettati) da 7 a 4.

§9.b Insieme di Cantor

Sia nel seguito $C \subset \mathbb{R}$ l'insieme ternario di Cantor. Non riportiamo qui la costruzione (che si trova su innumerevoli testi, ad esempio in Sez. 2.44 in [23]; e anche su Wikipedia [53]).

Esercizi

E9.b.1 *(Replaces 0W4)* Mostrate che C è chiuso, e composto solo di punti di accumulazione; dunque è un *insieme perfetto*. [09S]

E9.b.2 Sia $I = \{0, 2\}$ e $X = I^{\mathbb{N}}$, si consideri la mappa $F : X \to C$ data da [09T]

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-1} x_n \ .$$

Si mostri che è una bigezione.

Dotiamo ora X della topologia definita in 8.h.17. [†75]. Si mostri che F è un omeomorfismo.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '09V']*

Si vedano anche 11.22, 10.m.16, 10.b.42.

[†75] Notate che la topologia d'ordine su $I = \{0, 2\}$ coincide con la topologia discreta.

§10 Spazi metrici [OMR]

§10.a Definizioni [2CC]

Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme (non vuoto) con associata una distanza d.

Definizione 10.a.1. *Una **distanza** è una funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$ che gode delle seguenti proprietà:* [OMS]

- $d(x, x) = 0$;
- *(proprietà di separazione) se $d(x, y) = 0$ allora $x = y$;*
- *(simmetria) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;*
- *(diseguaglianza triangolare) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.*

Un esempio è dato da $\mathbb{R}^n$ con la distanza Euclidea $d(x, y) = |x - y|$.

Definizione 10.a.2. *Dati una successione $(x_n)_n \subseteq X$ e $x \in X$,* [OMT]

- *diremo che **"$(x_n)_n$ converge a x"** se $\lim_n d(x_n, x) = 0$; scriveremo anche $x_n \to_n x$ per indicare che la successione converge a x.*
- *Diremo che **"$(x_n)_n$ è una successione di Cauchy"** se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \,, \ \forall n, m \ge N \ \ d(x_n, x_m) < \varepsilon \ .$$

Esempio 10.a.3. *Dato un insieme X, possiamo sempre associargli la **distanza discreta*** [2C1]

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \ne y \end{cases}$$

La topologia generata è la topologia discreta *in cui tutti i sottoinsiemi di X sono aperti.*

[Nota. Se non siete familiari con il concetto di spazio metrico, potete assumere che $X = \mathbb{R}^n$ e $d(x, y) = |x - y|$ in tutti gli esercizi.]

Esercizi

E10.a.4 Data una successione $(x_n)_n \subseteq X$ mostrate che se converge a un punto allora è di Cauchy. [OMV]

E10.a.5 Data una successione $(x_n)_n \subseteq X$ mostrate che: se converge a x e converge a y, allora $x = y$. [OMW]

Questo risultato è noto come *Teorema dell'unicità del limite*.

E10.a.6 Generalizziamo la definizione di *spazio metrico* assumendo che $d : X \to [0, \infty]$ (gli altri assiomi sono uguali). Mostrate che la relazione $x \sim y$ definita da [OMX]

$$x \sim y \iff d(x, y) < \infty$$

è una relazione di equivalenza, e che le classi di equivalenza sono aperte, e dunque sono sconnesse una dall'altra.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'OMY']*

E10.a.7 Date f, g continue su $\mathbb{R}$, si ponga [OMZ]

$$d(f, g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \ .$$

Si dimostri che d è una distanza su $X = C(\mathbb{R})$, nel senso esteso dell'esercizio 10.a.6.

Sia $f \sim g \iff d(f, g) < \infty$ come prima, si mostri che la famiglia delle classi di equivalenza $X/_{\sim}$ ha la cardinalità del continuo.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'ONO']*

E10.a.8 Prerequisiti:10.b.21.Note:*Vedere anche eserc. 15.d.2.* Supponiamo che $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sia monotona debolmente crescente e subadditiva, cioè $\varphi(t) + \varphi(s) \geq \varphi(t + s)$ per ogni $t, s \geq 0$; e supponiamo che $\varphi(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. [ON1]

Allora $\varphi \circ d$ è ancora una distanza. Esempi: $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $\varphi(t) = t/(1 + t)$, $\varphi(t) = \arctan(t)$, $\varphi(t) = \min\{t, 1\}$.

Mostrate inoltre che se φ è continua in zero allora la topologia associata è la stessa. [†76]
Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'ON2']*

E10.a.9 Se $(x_n)_n \subset X$ è una successione e $x \in X$, si mostri che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ se e solo se, per ogni sotto–successione n_k esiste una sotto–sotto–successione n_{k_h} tale che $\lim_{h\to\infty} x_{n_{k_h}} = x$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID 'ON4']* [ON3]

E10.a.10 Una successione $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy se e solo se [ON5]

$$\lim_{N\to\infty} \sup\{d(x_n, x_m) : n \geq N, m \geq N\} = 0 \ .$$

E10.a.11 Una successione $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy se e solo se esiste una successione ε_n con $\varepsilon_n \geq 0$ e $\varepsilon_n \to_n 0$ per cui per ogni n e ogni $m \geq n$ si ha $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon_n$. [ON6]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'ON7']*

E10.a.12 Se $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy e esistono x e una sottosuccessione n_m tale che $\lim_{m\to\infty} x_{n_m} = x$ allora $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. [ON8]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'ON9']*

Questo "lemma" è usato in alcune dimostrazioni importanti, ad esempio per mostrare che uno spazio metrico compatto è anche completo.

E10.a.13 Sia $\varepsilon_n > 0$ una successione decrescente infinitesima. Se $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy esiste una sottosuccessione n_k tale che [ONC]

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall h \in \mathbb{N},\ h > k \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_h}) \leq \varepsilon_k \ .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'OND']* Questa proprietà viene spesso usata ponendo $\varepsilon_n = 2^{-n}$, o altra successione la cui serie converge.

E10.a.14 Sia $(x_n)_n$ una successione tale che $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$: si provi che è una successione di Cauchy. [ONF]

Confrontate questo esercizio, il precedente 10.a.13 nel caso in cui $\sum_n \varepsilon_n < \infty$, e l'esercizio 10.a.12.

E10.a.15 Se $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy, $(y_n) \subset X$ è un'altra successione, e $d(x_n, y_n) \to_n 0$, allora $(y_n) \subset X$ è una successione di Cauchy. [ONG]

E10.a.16 Preso (X, d) uno spazio metrico, si mostri che d è continua (come funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$). Si può anzi mostrare che è lipschitziana, associando a $X \times X$ [ONH]

$$\hat{d}(x, y) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2), \text{ per } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X \times X .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'ONK']*

E10.a.17 Prerequisiti:6.c.11, 15.d.2,10.a.11.Difficoltà:*.Note:*Esercizio 2, compito 9 Luglio 2011.* [ONM]

Sia $\alpha(x)$ una funzione continua su $\mathbb{R}$, limitata e strettamente positiva. Date f, g continue su $\mathbb{R}$, si ponga

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\min\{\alpha(x), |f(x) - g(x)|\} \right) .$$

Si dimostri che d è una distanza su $C(\mathbb{R})$ e che $\big(C(\mathbb{R}), d\big)$ è completo. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID 'ONP']*

E10.a.18 Note:*Esercizio 2, compito 25 Marzo 2017.* [ONQ]

Si dimostri che le seguenti proprietà sono equivalenti per uno spazio metrico X:

- ogni successione di elementi di X ammette una sottosuccessione di Cauchy;
- il completamento X^* di X è compatto.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'ONR']*

§10.b Topologia in spazi metrici [2C2]

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 10.b.1 (palla,disco). *Siano dati $x \in X, r > 0$; indicheremo con $B(x, r)$ la **palla**,* [ONW]

$$B(x, r) \stackrel{def}{=} \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

che è anche indicata con $B_r(x)$; e con

$$D(x, r) \stackrel{def}{=} \{y \in X : d(x, y) \le r\}$$

*il **disco**, che è anche indicato con $\overline{B}_r(x)$.*

Definizione 10.b.2. *Per gli esercizi seguenti definiamo che* [ONX]

1. *un insieme E è **aperto** se*

$$\forall x_0 \in E, \exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq E \quad . \tag{10.b.3}$$

Si mostra che $\emptyset, X$ sono aperti; l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto; l'unione di un numero arbitrario di aperti è un aperto. Dunque questi aperti formano una topologia.

†76 Si veda la successiva Sez. §10.b per un riepilogo delle definizioni riguardo alla topologia in spazi metrici: in particolare sarà utile il 10.b.21.

2. *La **parte interna** E° di un insieme E è*

$$E^\circ = \left\{x \in E \,:\, \exists r > 0, B_r(x) \subseteq E\right\}; \tag{10.b.4}$$

si verifica facilmente che $E^\circ \subseteq E$, e che E è aperto se e solo se $E^\circ = E$ (esercizio 10.b.13).

3. *Un insieme è **chiuso** se il complementare è aperto.*

4. *Un punto $x_0 \in X$ è **aderente** a E se*

$$\forall\, r > 0\,, \quad E \cap B_r(x_0) \neq \emptyset \quad .$$

5. *La **chiusura** $\overline{E}$ di E è l'insieme dei punti aderenti; si verifica facilmente che $E \subseteq \overline{E}$; si mostra che $\overline{E} = E$ se e solo se E è chiuso (esercizio 10.b.17).*

6. *A si dice **denso in** B se $\overline{A} \supseteq B$, cioè se per ogni $x \in B$ e per ogni $r > 0$ l'intersezione $B_r(x) \cap A$ è non vuota.*

Notate che, avendo la definizione operativa (10.b.3) di "aperto", allora gli assiomi (nella definizione 8.2) in questo caso diventano teoremi.

Esercizi

E10.b.5 `Argomenti:palle.` [0NZ]

Dimostrate che

$$B_\rho(x) \subseteq B_r(x_0) \tag{10.b.6}$$

per ogni $x \in B_\rho(x_0)$ e per ogni $0 < \rho \le r - d(x, x_0)$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0P0']*

E10.b.7 `Argomenti:palle, dischi.` Siano $x_1, x_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$, se $d(x_1, x_2) \ge r_1 + r_2$ allora [0P1]

$$B_{r_1}(x_1) \cap D_{r_2}(x_2) = \emptyset \quad . \tag{10.b.8}$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0P2']*

E10.b.9 `Argomenti:parte interna. Prerequisiti:10.b.5.` Mostrate che $B_r(x)$ è un aperto usando la definizione (10.b.3). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0P4']* [0P3]

E10.b.10 Si mostri che uno spazio metrico è T_2 cioè Hausdorff (si veda la definizione in 8.4). [0P5]

E10.b.11 Se $A = B^c$ allora mostrate che $(\overline{B})^c = A^\circ$ (usando le definizioni di questa sezione). [0P6]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0P7']*

E10.b.12 `Prerequisiti:10.b.11.` Mostrate che le nozioni di *parte interna* e *chiusura* viste qui sopra sono equivalenti a quelle presentate nella definizione 8.2. [0P8]

E10.b.13 `Argomenti:parte interna.` Mostrare che E è aperto se e solo se $E^\circ = E$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0PC']* [0PB]

E10.b.14 Argomenti:parte interna. Mostrate che se $A \subseteq B \subseteq X$ e A è aperto allora $A \subseteq B^\circ$ usando la definizioni sopra riportate. [0PD]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0PF']*

E10.b.15 Argomenti:parte interna. Mostrate che se $A \subseteq B \subseteq X$ allora $A^\circ \subseteq B^\circ$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0PH']* [0PG]

E10.b.16 Argomenti:parte interna.Prerequisiti:10.b.9,10.b.14. [0PJ]

Dato X spazio metrico e $A \subseteq X$, mostrate che

$$A^\circ = (A^\circ)^\circ \quad ,$$

usando la definizioni sopra riportate.

Per quanto detto in 10.b.13, questo equivale a dire che A° è un aperto.

(Per il caso di X spazio topologico, si veda il 8.11)

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0PK']*

E10.b.17 Argomenti:parte interna. [0PM]

Mostrare che $\overline{E} = E$ se e solo se E è chiuso.

E10.b.18 Argomenti:chiusura. Prerequisiti:10.b.15,10.b.11.*(Replaces 0PN)* [0PP]

Mostrate che se $B \subseteq A \subseteq X$ allora $\overline{B} \subseteq \overline{A}$; usando la definizioni sopra riportate, oppure per passaggio al complementare and using 10.b.15.

E10.b.19 Argomenti:chiusura.Prerequisiti:10.b.11, 10.b.18. [0PQ]

Dato X spazio metrico e $A \subseteq X$, mostrate che

$$\overline{A} = \overline{\left(\overline{A}\right)}$$

sia per passaggio al complementare rispetto al 10.b.16, sia usando la definizione di $\overline{A}$ come *"insieme dei punti aderenti"*.

Per quanto detto in 10.b.17, questo equivale a dire che $\overline{A}$ è un chiuso.

E10.b.20 Sia $E \subseteq X$, allora E è uno spazio metrico con la distanza ristretta $\tilde{d} = d|_{E\times E}$. [0PR]

Mostrate che $A \subseteq E$ è aperto in $(E, \tilde{d})$ (secondo la definizione all'inizio di questa sezione) se e solo esiste $V \subseteq X$ aperto in (X, d) per cui $V \cap E = A$.

(Il secondo modo di definire "aperto" è usato nella topologia).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '2GD']*

E10.b.21 Prerequisiti:8.h.5.Sia X un insieme con due distanze d_1, d_2; siano τ_1, τ_2 rispettivamente le topologie indotte. Si ha che $\tau_1 \subseteq \tau_2$ se e solo se [0PS]

$$\forall x \in X\ \forall r_1 > 0\ \exists r_2 > 0 \ :\ B^2(x, r_2) \subseteq B^1(x, r_1)$$

dove

$$B^2(x, r_2) = \{y \in X \, : \, d^2(x, y) < r_2\} \quad , \quad B^1(x, r_1) = \{y \in X \, : \, d^1(x, y) < r_1\} \quad .$$

Notiamo che questo esercizio è l'analogo in spazi metrici del principio 8.h.5 per le basi di topologie.

E10.b.22 Prerequisiti:8.h.10, 10.b.21, 12.8, 12.a.4,12.a.5. [0PT]

Presi $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ spazi metrici, sia $X = X_1 \times \cdots \times X_n$.

Sia φ una delle norme definite in eqn. (§12.a) in Sez. §12.a. Due possibili esempi sono $\varphi(x) = |x_1| + \cdots + |x_n|$ oppure $\varphi(x) = \max_{i=1\ldots n} |x_i|$.

Definiamo infine per $x, y \in X$

$$d(x, y) = \varphi\big(d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\big) \quad . \tag{10.b.23}$$

Si mostri che d è una distanza; si mostri che la topologia in (X, d) coincide con la topologia prodotto (si veda 8.h.10).

Si noti che questo approccio generalizza il modo con cui viene definita la distanza Euclidea fra punti in $\mathbb{R}^n$ (prendendo $X_i = \mathbb{R}$ e $\varphi(z) = \sqrt{\sum_i |z_i|^2}$). Ne deduciamo che la topologia di $\mathbb{R}^n$ è il prodotto delle topologie di $\mathbb{R}$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0PX']*

Si veda anche l'esercizio 10.b.33, che riformula quanto sopra usando il concetto di *basi di topologie*.

E10.b.24 Prerequisiti:10.b.7,10.a.16. [0PY]

Sia $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \le r\}$ il disco, si mostri che è chiuso.

Sia $S(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) = r\}$ la sfera, si mostri che è chiusa.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0PZ']*

E10.b.25 Prerequisiti:10.b.26,10.b.9,10.b.24, 10.b.18.Sia $r > 0$. [0Q0]

Sia $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \le r\}$ il disco; si mostri che $\overline{B(x, r)} \subseteq D(x, r)$ e che $B(x, r) \subseteq D(x, r)^\circ$.

Sia $S(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) = r\}$ la sfera; si mostri che $\partial B(x, r) \subseteq S(x, r)$.

Si trovino esempi di spazi metrici in cui non valgono le uguaglianze (una, o entrambe).

Si trovi un esempio di spazio metrico in cui vi è un disco che è aperto[†77].

(Si veda anche 10.g.1 per il caso dello spazio $\mathbb{R}^n$). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0Q1'][UNACCESSIBLE UUID '0Q2']*

E10.b.26 Prerequisiti:8.a.9.Dato $A \subseteq X$ sottoinsieme di uno spazio metrico, si ha che $x \in \partial A$ se e solo se esistono successioni $(y_n) \subseteq A$ e $(z_n) \subseteq A^c$ tali che $y_n \to_n x$ e $z_n \to_n x$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0Q4']* [0Q3]

E10.b.27 Prerequisiti:Sezione §8.i. Trovate un esempio di spazio metrico (M, d) che non soddisfi il secondo assioma di numerabilità, cioè tale che non esiste una base numerabile per la topologia associata a (M, d). [0Q5]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0Q6']*

E10.b.28 Prerequisiti:Sezione §8.i.Sia (M, d) uno spazio metrico e supponiamo che esista $D \subseteq M$ che sia numerabile e denso. In questo caso si dice che (M, d) è *separabile*. Mostrate che (M, d) soddisfa il secondo assioma di numerabilità. [0Q7]

Il viceversa è vero in qualunque spazio topologico, si veda 8.i.4.

E10.b.29 Prerequisiti:10.b.14,10.b.18, 8.13, 10.b.11.Difficoltà:*. [0Q8]

Sia X è uno spazio metrico, e $A \subseteq X$. Vogliamo studiare la operazione "apre-chiude" $\overline{(A^\circ)}$ (che è la chiusura della parte interna di A).

- Mostrate un semplice esempio in cui $\overline{(A^\circ)}$ non è contenuto ne contiene A.
- Scrivete poi una caratterizzazione di $\overline{(A^\circ)}$ usando successioni e palle.
- Usatela per mostrare che l'operazione "apre-chiude" è idempotente, cioè, se $D = \overline{(A^\circ)}$ e poi $E = \overline{(D^\circ)}$ allora $E = D$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Q9'][UNACCESSIBLE UUID '0QB']

E10.b.30 Prerequisiti:10.d.3.Mostrate che, per ogni insieme chiuso $C \subseteq X$ esistono numerabili insiemi aperti A_n tali che $\bigcap_n A_n = C$. [0QC]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0QD']

Un insieme ottenuto come intersezione di numerabili aperti è noto come "un insieme G_δ". Il precedente esercizio mostra che in uno spazio metrico ogni chiuso è un G_δ.

Passando al complementare si ottiene questa affermazione. Un insieme ottenuto come unione di numerabili chiusi è noto come "un insieme F_σ". Il precedente esercizio mostra che in uno spazio metrico ogni aperto è un F_σ.

Si veda anche la sezione §14.d.

E10.b.31 Difficoltà:**.Trovate un esempio di spazio metrico in cui per ogni $x \in X, r > 0$ si ha che $B_r(x)$ è un chiuso, ma la topologia associata non è discreta. [†78] [0QF]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0QG']

Notiamo che un tale spazio deve essere *totalmente disconnesso* come mostrato in 8.e.20.

§10.b.a Basi di palle

Per affrontare questi esercizi è necessario conoscere i concetti visti nella Sez. §8.h.

Esercizi

E10.b.32 Prerequisiti:8.h.7, 8.h.8.Mostrate che l'intersezione di due palle è un aperto (secondo la definizione 10.b.2). Si ottiene che la famiglia di tutte le palle soddisfa i requisiti *(a)* e *(b)* in esercizio 8.h.7; dunque, per quanto mostrato in 8.h.8, la famiglia delle palle è una base per la topologia che essa genera (che è la topologia associata allo spazio metrico). [0QJ]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0QK']

E10.b.33 Rivediamo l'esercizio 10.b.22. [0QM]

Presi $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ spazi metrici, sia $X = X_1 \times X_1 \times \cdots \times X_n$.

Sia d la distanza

$$d(x, y) = \max_{i=1,\dots n} d_i(x_i, y_i) \quad .$$

[†77] Vi sono anche spazi in cui ogni palla è chiusa, si veda 10.b.31.
[†78] Si veda 8.5 per la definizione.

Questa è la stessa d definita come in eqn. (10.b.23) in 10.b.22, ponendo $\varphi(x) = \max_{i=1...n} |x_i|$. Indichiamo con $B^d(x,r)$ la palla in (X,d) di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$.

Vogliamo mostrare che d induce la topologia prodotto su X, usando i risultati visti in Sez. §8.h.

Presi $t \in X_i, r > 0$ indichiamo con $B^{d_i}(t,r)$ la palla nello spazio metrico (X_i, d_i). Sia $\mathcal{B}_i$ la famiglia di tutte le palle in (X_i, d_i).

Sia $\mathcal{B}$ definito come

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} B^{d_i}(x_i, r_i) \,:\, \forall i, x_i \in X_i, r_i > 0 \right\}$$

Mostrate che ogni palla $B^d(x,r)$ in (X,d) è il prodotto cartesiano delle palle $B^{d_i}(x_i,r)$ in (X_i,d_i). Sia dunque $\mathcal{P}$ la famiglia delle palle $B^d(x,r)$ in (X,d).

Da 10.b.32 sappiamo che $\mathcal{P}$ è una base per la topologia standard nello spazio metrico (X,d).

Usate 8.h.5 per mostrare che $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$ generano la stessa topologia τ.

Usate 8.h.11 per mostrare che τ è la topologia prodotto.

Se ne conclude che la distanza d genera la topologia prodotto.

§10.b.b Punti di accumulazione, punti limite

Ridefiniamo questa nozione (caso speciale di quella vista in 8.a.3)

Definizione 10.b.34 (punto di accumulazione). *Dato $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ si dice* punto di accumulazione *per A se, per ogni $r > 0$ si ha che $B(x,r) \cap A \setminus \{x\}$ è non vuoto.* [0QN]

L'insieme dei punti di accumulazione di A si chiama **derivato**, lo indicheremo con $D(A)$.

Esercizi

E10.b.35 `Argomenti:punto aderente, punto di accumulazione.` [0QP]

Verificate che

- ogni punto di accumulazione è anche punto aderente, in simboli $D(A) \subseteq \overline{A}$;
- se un punto aderente a A non è in A allora è di accumulazione;

così si ottiene che $\overline{A} = A \cup D(A)$.

E10.b.36 Dato $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ è di accumulazione se e solo se esiste una successione $(x_n) \subseteq A$ che è iniettiva e tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. [0QR]

E10.b.37 Sia (X,d) spazio metrico, e $x \in X$. Mostrate che $A = \{x\}$ è chiuso; e che A ha parte interna vuota se e solo se x è punto di accumulazione. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0QT']* [0QS]

E10.b.38 Sia $A \subseteq X$ e sia $D(A)$ il *derivato* (cioè l'insieme dei suoi punti di accumulazione). Si mostri che $D(A)$ è chiuso. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0QW']* [0QV]

Aggiungiamo questa definizione (caso particolare di 8.f.2).

Definizione 10.b.39 (punto limite). *Data una successione* $(x_n)_n \subseteq X$*, un punto* $x \in X$ *si dice* punto limite *per* $(x_n)_n$ *se esiste una sottosuccessione* n_k *tale che* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$*.* [0QX]

Nella letteratura Inglese questa nozione si traduce “ *cluster point*” (oppure “*accumulation point*” il che può creare confusione con la definizione 10.b.34).

Esercizi

E10.b.40 Trovate un esempio di spazio metrico (X,d) e di una successione limitata $(x_k)_k \subseteq X$ che ha un unico punto limite x ma che non converge. [0QY]

Si veda anche 10.g.2.

E10.b.41 Prerequisiti:10.a.5,10.a.12. [0QZ]

- Se una successione $(a_k)_k \subseteq X$ converge a x allora ha un unico punto limite, che è x.
- Se una successione di Cauchy $(a_k)_k \subseteq X$ ha un punto limite allora vi è un unico punto limite x e $\lim_k a_k = x$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'OR0']*

E10.b.42 Argomenti:insieme perfetto.Prerequisiti:10.b.35,3.j.27,8.h.16.Difficoltà:**. [2F3]

Supponiamo che (X,d) sia uno spazio metrico completo. Un insieme chiuso $E \subseteq X$ senza punti isolati, cioè costituito da soli punti di accumulazione, è detto **insieme perfetto**.

Sia C l’insieme di Cantor. Sia E perfetto e non vuoto. Dimostrate che esiste una funzione continua $\varphi : C \to E$ che è un omeomorfismo con la sua immagine. Questo implica che $|E| \geq |\mathbb{R}|$.

Dunque, in un certo senso, ogni insieme perfetto non vuoto contiene una copia dell’insieme di Cantor.

*Questo si può mostrare senza usare l’*ipotesi del continuo *3.j.27*. Cf. *10.k.6*.

Per via di 8.d.5, sarà sufficiente mostrare che esiste una $\varphi : C \to E$ *continua e iniettiva.*

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '2F4']*

Altri esercizi su questi argomenti sono 10.f.5, 10.f.6, 10.f.7, 10.g.2 e 10.g.8.

§10.c Quozienti [2C3]

Esercizi

E10.c.1 Supponiamo che d soddisfi tutti i requisiti di distanza salvo che la “*proprietà di separazione*”; consideriamo la relazione $\sim$ su X definita come $x \sim y \iff d(x,y) = 0$; mostrate che è una relazione di equivalenza. Definiamo $Y = X/\sim$; mostrate che la funzione d passa al quoziente, cioè che esiste $\tilde d : Y \times Y \to [0,\infty)$ tale che, per ogni scelta di classi $s,t \in Y$ e ogni scelta di $x \in s, y \in t$ si ha $\tilde d(s,t) = d(x,y)$. Mostrate infine che $\tilde d$ è una distanza su Y. [0R2]

Questo procedura è l’equivalente in spazi metrici del *quoziente di Kolmogoroff*.

E10.c.2 Sia (X,d) uno spazio metrico e $\sim$ una relazione di equivalenza su X; sia $Y = X/\sim$ lo spazio quoziente. Definiamo la funzione $\delta : Y^2 \to \mathbb{R}$ come [0R3]

$$\delta(x,y) = \inf\{d(s,t) : s \in x, t \in y\} \ . \tag{10.c.3}$$

È una distanza su Y? Di quali proprietà gode fra quelle indicate in 10.a.1? *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0R4']*

E10.c.4 Sia (X,d) uno spazio metrico dove X è anche un gruppo, sia Θ un sottogruppo. [0R5]

Definiamo che $x \sim y \iff xy^{-1} \in \Theta$. Si verifica facilmente che è una relazione di equivalenza. Sia $Y = X/\sim$ lo spazio quoziente. [†79]

Supponiamo che d sia invariante rispetto alla moltiplicazione a sinistra per elementi di Θ:

$$d(x,y) = d(\theta x, \theta y) \ \ \forall x,y \in X, \forall \theta \in \Theta \ . \tag{10.c.5}$$

(Questo equivale a dire che, per ogni fissato $\theta \in \Theta$ la mappa $x \mapsto \theta x$ è una isometria). Definiamo la funzione $\delta : Y^2 \to \mathbb{R}$ come in (10.c.3).

- Mostrate che, prese $s,t \in X$, si ha

$$\delta([s],[t]) = \inf\{d(s,\theta t) : \theta \in \Theta\} \tag{10.c.6}$$

  dove $[s]$ è la classe di elementi equivalenti a s.
- Mostrate che $\delta \geq 0$, che δ è simmetrica e che δ soddisfa la disuguaglianza triangolare.
- Supponiamo che, per ogni fissato $t \in X$, la mappa $\theta \mapsto \theta t$ sia continua da Θ a X; supponiamo inoltre che Θ sia chiuso: allora δ è una distanza. [†80]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0R6']*

§10.d Funzione distanza [2C4]

Definizione 10.d.1. *Preso uno spazio metrico (M,d), dato $A \subset M$ non-vuoto, si definisce la **funzione distanza** $d_A : M \to \mathbb{R}$ come* [0R8]

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x,y) \ . \tag{10.d.2}$$

Esercizi

E10.d.3 `Argomenti:funzione distanza.` [0R9]

1. Mostrate che d_A è Lipschitziana.
2. Mostrate che $d_A \equiv d_{\overline{A}}$.
3. Mostrate che $\{x, d_A(x) = 0\} = \overline{A}$.
4. Se $M = \mathbb{R}^n$ e A è chiuso non-vuoto, mostrate che l'inf in (10.d.2) è un minimo.

Si veda anche 15.d.6 e 15.d.7. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0RB']*

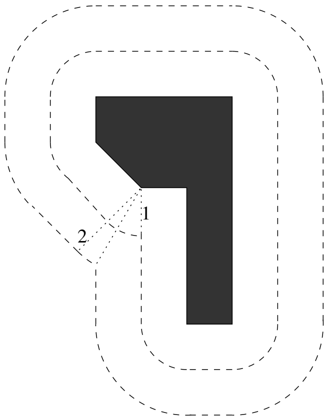


Figura 4: Ingrassato di un insieme; esercizio 10.d.4

E10.d.4 `Argomenti:insieme ingrassato.Prerequisiti:10.d.3.` [0RC]

Consideriamo uno spazio metrico (M,d). Sia $A \subseteq M$ chiuso e non-vuoto, sia $r > 0$ fissato, e sia d_A la funzione distanza definita come in eqn. (10.d.2). Sia poi $E = \{x, d_A(x) \le r\}$, notate che è chiuso.

1. Mostrate che
$$d_E(x) \ge \max\{0, (d_A(x) - r)\} \ . \tag{10.d.5}$$
2. Mostrate che in (10.d.5) si ha uguaglianza se $M = \mathbb{R}^N$.
3. Date un semplice esempio di spazio metrico in cui non si ha uguaglianza in (10.d.5).
4. Se $M = \mathbb{R}^n$, dato $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso non-vuoto, mostrate che $E = A \oplus D_r$ dove $D_r \stackrel{\text{def}}{=} \{x, |x| \le r\}$ e
$$A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x + y, x \in A, y \in B\}$$
è la *somma di Minkowski* dei due insiemi (si anche veda la sezione §12.f).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'ORD']* L'insieme $\{x, d_A(x) \le r\} = A \oplus D_r$ è alle volte chiamato *"ingrassato"* di A. In figura 4 vediamo un esempio di insieme A ingrassato per $r = 1, 2$; l'insieme A è il poligono nero (che è pieno) mentre le linee tratteggiate nel disegno indicano i contorni degli insiemi ingrassati. [†81] Si vedano anche le proprietà in sezioni §12.f e §12.g.

§10.e Connessione [2C5]

Si vedano le definizioni in Sez. §8.e. Definiamo inoltre questa nozione.

Definizione 10.e.1. *Uno spazio topologico (X,τ) si dice* "connesso per archi" *se per ogni $x, y \in X$ esiste un arco continuo $\gamma : [a,b] \to X$ con $x = \gamma(a), y = \gamma(b)$.* [0RG]

[†79] Se Θ è un sottogruppo normale allora si scrive anche X/Θ, che è un gruppo.

[†80] Notate che, usando 14.b.14, in queste ipotesi la mappa di moltiplicazione $(\theta, x) \mapsto \theta x$ è continua da $\Theta \times X$ in X.

[†81] Gli insiemi ingrassati non sono disegnati con il loro contenuto — altrimenti coprirebbero A.

Esercizi

E10.e.2 Trovate una successione di insiemi chiusi connessi $C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che $C_{n+1} \subseteq C_n$ e l'intersezione $\bigcap_n C_n$ è un insieme non-vuoto e sconnesso. [0RH]

Si può trovare un simile esempio in $\mathbb{R}$?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0RJ']

E10.e.3 Trovate una successione di insiemi chiusi e connessi per archi $C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che $C_{n+1} \subseteq C_n$ e l'intersezione $\bigcap_n C_n$ è non vuoto, connesso, ma non connesso per archi. [0RK]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0RM'][UNACCESSIBLE UUID '0RN']

E10.e.4 Consideriamo l'esempio di insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ dato da [0RP]

$$E = \left\{(0,t)\ :\ -1 \le t \le 1\right\} \cup \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right)\ :\ x \in (0,1]\right\} \quad . \tag{10.e.5}$$

Mostrare che questo insieme è chiuso, connesso, ma non è connesso per archi.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0RQ']

Si veda anche [49].

E10.e.6 Difficoltà:*. Sia (X,d) uno spazio metrico. Mostrate che $E \subseteq X$ è sconnesso se e solo se "*esistono due aperti disgiunti, ciascuno dei quali interseca E e tali che E sia coperto dalla loro unione*" (si veda la proposizione formalizzata in eqn. (8.e.12) nell' esercizio 8.e.11). [0RR]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0RS']

E10.e.7 Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ numerabile; si mostri che $\mathbb{R}^2 \setminus D$ è connesso per archi. [0RT]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0RV']

E10.e.8 Si trovi un esempio di uno spazio metrico X che è connesso per archi, in cui esiste un sottoinsieme $A \subseteq X$ aperto che è connesso ma non connesso per archi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0RZ'] [0RY]

§10.f Topologia nella retta reale [2C6]

Esercizi

E10.f.1 Mostrate che un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo è convesso, se e solo se è connesso. [0S0]

(Parte della dimostrazione si trova nel Teorema 5.11.3 in [3]).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0S1']

(Notate come in questo caso gli esercizi 3.d.46 e 8.e.15 vadano a coincidere).

E10.f.2 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo l'insieme A dei numeri della forma $\alpha n + m$ con n, m interi. Si mostri che A è denso in $\mathbb{R}$ se e solo se α è irrazionale. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0S3'] [0S2]

E10.f.3 Dato $I \subseteq \mathbb{Q}$ non-vuoto, mostrate che I è connesso se e solo I contiene un solo punto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0S5'] [0S4]

E10.f.4 Mostrare che ogni $A \subset \mathbb{R}$ non-vuoto aperto è unione di una famiglia al più numerabile di intervalli aperti disgiunti. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0S7'] [0S6]

E10.f.5 Trovare un compatto $A \subset \mathbb{R}$ che abbia un numero numerabile di punti di accumulazione. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0S9'] [0S8]

E10.f.6 Prerequisiti:10.b.36. Mostrare che l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ definito come [0SB]

$$A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \cup \{1/n + 1/m : n, m \in \mathbb{N}, n \geq 1, m \geq 1\}$$

è compatto; identificare i suoi punti di accumulazione.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0SC']

E10.f.7 Difficoltà:**. Sia $A \subset \mathbb{R}$; ricordiamo che $D(A)$ è il derivato di A (cioè l'insieme dei punti di accumulazione di A). Descrivere un insieme chiuso A tale che gli insiemi [0SD]

$$A, D(A), D(D(A)), D(D(D(A)))\ldots$$

siano tutti diversi.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0SF']

E10.f.8 Prerequisiti:10.b.16, 10.b.19, 8.13, 10.b.29.Difficoltà:**. [0SG]

Trovare un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ tale che i seguenti 7 sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ risultino tutti distinti:

$$A,\ \overline{A},\ A^\circ,\ \left(\overline{A}\right)^\circ,\ \overline{(A^\circ)},\ \overline{\left(\left(\overline{A}\right)^\circ\right)},\ \left(\overline{(A^\circ)}\right)^\circ\ .$$

Dimostrare inoltre che non se ne possono creare altri proseguendo nella stessa maniera (anche sostituendo $\mathbb{R}$ con un generico spazio metrico).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0SH']

E10.f.9 Difficoltà:**.Si provi che non è possibile ottenere $\mathbb{R}$, o un intervallo $D \subseteq \mathbb{R}$, come unione numerabile di intervalli chiusi e limitati, a due a due disgiunti. [0W6]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0W7']

§10.g Topologia nello spazio euclideo [2C7]

Nel seguito consideriamo lo spazio metrico $\mathbb{R}^n$ con la usuale distanza euclidea.

Esercizi

E10.g.1 Prerequisiti:10.b.25.Sia $B(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ la palla; sia $D(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leq r\}$ il disco; sia $S(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| = r\}$ la sfera. Si mostri che $\overline{B(x,r)} = D(x,r)$, che $B(x,r) = D(x,r)^\circ$, e che $\partial B(x,r) = S(x,r)$. Si mostri inoltre che $B(x,r)$ non è chiuso e $D(x,r)$ non è aperto. [0SM]

(Questo risultato vale più in generale in ogni spazio normato: si veda 12.7).

E10.g.2 Prerequisiti:10.b.41, 10.a.9. Data una successione $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}^n$, questi fatti sono equivalenti [0SN]

a la successione è limitata e ha un unico punto limite x

b $\lim_k x_k = x$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0SP']* Si veda anche 10.b.40.

E10.g.3 Prerequisiti:8.a.9, 8.a.10.Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso non-vuoto, esiste $B \subseteq A$ tale che $A = \partial B$. [0SQ]

In quali casi si può trovare B numerabile?

In quali casi si può trovare B chiuso?

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0SR'][UNACCESSIBLE UUID '0SS']*

Si veda anche 8.i.4.

E10.g.4 Prerequisiti:8.a.13.Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso non-vuoto, esiste $F \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $E = D(F)$. [0SV]

Si può trovare $F \subseteq E$?

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0SX'][UNACCESSIBLE UUID '0SY']*

E10.g.5 Quali sono gli insiemi $A \subset \mathbb{R}^n$ che sono sia aperti che chiusi? [0T0]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0T2']*

E10.g.6 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua; si mostri che queste due condizioni sono equivalenti [0T3]

- $\lim_{t\to\infty} |f(t)| = +\infty$ e $\lim_{t\to-\infty} |f(t)| = +\infty$;
- f è **propria**, cioè per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ si ha che la controimmagine $f^{-1}(K)$ è un compatto di $\mathbb{R}$.

E10.g.7 Prerequisiti:Sezione §8.i.Mostrate che $\mathbb{R}^N$ soddisfa il secondo assioma di numerabilità. [0T4]

E10.g.8 Prerequisiti:8.i.3. Note:*esercizio 4 nel compito del 13/1/2011.* [0T5]

Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è composto solo da punti isolati, allora A ha cardinalità numerabile o finita.

Viceversa dunque se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è più che numerabile allora il derivato $D(A)$ è non vuoto.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0T6']*

E10.g.9 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $I \subset A$ soddisfacente: [0T7]

- I è finito,
- $\forall x, y \in I$, $x \neq y$ si ha $x \notin B(y, \varepsilon)$ (cioè $d(x, y) \geq \varepsilon$),
- $$A \subseteq \bigcup_{x\in I} B(x, \varepsilon) \ .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0T8']*

E10.g.10 Difficoltà:*.Qual è la cardinalità della famiglia degli insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$? [0T9]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0TB']*

E10.g.11 Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto tale che ogni funzione continua $f : E \to \mathbb{R}$ ammetta massimo: si mostri che E è compatto. [0TD]

(Si veda 10.j.10 per la generalizzazione a spazi metrici)

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0TF']*

§10.h Punti fissi [2C8]

Esercizi

E10.h.1 Trovate una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che [0TG]

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

ma che non ha punti fissi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '27D']

E10.h.2 Prerequisiti:10.j.11.Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, e sia $f : X \to X$ tale che [0TH]

$$\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad .$$

Mostrate che f ha un unico punto fisso.

Questo risultato è talvolta chiamato *Teorema di Edelstein*.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '27C']

§10.i Isometrie [2C9]

Definizione 10.i.1. *Dati (M_1, d_1) e (M_2, d_2) spazi metrici, una mappa $\varphi : M_1 \to M_2$ è detta una **isometria** se* [0TK]

$$\forall x, y \in M_1, \quad d_1(x, y) = d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \quad . \tag{10.i.2}$$

Vedremo in Sez. §12.b la stessa definizione nel caso di spazi vettoriali normati. Ovviamente una isometria è Lipschitziana, e dunque continua. Le isometrie godono di alcune proprietà.

Esercizi

E10.i.3 Argomenti:isometria. Una isometria è sempre iniettiva. [0TM]

E10.i.4 Se l'isometria φ è surgettiva (e dunque è bigettiva) allora anche la inversa φ^{-1} è una isometria. [0TP]

E10.i.5 Se (M_1, d_1) è completo allora la sua immagine $\varphi(M_1)$ è un insieme completo in M_2; e dunque è un chiuso in M_2. [0TQ]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0TR'] Conseguentemente se la isometria φ è bigettiva e uno dei due spazi è completo allora anche l'altro è completo.

E10.i.6 Argomenti:isometria. Difficoltà:*.Siano (X, d) spazio metrico compatto; sia $T : X \to X$ una isometria, allora T è surgettiva. [0TT]

Date un semplice esempio di spazio metrico non compatto e di $T : X \to X$ isometria non surgettiva.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0TV']

E10.i.7 Argomenti:isometria.Prerequisiti:10.i.6.Difficoltà:*. [0TW]

Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici di cui X compatto, $T : X \to Y$ e $S : Y \to X$ due *isometrie*. Provare che allora T ed S sono bigettive.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0TY']

E10.i.8 `Argomenti:isometria.Difficoltà:*.` Trovate un esempio di due spazi metrici (X, d) e (Y, δ) che non sono isometrici ma per cui esistono due isometrie $T : X \to Y$ e $S : Y \to X$. [0TZ]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0V1']*

§10.j Compattezza [2CB]

Il teorema di Heine-Borel [41] si estende a questo contesto.

Teorema 10.j.1. *Dato uno spazio metrico (X, d) e un suo sottoinsieme $C \subseteq X$, le tre seguenti condizioni sono equivalenti.* [0V3]

- C *è* sequenzialmente compatto*: ogni successione $(x_n) \subset C$ possiede una sottosuccessione convergente a un elemento di C.*
- C *è* compatto*: da ogni famiglia di aperti la cui unione copre C si può scegliere un numero finito di aperti la cui unione copre C.*
- C *è completo, ed è* totalmente limitato*: per ogni $\varepsilon > 0$ esistono finiti punti $x_1 ... x_n \in C$ tali che $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.*

(Questo Teorema ha una generalizzazione in spazi topologici, si veda in 8.f.7).

Esercizi

E10.j.2 Posto $X = \mathbb{R}^n$ e d la usuale distanza Euclidea, preso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, usate il precedente teorema 10.j.1 per mostrare (come corollario) l'usuale teorema di Heine-Borel [41]: *C è compatto se e solo se è chiuso e limitato.* [0V4]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0V5']*

E10.j.3 Si mostri che se $K \subset X$ è compatto allora è chiuso. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0V7']* (Si veda 8.d.3 per il caso di spazio topologico) [0V6]

E10.j.4 Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, con (X, d_X) compatto; sia $f : X \to Y$ continua e iniettiva; si mostri che f è un omeomorfismo fra X e la sua immagine $f(X)$. [0V8]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0V9']*

(Si veda 8.d.5 per il caso di spazio topologico).

E10.j.5 Sia $n \geq 1$ naturale. Siano (X_i, d_i) spazi metrici compatti per $i = 1, \ldots n$; siano $y_{i,k} \in X_i$ per $i = 1, \ldots n$ e $k \in \mathbb{N}$. Mostrare che esiste una sottosuccessione k_h tale che, per ogni fissato i, y_{i,k_h} converge, cioè esiste il limite $\lim_{h\to\infty} y_{i,k_h}$. [0VB]

E10.j.6 `Difficoltà:**.` Siano (X_i, d_i) spazi metrici compatti per $i \in \mathbb{N}$, e siano $y_{i,k} \in X_i$ per $i, k \in \mathbb{N}$. Mostrare che esiste una sottosuccessione k_h tale che, per ogni fissato i, y_{i,k_h} converge, cioè esiste il limite $\lim_{h\to\infty} y_{i,k_h}$. [0VC]

E10.j.7 Sia dato uno spazio metrico (X, d). Come già in 10.b.1 definiamo il *disco* $D(x, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \{y \in X, d(x, y) \leq \varepsilon\}$ (che è chiuso). Diciamo che (X, d) è *localmente compatto* se per ogni $x \in X$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $D(x, \varepsilon)$ è compatto. Considerate questa proposizione. [0VD]

*«**Proposizione** Uno spazio metrico localmente compatto è completo.*
***Dimostrazione** Sia $(x_n)_n \subset X$ una successione di Cauchy, allora definitivamente i suoi termini distano al più ε, dunque sono contenuti in una piccolo disco compatto, dunque esiste una sottosuccessione che converge, e allora per il risultato 10.a.12 tutta la successione converge. q.e.d. »*

Se secondo voi la proposizione è vera, riscrivete la dimostrazione in modo rigoroso. Se secondo voi è falsa, trovate un controesempio.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0VF']*

E10.j.8 Sia (X, d) uno spazio metrico, e sia $C \subset X$. Si mostri che C è totalmente limitato se e solo se $\overline{C}$ è totalmente limitato. (Si veda 10.j.1 per la definizione di *totalmente limitato*). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0VH']* [0VG]

E10.j.9 Prerequisiti:10.b.20.Sia (X, d) uno spazio metrico totalmente limitato. Sia $E \subseteq X$, allora E è uno spazio metrico con la distanza ristretta $\tilde{d} = d|_{E\times E}$. Si mostri che $(E, \tilde{d})$ è totalmente limitato. (Si veda 10.j.1 per la definizione di *totalmente limitato*). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '2GC']* [2GB]

E10.j.10 Prerequisiti:10.b.41,10.j.13.Difficoltà:*. [0VJ]

Sia (X, d) uno spazio metrico tale che ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ ammetta massimo: si mostri che lo spazio è compatto.

(Si veda 10.g.11 per la formulazione con $X = \mathbb{R}^n$.) *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0VM'][UNACCESSIBLE UUID '0VN']*

E10.j.11 Argomenti:compatti.Prerequisiti:10.j.3. [0VP]

Sia (X, d) uno spazio metrico, e siano $A_n \subseteq X$ sottoinsiemi compatti non vuoti tali che $A_{n+1} \subseteq A_n$: allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

(Questo risultato si può fare derivare da 8.d.4; provate però a dare una dimostrazione diretta, usando la caratterizzazione di "compatto" come "compatto per successioni" , cioè il primo punto in 10.j.1).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0VQ']*

E10.j.12 Sia dato uno spazio metrico (X, d) e un suo sottoinsieme $C \subseteq X$ *totalmente limitato*, come definito in 10.j.1: mostrate che C è limitato, cioè per ogni $x_0 \in C$ si ha [0VR]

$$\sup_{x\in C} d(x_0, x) < \infty \quad ,$$

o equivalentemente, per ogni $x_0 \in C$ esiste $r > 0$ tale che $C \subseteq B(x_0, r)$.

L'implicazione opposta non vale, come mostrato in 10.j.14

E10.j.13 Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $D \subseteq X$, si mostri che sono equivalenti: [0VS]

- D non è totalmente limitato;
- esiste $\varepsilon > 0$ ed esiste una successione $(x_n)_n \subseteq D$ per cui

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ d(x_n, x_m) \geq \varepsilon \quad .$$

E10.j.14 Prerequisiti:10.j.13.Sia $X = C^0([0,1])$ lo spazio delle funzioni continue e limitate $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dotato della usuale distanza [0VT]

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \quad .$$

Sappiamo che (X, d_∞) è uno spazio metrico completo. Sia

$$D(0,1) = \{f \in X : d_\infty(0,f) \le 1\} = \{f \in X : \forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \le 1\}$$

il disco di centro 0 (la funzione identicamente zero) e raggio 1. Sappiamo da 10.b.24 che è chiuso, e dunque è completo. Mostrate che D non è totalmente limitato, trovando una successione $(f_n) \subseteq D$ come spiegato in 10.j.13.

§10.k Teoremi e categorie di Baire

Vale il seguente *teorema della categoria di Baire* di cui vi sono vari enunciati equivalenti.

Teorema 10.k.1. *Supponiamo che (X, d) sia completo.* [0VV]

- *Dati numerabili A_n aperti densi in X, si ha che $\bigcap_n A_n$ è denso.*
- *Dati numerabili C_n chiusi con parte interna vuota in X, si ha che $\bigcup_n C_n$ ha parte interna vuota.*

Definizione 10.k.2. *Un insieme che è contenuto nell'unione di numerabili chiusi con parte interna vuota è detto* di prima categoria in X. [†82] *In caso contrario, è detto* di seconda categoria. [0VW]

Esercizi

E10.k.3 Uno spazio metrico X completo è di seconda categoria in se stesso. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0VY']* [0VX]

E10.k.4 Posto $X = \mathbb{R}$, l'insieme degli irrazionali è di seconda categoria in $\mathbb{R}$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0W0']* [0VZ]

E10.k.5 Si rifletta sulle affermazioni: [0W1]

- Un insieme chiuso C dentro uno spazio metrico completo (X, d) è un completo (se visto come spazio metrico (C, d)).
- L'insieme $C = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ è un chiuso in $\mathbb{R}$, dunque C è completo con la distanza $d(x, y) = |x-y|$.
- C è composto da numerabili punti.
- Un singoletto $\{x\}$ è un chiuso a parte interna vuota.

Perché non vi è contraddizione?

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0W2']*

E10.k.6 Argomenti:insieme perfetto.Prerequisiti:10.b.35,3.j.27. [0W3]

Supponiamo che (X, d) sia uno spazio metrico completo. Un insieme chiuso senza punti isolati, cioè costituito da soli punti di accumulazione, è detto **insieme perfetto**. Mostrate che un insieme perfetto non-vuoto E contenuto in X deve essere infinito più che numerabile. *(Escogitate una dimostrazione semplice che faccia uso del Teorema di Baire 10.k.1.)*

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '2DZ']*

L'insieme di Cantor è un insieme perfetto, si veda 9.b.1.

§10.l Prodotto di infiniti spazi metrici

Esercizi

E10.l.1 Prerequisiti:10.a.8.Sia $\varphi(t) = t/(1+t)$. Siano (X_i, d_i) spazi metrici con $i \in \mathbb{N}$, sia $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, prese $f, g \in X$ definiamo la distanza su X come [0W9]

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\varphi(d_i(f(k), g(k))) .$$

Si dimostri che d è una distanza.

E10.l.2 Siano $f, f_n \in X$ come prima in 10.l.1, si mostri che $f_n \to_n f$ secondo questa metrica se e solo se per ogni k si ha $f_n(k) \to_n f(k)$. [0WB]

E10.l.3 Siano (X_i, d_i) e (X, d) come prima in 10.l.1. Se tutti gli spazi (X_i, d_i) sono completi, si provi che (X, d) è completo. [0WC]

E10.l.4 Prerequisiti:10.j.6,10.l.2.Difficoltà:*.Siano (X_i, d_i) e (X, d) come prima in 10.l.1. Se tutti gli spazi (X_i, d_i) sono compatti, si provi che (X, d) è compatto. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0WF']* [0WD]

E10.l.5 Prerequisiti:10.l.4.Vogliamo definire una distanza per lo spazio delle successioni. Procediamo come in 10.l.1. Scegliamo $X_i = \mathbb{R}$ per ogni i e decidiamo che d_i sia la distanza Euclidea, poi per $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiamo [0WG]

$$d(f, g) = \sum_k 2^{-k}\varphi(|f(k) - g(k)|) .$$

Abbiamo costruito uno spazio metrico delle successioni $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$.

Nello spazio delle successioni $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ definiamo

$$K = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall k, |f(k)| \le 1\} \quad .$$

Si mostri che K è compatto. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0WH']*

E10.l.6 Sia $N(\rho)$ il minimo numero di palle di raggio ρ che sono necessarie per coprire K (dall'esercizio precedente 10.l.5). Si stimi $N(\rho)$ per $\rho \to 0$. [0WJ]

Si veda anche la Sez. §11

§10.m Ultrametrica

Definizione 10.m.1. *Uno* spazio ultrametrico *è una spazio metrico in cui la disuguaglianza triangolare è rafforzata dalla condizione* [OWM]

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \ . \tag{10.m.2}$$

Esercizi

E10.m.3 Mostrate che (10.m.2) implica che d soddisfa la diseguaglianza triangolare. [OWN]

E10.m.4 Notate che se $d(x, y) \neq d(y, z)$ allora $d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID 'OWQ']* Intuitivamente, tutti i triangoli sono isosceli, e la base è più corta dei lati uguali. [OWP]

E10.m.5 Si mostri che, date due palle $B(x, r)$ e $B(y, \rho)$ di raggio $0 < r \leq \rho$ che si intersecano, allora $B(x, r) \subseteq B(y, \rho)$. [OWR]

Similmente per i dischi $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ e $D(y, r)$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'OWS']*

E10.m.6 Si mostri che due palle $B(x, r)$ e $B(y, r)$ di uguale raggio sono disgiunte oppure sono coincidenti; in particolare sono coincidenti se e solo se $y \in B(x, r)$. Similmente per i dischi $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ e $D(y, r)$. [OWT]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID 'OWV']*

E10.m.7 Si mostri che ogni palla aperta $B(x, r)$ è anche chiusa. Si mostri che ogni disco chiuso $D(x, r)$ con $r > 0$ è anche aperto. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID 'OWX']* Per l'esercizio 8.e.20, se ne deduce che lo spazio è *totalmente disconnesso*. [OWW]

E10.m.8 Sia $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una funzione continua in zero, monotona debolmente crescente e con $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$. Mostrate che $\tilde{d} = \varphi \circ d$ è ancora una ultrametrica. Mostrate che gli spazi (X, d) $(X, \tilde{d})$ hanno la stessa topologia. [OWY]

Confrontate con l'esercizio 10.a.8, notate che non richiediamo che φ sia subadditiva.

§10.m.a Ultrametrica delle successioni

Costruiamo questo esempio di *ultrametrica* sullo spazio delle successioni.

Definizione 10.m.9. *Sia I un insieme non-vuoto, con almeno due elementi. Sia $X = \{f : \mathbb{N} \to I\} = I^{\mathbb{N}}$ lo spazio delle successioni. Siano $x, y \in X$. Se $x = y$ allora poniamo $d(x, y) = 0$.* [†83] *Se $x \neq y$, posto* [OXO]

$$c(x, y) = \min\{n \geq 0, x(n) \neq y(n)\} \tag{10.m.10}$$

il primo indice dove le successioni sono diverse; infine definiamo $d(x, y) = 2^{-c(x,y)}$.

Nota 10.m.11. *Per via dell'esercizio 10.m.8, potremmo equivalentemente definire $d(x, y) = \varepsilon_{c(x,y)}$ con $\varepsilon_n > 0$ successione decrescente infinitesima.* [OX1]

[†82] È detto a volte anche *insieme magro* (ad esempio in Wikipedia [36]); mentre per alcuni autori un "insieme magro" è un insieme che ha parte interna della chiusura uguale al vuoto.

[†83] Questo può essere anche ottenuto definendo $c(x, x) = \infty$

Esercizi

E10.m.12 Prerequisiti:10.m.9.Si mostri che $d(x, y) \le \max\{d(x, z), d(y, z)\}$. [0X2]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0X3']*

E10.m.13 Argomenti:completo. Prerequisiti:10.m.9.Si mostri che (X, d) è completo. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0X5']* [0X4]

E10.m.14 Argomenti:compatto. [0X6]

Prerequisiti:10.m.9.

Si mostri che (X, d) è compatto se e solo se I è un insieme finito.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0X7']*

E10.m.15 Prerequisiti:10.m.9,9.b.2. Supponiamo che I sia un gruppo; allora X è un gruppo (è il prodotto cartesiano di gruppi); e la moltiplicazione si effettua "componente per componente". Mostrate che il prodotto in X è un'operazione continua, e così per la mappa di inversione. Dunque (X, d) è un *gruppo topologico*. [0X8]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0X9']*

E10.m.16 Prerequisiti:10.m.9,9.b.2. Sia I un insieme di cardinalità 2, allora lo spazio (X, d) è omeomorfo all'insieme di Cantor (con la normale metrica Euclidea $|x - y|$). [0XC]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0XD']*

Combinando questo risultato con 10.m.15 otteniamo che l'insieme di Cantor (con la sua usuale topologia) può essere dotato di una struttura di gruppo abeliano, dove la somma e l'inversa sono funzioni continue; ciò lo rende un gruppo topologico.

Si veda anche 11.24.

§10.n Ultrametrica p-adica [2CG]

Riportiamo dagli appunti [3] la definizione della *distanza p–adica* su $\mathbb{Q}$. Sia p un numero primo fissato.

Definizione 10.n.1. *Ogni numero razionale $x \neq 0$ si scompone in modo unico come prodotto* [0XF]

$$x = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k} \ , \tag{10.n.2}$$

dove $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ sono numeri primi e gli m_j interi relativi. Fissato come sopra un numero primo p, si definisce il ***valore assoluto p–adico*** *di $x \in \mathbb{Q}$ come*

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ p^{-m} & \text{se } p^m \text{ è il fattore con base } p \text{ nella scomposizione (10.n.2)} \end{cases} .$$

Definiamo infine $d(x, y) = |x - y|_p$, che risulterà essere una distanza su $\mathbb{Q}$, chiamata ***distanza p–adica****.*

Aggiungiamo questa definizione, che sarà molto utile nel seguito.

Definizione 10.n.3. *Per $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ definiamo* [0XG]

$$\varphi_p(n) = \max\{h \in \mathbb{N}, p^h \text{ divide } n\} \ .$$

Poniamo inoltre $\varphi_p(0) = \infty$. Questa φ_p è nota come valutazione p-adica [67]. .

Esercizi

E10.n.4 Provate queste relazioni fondamentali. [0XH]

1. $|1|_p = 1$ e più in generale $|n|_p \le 1$ per ogni intero nonnullo n, con uguaglianza se n non è divisibile per p.
2. Dato n intero nonnullo, si ha che $|n|_p = p^{-\varphi_p(n)}$.
3. Dato n, m interi, si ha che $\varphi_p(n+m) \ge \min\{\varphi_p(n), \varphi_p(m)\}$ con uguaglianza se $\varphi_p(n) \ne \varphi_p(m)$.
4. Dato n, m interi nonnulli, si ha che $\varphi_p(nm) = \varphi_p(n) + \varphi_p(m)$ e dunque $|nm|_p = |n|_p |m|_p$.
5. Dato $x = a/b$ con a, b interi nonnulli si ha che $|x|_p = p^{-\varphi_p(a)+\varphi_p(b)}$. Notiamo che se a, b sono primi tra loro, allora uno dei due termini $\varphi_p(a), \varphi_p(b)$ è zero.
6. Provate che $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ per $x, y \in \mathbb{Q}$.
7. Provate che $|x/y|_p = |x|_p / |y|_p$ per $x, y \in \mathbb{Q}$ non nulli.

E10.n.5 Verificate che [0XM]

$$|x+y|_p \le \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\} \tag{10.n.6}$$

per ogni $x,\ y \in \mathbb{Q}$. e dunque

$$d_p(x,z) \le \max\left\{d_p(x,y), d_p(y,z)\right\}, \qquad \forall\, x,\ y,\ z \in \mathbb{Q}\ .$$

cioè questa è una ultrametrica (e dunque una distanza). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0XN']* Le proprietà 6 e (10.n.6) dicono che la *valutazione p-adica* è un valore assoluto, e anzi è una *Krull valuation*.

E10.n.7 Si mostri che la mappa di moltiplicazione è continua. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0XR']* [0XQ]

E10.n.8 Si trovi un esempio di successione che tende a zero (ma che non assume mai il valore 0). Questo esempio mostra che la topologia associata non è la topologia discreta. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0XV']* [0XT]

E10.n.9 `Difficoltà:*`.Si mostri, per ogni $a/b \in \mathbb{Q}$ con a, b coprimi e b non divisibile per p, esiste $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z}$ tale che $|x_n - a/b|_p \to_n 0$. Si noti che la ipotesi è necessaria. [0XW]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0XX']* Si ottiene che $\mathbb{Z}$ è denso nel disco $\{x \in \mathbb{Q}, |x|_p \le 1\}$.

E10.n.10 `Difficoltà:**`.Si mostri che $(\mathbb{Q}, d)$ non è uno spazio metrico completo. [0XY]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0XZ']*

E10.n.11 Si mostri che nessuna distanza p–adica su $\mathbb{Q}$ è bi–Lipschitz equivalente alla distanza euclidea (indotta da $\mathbb{R}$). [0Y0]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0Y1']*

§10.o Circonferenza [2CF]

Definizione 10.o.1. *$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| = 1\}$ è la **circonferenza** nel piano.* [0Y3]

È un chiuso in $\mathbb{R}^2$, dunque lo possiamo pensare come uno spazio metrico completo con la distanza Euclidea $d(x, y) = |x - y|_{\mathbb{R}^2}$.

Definizione 10.o.2. *Denotiamo con $\mathbb{R}/2\pi$ lo spazio quoziente $\mathbb{R}/\sim$ dove $x \sim y \iff (x-y)/(2\pi) \in \mathbb{Z}$ è una relazione di equivalenza che rende equivalenti punti che distano un multiplo intero di 2π. Questo spazio $\mathbb{R}/2\pi$ viene chiamato **lo spazio dei numeri reali modulo 2π**.* [0Y4]

Come usuale dato $t \in \mathbb{R}$ indichiamo con $[t]$ la classe degli elementi in $\mathbb{R}/2\pi$ equivalenti a t.

Esercizi

E10.o.3 Considerate la mappa [0Y5]

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}/2\pi &\to S^1 \\ [t] &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

mostrate che è ben definita e bigettiva.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0Y6']*

E10.o.4 Tramite questa bigezione trasportiamo la distanza Euclidea da S^1 a $\mathbb{R}/2\pi$ definendo [0Y7]

$$d_e([s], [t]) = |\Phi([s]) - \Phi([t])|_{\mathbb{R}^2} \ .$$

Con questa scelta la mappa Φ risulta essere un isometria fra (S^1, d) e $(\mathbb{R}/2\pi, d_e)$ (si riveda la definizione 10.i.1). Dunque quest'ultimo è uno spazio metrico completo.

Con qualche semplice calcolo si ricava che

$$d_e([s], [t]) = \sqrt{|\cos(t) - \cos(s)|^2 + |\sin(t) - \sin(s)|^2} = \sqrt{2 - 2\cos(t - s)} \ .$$

Poi definiamo la funzione

$$d_a([s], [t]) = \inf\{|s - t - 2\pi k| : k \in \mathbb{Z}\} \ ,$$

mostrate che è una distanza su $\mathbb{R}/2\pi$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0Y8']*

E10.o.5 Mostrate che $d_a([s], [t])$ è la lunghezza del più corto arco in S^1 che collega $\Phi([s])$ a $\Phi([t])$. [0Y9]

E10.o.6 Mostrate che le distanze d_a e d_e sono equivalenti, dimostrando che $\frac{2}{\pi} d_a \le d_e \le d_a$. [0YB]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0YC']*

E10.o.7 Prerequisiti:10.c.1. Si può facilmente mostrare che una funzione $f : \mathbb{R}/2\pi \to X$ può essere vista come una funzione periodica $\tilde{f} : \mathbb{R} \to X$ di periodo 2π, e viceversa. [0YD]

Questo può essere facilmente ottenuto dalla relazione $f([t]) = \tilde{f}(t)$ dove t è un generico elemento della sua classe di equivalenza $[t]$. Supponendo che $\tilde{f}$ sia periodica di periodo 2π, la precedente relazione permette di ricavare f da $\tilde{f}$ e viceversa.

Si mostri che f è continua se e solo se $\tilde{f}$ è continua.

E10.o.8 Prerequisiti:8.b.3. Sia (X, τ) la *retta compattificata*, lo spazio topologico definito in 8.b.3; si mostri che è omeomorfa a S^1. [0YF]

§11 Dimensione [0YH]

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia nel seguito K un sottoinsieme di X, compatto nonvuoto, e sia $N(\rho)$ il minimo numero di palle di raggio ρ che sono necessarie per coprire K. [†84]

Definizione 11.1. *Se esiste il limite* [0YJ]

$$\lim_{\rho\to 0+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \tag{11.2}$$

*diremo che questo limite è la **dimensione di Minkowski*** $\dim(K)$ *di* K.

Se il limite non esiste, potremo comunque usare il limsup e il liminf per definire la *dimensione superiore e inferiore*.

Si noti che questa definizione dipende *a priori* dalla scelta della distanza, cioè $N = N(\rho, K, d)$ e $\dim = \dim(K, d)$. Si veda in particolare 11.10.

Esercizi

E11.3 Mostrate che $N(\rho)$ è decrescente in ρ. [0YK]

E11.4 Prerequisiti: 10.j.5.Difficoltà:*.Mostrate che $N(\rho)$ è limitato se e solo se K contiene solo un numero finito di punti. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0YP']* Dunque se K è infinito si deve avere $\lim_{\rho\to 0+} N(\rho) = \infty$. [0YN]

E11.5 Sia definito $N'(\rho)$ essere il minimo numero di palle di raggio ρ e centrate in K che sono necessarie per coprire K: allora [0YQ]

$$N'(2\rho) \le N(\rho) \le N'(\rho)\,.$$

Dunque la dimensione non cambia se si richiede che le palle siano centrate in punti di K. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0YR']*

E11.6 Sia $P(\rho)$ il numero numero massimo di palle di raggio ρ e centrate in K che sono disgiunte. Si mostri che [0YS]

$$N(2\rho) \le P(\rho) \le N(\rho/2)\,.$$

Dunque la dimensione si può calcolare anche come

$$\lim_{\rho\to 0+} \frac{\log P(\rho)}{\log(1/\rho)}\,. \tag{11.7}$$

Una tale costruzione è nota come *ball packing* in Inglese. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '0YT']*

E11.8 Nell'esercizio 11.6 è importante richiedere che le palle siano centrate in punti di K. Trovate un esempio di spazio metrico (X, d) e di $K \subseteq X$ compatto di dimensione finita, ma tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $\rho > 0$, esistono infinite palle disgiunte ciascuna contenente un solo punto di K. [0YV]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0YW']*

E11.9 Mostrare che la dimensione non cambia se si usano i dischi [0YX]

$$D(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y\ ,\ d(x,y) \le r\}$$

invece delle palle $B(x,r)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0YY']

E11.10 Prerequisiti:10.a.8.Sia $K \subseteq X$ compatto; sia $\alpha > 1$; sia $\tilde d(x,y) = \sqrt[\alpha]{d(x,y)}$, sappiamo da 10.a.8 che è una distanza. Mostrate che [0YZ]

$$\alpha \dim(K,d) = \dim(K,\tilde d)\ .$$

In particolare $K = [0,1]$ (l'intervallo $K \subseteq X = \mathbb{R}$) con la distanza $\tilde d(x,y) = \sqrt[\alpha]{|x-y|}$ ha dimensione α.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Z0']

E11.11 Argomenti:norma.Prerequisiti:12.10. [0Z1]

Sia K un compatto in $\mathbb{R}^n$; indichiamo con $\dim(K,|\cdot|)$ il limite che definisce la dimensione, usando le palle della norma Euclidea. Data una norma ϕ possiamo definire la distanza $d(x,y) = \phi(x-y)$, e con questo calcolare la dimensione $\dim(K,\phi)$. Si mostri che $\dim(K,|\cdot|) = \dim(K,\phi)$, nel senso che, se un limite esiste allora esiste anche l'altro limite, e sono uguali. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0Z2']

E11.12 Indichiamo un criterio operativo che può essere usato negli esercizi seguenti. [0Z3]

- Se esiste una successione descrescente $\rho_j \to 0$ e h_j interi positivi tale che bastano h_j palle di raggio ρ_j per coprire K, allora

$$\limsup_{\rho\to 0+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \le \limsup_{j\to\infty} \frac{\log h_{j+1}}{\log(1/\rho_j)}\ . \tag{11.13}$$

- Se viceversa esiste una successione descrescente $r_j \to 0$, e $C_n \subseteq K$ famiglie finite di punti che distano almeno r_j fra loro, cioè per cui

$$\forall x,y \in C_n, x \ne y \Rightarrow d(x,y) \ge r_j\ , \tag{11.14}$$

allora

$$\liminf_{\rho\to 0+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \ge \liminf_{j\to\infty} \frac{\log l_j}{\log(1/r_{j+1})}\ . \tag{11.15}$$

dove $l_j = |C_j|$ è la cardinalità di C_j. Si noti che i punti di $x \in C_j$ sono centri di palle $B(x, r_j/2)$ disgiunte, dunque $l_j \le P(r_j/2)$, come definito in 11.6.

In particolare se

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\log h_{j+1}}{\log(1/\rho_j)} = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log l_j}{\log(1/r_{j+1})} = \beta \tag{11.16}$$

allora l'insieme K ha dimensione β.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Z5'][UNACCESSIBLE UUID '0Z6']

E11.17 Prerequisiti: 12.a.14 11.11 11.12.Difficoltà:*.Sia $K \subseteq \mathbb{R}^m$ compatto. Consideriamo la famiglia dei cubi chiusi di lato 2^{-n} e centri nei punti della griglia $2^{-n}\mathbb{Z}^m$. La chiamiamo "*n-tassellatura*". Sia N_n il numero di cubi della *n-tassellatura* che intersecano K. Mostrate che N_n è debolmente crescente. Mostrate che il seguente limite esiste [0Z7]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 N_n}{n} \tag{11.18}$$

se e solo se esiste il limite (11.2) che definisce la dimensione, e se esistono coincidono. Questo approccio al calcolo della dimensione viene chiamato *Box Dimension* in Inglese.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Z8'][UNACCESSIBLE UUID '0Z9']

Queste quantità hanno una interpretazione nella teoria "rate-distortion". "n" è la posizione dell'ultima cifra significativa (in base 2) nel determinare la posizione di un punto x. "$\log_2 N_n$" è il numero di "bit" necessari per identificare un qualunque $x \in K$ con tale precisione.

E11.19 Sia a_n una successione positiva decrescente infinitesima. Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ dato da [0ZB]

$$K = \{0\} \cup \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}\,;$$

notate che è compatto. Studiate la dimensione di K in questi casi:

- $a_n = n^{-\theta}$ con $\theta > 0$;
- $a_n = \theta^{-n}$ con $\theta > 1$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0ZC']

E11.20 Siano $1 \leq d \leq n$ interi. Sia $[0,1]^d$ un cubo di dimensione d, lo vediamo come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ ponendo [0ZD]

$$K = [0,1]^d \times \{(0,0\dots0)\}$$

cioè

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x_1 \leq 1, \dots 0 \leq x_d \leq 1, x_{d+1} = \dots = x_n = 0\}$$

Si mostri che la dimensione di K è d.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0ZF']

E11.21 Si mostri che la dimensione della (immagine della) curva frattale di Koch è $\log 4/\log 3$. (Si veda ad esempio [54] per la definizione). [0ZG]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0ZH']

E11.22 Si mostri che la dimensione dell'insieme di Cantor è $\log(2)/\log(3)$. [0ZJ]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0ZK']

E11.23 Prerequisiti:13.c.1,12.c.3.Dentro nello spazio di Banach $X = C^0([0,a])$ dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$ consideriamo [0ZM]

$$K = \{f, f(0) = 0, \forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|\}$$

dove $L > 0, a > 0$ sono fissati.

Si stimi $N(\rho)$ per $\rho \to 0$

E11.24 `Argomenti:ultrametrica.Prerequisiti:10.m.9.` [0ZP]

Sia $\lambda > 0$. Definiamo lo spazio ultrametrico delle successioni come in Sez. §10.m.a: sia I finito, di cardinalità p; sia $X = I^{\mathbb{N}}$ lo spazio delle successioni; sia c come in eqn. (10.m.10); sia $d(x, y) = \lambda^{-c(x,y)}$. Per gli esercizi 10.m.14 e 10.m.11 (X, d) è compatto.

Si mostri che la dimensione di (X, d) è $\log p / \log \lambda$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '0ZQ']*

E11.25 `Difficoltà:*.`Esibite un compatto $K \subset \mathbb{R}$ per cui non esiste il limite (11.2). [0ZR]

†84 Per il teorema di Heine-Borel 10.j.1 sappiamo che $N(\rho) < \infty$

§12 Spazi normati [0ZT]

Sia nel seguito X uno spazio vettoriale basato sul campo reale $\mathbb{R}$.

Definizione 12.1 (Norma). *Una* norma *è un operazione che mappa un vettore $v \in X$ in un numero reale $\|v\|$, che soddisfa* [0ZV]

1. $\|v\| \geq 0$ *e* $\|v\| = 0$ *se e solo se* $v = 0$*;*
2. *per ogni* $v \in X$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *si ha* $|t|\,\|v\| = \|tv\|$ *(diremo che la norma è* assolutamente omogenea*);*
3. (Disuguaglianza triangolare) *per ogni* $v, w \in X$ *si ha*
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad ;$$
questa dice che un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due.

Nota 12.2. *Molti dei risultati negli esercizi successivi si generalizzano al caso di* "norme asimmetiche", *in cui la seconda richiesta sia sostituita da questa:* per ogni reale $t \geq 0$ si ha $t\|v\| = \|tv\|$. *(In questo caso diremo che la norma è* positivamente omogenea*).* [0ZW]

Esercizi

E12.3 Sia X uno spazio vettoriale e $f : V \to \mathbb{R}$ una funzione che è *positivamente omogenea*, cioè: per ogni $v \in X$ e $t \geq 0$ si ha $tf(v) = f(tv)$. [0ZX]

Mostrate che f è convessa se e solo se vale la *disuguaglianza triangolare*: per ogni $v, w \in X$ si ha
$$f(v + w) \leq f(v) + f(w) \quad .$$

In particolare, una norma è sempre una funzione convessa.

E12.4 Notate che se $v, w \in X$ sono linearmente dipendenti e hanno lo stesso verso (cioè si può scrivere $v = \lambda w$ o $w = \lambda v$, per $\lambda \geq 0$), allora si ha [0ZY]
$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \quad .$$

In particolare, una norma non è una funzione strettamente convessa, perché
$$\|{}^{v}\!/_{2} + {}^{v}\!/_{2}\| = \frac{1}{2}\|v\| + \frac{1}{2}\|v\| \quad .$$

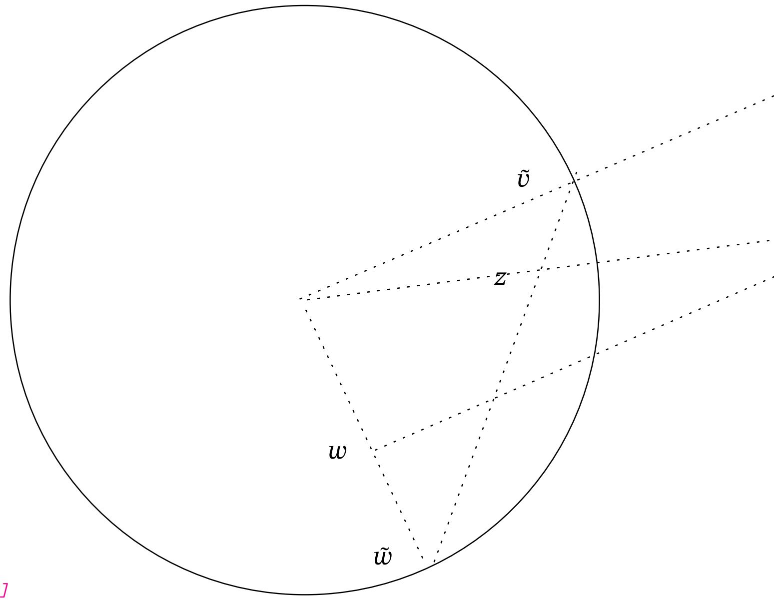
E12.5 Prerequisiti:12.7, 15.d.10, 12.3.Difficoltà:*.Diremo che lo spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è *strettamente convesso*[†85] se le seguenti proprietà equivalenti valgono. [0ZZ]

- Il disco $D = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ è strettamente convesso. [†86]
- La sfera $\{x \in X, \|x\| = 1\}$ non contiene segmenti non-banali (cioè, segmento di lunghezza positiva).

[†85] Si veda [33] per ulteriori proprietà.
[†86] La definizione è in 15.d.10.

- Per $v, w \in D$ con $\|v\| = \|w\| = 1$ e $v \neq w$, per ogni t con $0 < t < 1$ si ha che $\|tv + (1-t)w\| < 1$.
- Per ogni $v, w \in X$ che sono linearmente indipendenti si ha $\|v + w\| < \|v\| + \|w\|$.

Dimostrate che le quattro precedenti clausule sono equivalenti.



Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '102']

E12.6 Sia X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$, mostrate che l'operazione somma $'+'$: $X \times X \to X$ è continua. [105]

E12.7 Prerequisiti:10.b.25. [106]

Sia di nuovo X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$. Sia $B(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : \|x-y\| < r\}$ la palla; sia $D(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : \|x-y\| \leq r\}$ il disco; sia $S(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : \|x-y\| = r\}$ la sfera. Si mostri che $\overline{B(x,r)} = D(x,r)$, che $B(x,r) = D(x,r)^{\circ}$, e che $\partial B(x,r) = \partial D(x,r) = S(x,r)$. Si mostri inoltre che $B(x,r)$ non è chiuso e $D(x,r)$ non è aperto.

E12.8 Prerequisiti:10.b.21.Sia X uno spazio vettoriale, siano ϕ, ψ due norme su esso. Mostrate che le topologie generate da ϕ e ψ coincidono, se e solo se esistono $0 < a < b$ tali che [107]

$$\forall x, \quad a\psi(x) \leq \phi(x) \leq b\psi(x) \ . \tag{12.9}$$

(Quando la relazione (12.9) sussiste, diremo che le norme sono *"equivalenti"*).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '108']

E12.10 *Vogliamo mostrare che "le norme in $\mathbb{R}^n$ sono tutte equivalenti".* [109]

Sia $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ la norma euclidea. Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ una norma: si può mostrare che ϕ è una funzione convessa 12.3, e dunque che è una funzione continua per 15.b.9. Usate questo fatto per dimostrare che esistono $0 < a < b$ tali che

$$\forall x, \quad a\|x\| \leq \phi(x) \leq b\|x\| \ . \tag{12.11}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10B']

§12.a Norme nello spazio Euclideo [2CK]

Definizione 12.a.1. *Dato $p \in [1, \infty]$, si definiscono le norme $\|x\|_p$ su $\mathbb{R}^n$ con* [10C]

$$\|x\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} & p \neq \infty \\ \max_{i=1}^n |x_i| & p = \infty \end{cases} \tag{12.a.2}$$

(Il fatto che queste siano norme si dimostra con la 12.a.10).

Esercizi

E12.a.3 Mostrate che $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. [10D]

E12.a.4 Prerequisiti:17.e.2.Dati $t, s \in [1, \infty]$ con $s > t$ e $x \in \mathbb{R}^n$ mostrate che $\|x\|_s \leq \|x\|_t$. Inoltre mostrate che $\|x\|_s < \|x\|_t$ se $n \geq 2$ e $x \neq 0$ e x non è multiplo di uno dei vettori della base canonica $e_1, \dots e_n$. [10F]

Suggerimenti:

1. *usate che $1 + t^p \leq (1 + t)^p$ per $p \geq 1$ e $t \geq 0$; o*
2. *usate i moltiplicatori di Lagrange; o*
3. *ricordiamo che $f(a+b) > f(a)+f(b)$ quando $a \geq 0, b > 0$ $f(0) = 0$ e $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa e continua in 0 (si veda l'esercizio 15.d.2), dunque derivate $\frac{d}{dt}(\log \|x\|_t)$ e ponete $f(z) = z \log(z)$).*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10G']

E12.a.5 Dati $s, t \in [1, \infty]$ con $s < t$ mostrate che $n^{-1/s}\|x\|_s \leq n^{-1/t}\|x\|_t$ (dove si intende $n^{-1/\infty} = 1$). (Notate che questa è una disuguaglianza fra medie). [10J]
(Sugg. Ponete $\alpha = t/s$ e $y_i = |x_i|^s$, poi usate la convessità di $f(y) = y^\alpha$. Altro suggerimento: usate 12.a.6.) Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10K']

E12.a.6 Siano dati $p, q \in [1, \infty]$ tali che $1/p + 1/q = 1$ [†87] e $x, y \in \mathbb{R}^n$; si mostri la **disuguaglianza di Hölder** in questa forma [10M]

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad . \tag{12.a.7}$$

In quali casi si ha uguaglianza?

Suggerimenti: assumete $x_i, y_i \geq 0$; per i casi con $p, q < \infty$ potete:

- *usare la disuguaglianza di Young (15.d.3 o 24.16);*
- *usare i moltiplicatori di Lagrange;*
- *partire dal caso $n = 2$ e porre $x_2 = tx_1$ e $y_2 = ay_1$; per i casi $n \geq 3$ usare induzione.*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10N']

E12.a.8 Prerequisiti:12.a.6.Si deduca la versione [10P]

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \|x\|_p \|y\|_q \quad ; \tag{12.a.9}$$

dalla (12.a.7). In quale caso vale l'uguaglianza?

E12.a.10 Prerequisiti:12.a.6.Dato $p \in [1, \infty]$ si mostri la **disuguaglianza di Minkowski** [10Q]

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \quad . \tag{12.a.11}$$

Se ne deduce che $\|x\|_p$ sono norme.

Per $p \in (1, \infty)$ trovate una semplice condizione (necessaria e sufficiente) che comporti l'uguaglianza; confrontatela con 12.4; deducete che $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$ per $p \in (1, \infty)$ è uno *spazio normato strettamente convesso* (vedere 12.5). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '10R']*

E12.a.12 Prerequisiti:12.3,15.d.8,12.a.4.Sia $r > 0$; se $p \in [1, \infty]$ allora la palla $B_r^p = \{\|x\|_p < r\}$ è convessa; inoltre $B_r^p \subseteq B_r^{\tilde p}$ se $\tilde p > p$. Nel caso $n = 2$ del piano, studiare graficamente la forma delle palle al variare di p. Vi sono punti che si trovano sulla frontiera di tutte le palle? *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '10T']* [10S]

E12.a.13 Se $r > 0$ e $p \in (1, \infty)$ allora la sfera $\{\|x\|_p = r\}$ è una superficie regolare. [10V]
Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '10W']*

E12.a.14 Prerequisiti:(12.a.2).Dotiamo $\mathbb{R}^n$ della norma $\|x\|_\infty$: mostrare che in dimensione 2 il disco $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \le 1\}$ è un quadrato, e in dimensione 3 è un cubo, *etc etc.* [10X]

Ora dotiamo $\mathbb{R}^n$ della norma $\|x\|_1$: mostrare che in dimensione 2 il disco $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 \le 1\}$ è un *rombo* cioè precisamente un quadrato ruotato di 45 gradi; e in dimensione 3 il disco è un'ottaedro.

E12.a.15 Trovate una norma in $\mathbb{R}^2$ tale che la palla sia un poligono regolare di n lati. [10Y]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '10Z']*

§12.b Isometrie [2CH]

Riscriviamo la definizione 10.i.1 nel caso di spazi normati.

Definizione 12.b.1. *Se M_1, M_2 sono spazi vettoriali con norme $\|\|_{M_1}$ e rispettivamente $\|\|_{M_2}$, allora φ è un isometria quando* [110]

$$\forall x, y \in M_1, \|x - y\|_{M_1} = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{M_2} \tag{12.b.2}$$

(riscrivendo la definizione di distanza usando le norme).

La confronteremo con questa definizione.

Definizione 12.b.3. *Siano B_1, B_2 due spazi vettoriali normati. Una funzione $f : B_1 \to B_2$ è un'**isometria lineare** se è lineare e se* [111]

$$\|z\|_{B_1} = \|f(z)\|_{B_2} \; \forall\, z \in B_1 \quad . \tag{12.b.4}$$

[†87] Si intende che se $p = 1$ allora $q = \infty$; e viceversa.

Se φ è lineare allora la definizione di equazione (12.b.2) è equivalente alla definizione di *isometria lineare* vista in equazion (12.b.4) (basta porre $z = x - y$). Questo spiega perché entrambi vengono chiamate “isometrie”.

Per il teorema di Mazur–Ulam [58] se M_1, M_2 sono spazi vettoriali (su campo reale) dotati di norma e φ è una isometria surgettiva, allora φ è affine (che vuol dire che $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(0)$ è lineare).

Ci chiediamo ora se vi possono essere isometrie che non sono mappe lineari, o più in generale mappe affini.

Esercizi

E12.b.5 Supponiamo che la sfera $\{x \in M_2, \|x\|_{M_2} = 1\}$ non contenga segmenti non-banali: allora ogni funzione che soddisfa (12.b.2) è necessariamente affine. [112]

(Si veda anche l’esercizio 12.5).

E12.b.6 La condizione che φ sia surgettiva non si può togliere dal Teorema di Mazur-Ulam. Trovate un esempio. [114]

Sugg. Per via dell’esercizio 12.b.5, la sfera $\{x \in M_2, \|x\|_{M_2} = 1\}$ dovrà contenere segmenti.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '115']*

§12.c Convergenza totale [2CJ]

Definizione 12.c.1. *Sia nel seguito X uno spazio vettoriale basato sul campo reale $\mathbb{R}$, con norma $\|\cdot\|$. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di X. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$* converge totalmente *quando $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$.* [116]

Esercizi

E12.c.2 Si mostri che se le serie di $(f_n)_n, (g_n)_n$ convergono totalmente, allora la serie di $(f_n + g_n)_n$ converge totalmente. [117]

E12.c.3 `Argomenti:convergenza totale.Prerequisiti:10.a.12,10.a.13,10.a.14.` [118]

Sia V uno spazio vettoriale dotato di una norma $\|x\|$; dunque V è anche uno spazio metrico con la metrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Mostrate che le due asserzioni seguenti sono equivalenti.

- (V, d) è completo.
- Per ogni successione $(v_n)_n \subset V$ tale che $\sum_n \|v_n\| < \infty$, si ha che la serie $\sum_n v_n$ converge.

(La seconda viene a volte chiamata “criterio di convergenza totale”)

Uno spazio vettoriale normato $(V, |\cdot\|)$ per cui lo spazio metrico associato (V, d) è completo, è detto **spazio di Banach**.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '119']*

§12.d Norme di applicazioni lineari [2CM]

Siano nel seguito $(X, \|\|_X)$ e $(Y, \|\|_Y)$ spazi normati; sia $A : X \to Y$ un'applicazione lineare; definiamo la **norma indotta** come

$$\|A\|_{X,Y} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in X\ ,\ \|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y \ .$$

Esercizi

E12.d.1 Mostrate che $\|A\|_{X,Y} < \infty$ se e solo se A è continua. [11B]

E12.d.2 Notate che se X ha dimensione finita allora ogni applicazione lineare è continua, e [11C]

$$\|A\|_{X,Y} = \max_{x\in X\ ,\ \|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y \ .$$

E12.d.3 Sia $\mathcal{L}(X, Y)$ lo spazio di tutte le applicazioni lineari continue. Mostrate che $\| \cdot \|_{X,Y}$ è una norma in $\mathcal{L}(X, Y)$. [11D]

E12.d.4 Sia $(Z, \|\|_Z)$ un ulteriore spazio normato, e $B : Y \to Z$ una applicazione lineare. Definiamo similmente [11F]

$$\|B\|_{Y,Z} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y\in Y\ ,\ \|y\|_Y \le 1} \|By\|_Z \quad ;$$

mostrate che

$$\|AB\|_{X,Z} \le \|A\|_{X,Y}\|B\|_{Y,Z} \ .$$

§12.e Norme di matrici [2CN]

Siano $p, q \in [1, \infty]$; usiamo nel seguito le norme $|x|_p$ definite in eqn. (12.a.2).

Definizione 12.e.1. *Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matrice; considerandola come una applicazione lineare fra gli spazi normati $(\mathbb{R}^n, ||_p)$ e $(\mathbb{R}^m, ||_q)$, definiamo di nuovo la* norma indotta *come* [11G]

$$\|A\|_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in\mathbb{R}^n\ ,\ |x|_p \le 1} |Ax|_q \tag{12.e.2}$$

(Notate che il massimo è sempre raggiunto in un punto con $|x|_p = 1$).

La norma $\|A\|_{2,2}$ è detta la norma spettrale. .

Definizione 12.e.3. *Definiamo inoltre le norme* [11H]

$$\|A\|_{F-\tilde p} = \begin{cases} \sqrt[\tilde p]{\sum_{i,j} |A_{i,j}|^{\tilde p}} & \tilde p < \infty \\ \max_{i,j} |A_{i,j}| & \tilde p = \infty \end{cases} ,$$

per $\tilde p \in [1, \infty]$. Il caso $\tilde p = 2$ è detto norma di Frobenious.

Esercizi

E12.e.4 Prerequisiti:12.10.Notate che le norme $\|A\|_{p,q}$ e $\|A\|_{F-\tilde p}$ sono tutte equivalenti. [11J]

E12.e.5 Prerequisiti:12.d.4.Consideriamo matrici quadrate, cioè $n = m$. Sappiamo da 12.d.4 che le norme $\|A\|_{p,q}$ sono submoltiplicative, cioè $\|AB\|_{p,q} \le \|A\|_{p,q}\|A\|_{p,q}$. [11K]

Mostrate che anche la norma di Frobenious $\|A\|_{F-2}$ è submoltiplicativa.

Notate che per una norma submoltiplicativa si ha che $\|A^k\| \le \|A\|^k$ per ogni k naturale.

E12.e.6 Mostrate che [11M]

$$\|A\|_{1,1} = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}|,$$

$$\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \quad .$$

E12.e.7 Se $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ possiamo definire le norme indotte [11N]

$$\|A\|_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in\mathbb{C}^n\ ,\ |x|_p\le 1} |Ax|_q \quad . \tag{12.e.8}$$

Mostrate che $\|A\|_{p,q} = \|\overline{A}\|_{p,q}$.

E12.e.9 Mostrate che se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ si ha [11P]

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n, |x|_2\le 1} |Ax|_2 = \max_{x\in\mathbb{C}^n, |x|_2\le 1} |Ax|_2 \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '11Q']*

§12.f Somma di Minkowski [2CP]

Sia nel seguito X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$.

Definizione 12.f.1. *Sia X uno spazio vettoriale, e siano $A, B \subseteq X$. Definiamo la **somma di Minkowski** $A \oplus B \subseteq X$ come* [11R]

$$A \oplus B = \{x + y \,:\, x \in A, y \in B\} \quad .$$

Nel seguito, dati $A \subseteq X, z \in X$ indicheremo con $A + z = \{b + z \,:\, b \in B\}$ la traslazione di A nella direzione z.

Esercizi

E12.f.2 Prerequisiti:12.f.1.Mostrate che la somma è associativa ed è commutativa; e che la somma ha un unico elemento neutro, che è l'insieme $\{0\}$ costituito dalla sola origine. [11S]

E12.f.3 Prerequisiti:12.f.1.Se A è aperto mostrate che $A \oplus B$ è aperto. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '11V']* [11T]

E12.f.4 Prerequisiti:12.f.1.Se A, B sono compatti mostrate che $A \oplus B$ è compatto. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '11X']* [11W]

E12.f.5 Prerequisiti:12.f.1.Se A è chiuso e B è compatto, mostrate che $A \oplus B$ è chiuso. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '11Z']* [11Y]

E12.f.6 Prerequisiti:12.f.1.Mostrate un esempio dove A, B sono chiusi ma $A \oplus B$ non è chiuso. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '121']* [120]

E12.f.7 Prerequisiti:12.f.1.Se A, B sono convessi mostrate che $A \oplus B$ è convesso. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '123']* [122]

Si vedano anche gli esercizi 6.c.12 e 10.d.4.

§12.g Morfologia matematica [2CQ]

Sia nel seguito X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$.

Definizione 12.g.1. *Per $A, B \subseteq X$ sottoinsiemi, ricordiamo la definizione della* somma di Minkowski $A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ *vista in 12.f.1.* [124]

Fissato ora un insieme B, definiamo

- *la* ***dilatazione*** *di un insieme $A \subseteq X$ essere $A \oplus B$;*
- *l'****erosione*** *di un insieme $A \subseteq X$ come*

$$A \ominus B = \{z \in X : (B + z) \subseteq A\} \quad ;$$

- *la* ***chiusura*** *$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$;*
- *l'* ***apertura*** *$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$.*

Dove, dati $B \subseteq X, z \in X$, abbiamo indicato con $B+z = \{b+z : b \in B\}$ la traslazione di B nella direzione z. Nelle precedenti operazioni B è noto come "elemento strutturale", e nelle applicazioni spesso B è un disco o una palla.

Siano nel seguito $A, B, C \subseteq X, w, z \in X$. Alcuni dei seguenti esercizi sono tratti da [29].

Esercizi

E12.g.2 Prerequisiti:12.g.1. [125]

Mostrate le seguenti identità:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \bigcup_{y \in B} (A + y) \\ A \ominus B &= \bigcap_{y \in B} (A - y) \end{aligned}$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '126']*

E12.g.3 Prerequisiti:12.g.2,12.g.1. [127]

Sia $\tilde{B} = \{-b : b \in B\}$: mostrate che $(A \oplus B)^c = A^c \ominus \tilde{B}$, dove $A^c = X \setminus A$ è il complementare. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '128']*

E12.g.4 Prerequisiti:12.g.1,12.g.2. [129]

Mostrate che le quattro operazioni sono monotone: se $A \subseteq C$ allora $A \oplus B \subseteq C \oplus B$, $A \ominus B \subseteq C \ominus B$, $A \bullet B \subseteq C \bullet B$ e $A \circ B \subseteq C \circ B$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12B']

E12.g.5 Prerequisiti:12.g.1,12.f.3,12.g.3. Se A è chiuso mostrate che $A \ominus B$ è chiuso. [12C] *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12D']

E12.g.6 Prerequisiti:12.g.1. [12F]

Mostrate che la erosione gode della proprietà invariantiva in questo senso:

$$(A+z) \ominus (B+z) = A \ominus B \ .$$

E12.g.7 Prerequisiti:12.g.1. [12G]

Inoltre, l'erosione soddisfa $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12H']

E12.g.8 Prerequisiti:12.g.1. [12J]

Mostrate che la dilatazione gode della proprietà distributiva rispetto all'unione:

$$(A \cup C) \oplus B = (A \oplus B) \cup (C \oplus B).$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12K']

E12.g.9 Prerequisiti:12.g.1,12.g.8,12.g.3. Mostrate che la erosione gode della proprietà [12M] distributiva rispetto all'intersezione:

$$(A \cap C) \ominus B = (A \ominus B) \cap (C \ominus B).$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12N']

E12.g.10 Prerequisiti:12.g.1,12.g.3. Sia $\tilde{B} = \{-b : b \in B\}$. Mostrate che [12P]

$$(A \bullet B)^c = (A^c \circ \tilde{B}) \ .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12Q']

E12.g.11 Prerequisiti:12.g.1. [12R]

Mostrate che

$$A \subseteq (C \ominus B)$$

se e solo se

$$(A \oplus B) \subseteq C \ .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12S']

E12.g.12 Prerequisiti:12.g.1. [12T]

Ricordiamo che l'operazione $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$ si chiama "chiusura".

- Mostrate che $A \subseteq A \bullet B$.
- Sia $X = \mathbb{R}^n$, $B = B_r = \{\|x\| < r\}$ una palla, trovate un esempio di insieme A aperto non vuoto limitato per cui $A \bullet B = A$.

- Sia $X = \mathbb{R}^n$, $B = B_r$ una palla, trovate un esempio per cui $A \bullet B \neq A$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '12V']*

E12.g.13 `Prerequisiti:`12.g.1,12.g.2. [12W]

L'apertura è data anche da $A \circ B = \bigcup_{x \in X, B+x \subseteq A} (B + x)$, il che significa che è il luogo delle traslazioni dell'elemento strutturale B all'interno dell'insieme A. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '12X']*

E12.g.14 `Prerequisiti:`12.g.1.Nel seguito $A, B, \hat{B} \subseteq \mathbb{R}^n$. [12Y]

- Trovate un esempio dove $B \overset{\neq}{\subset} \hat{B}$ e $A \circ B \overset{\neq}{\subset} A \circ \hat{B}$.
- Trovate un esempio dove $B \overset{\neq}{\subset} \hat{B}$ e $A \circ \hat{B} \overset{\neq}{\subset} A \circ B$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '12Z']*

E12.g.15 `Prerequisiti:`12.g.1,12.g.13.Se A è convesso e $\hat{B}$ è l' inviluppo convesso (vedere 15.a.15) di B mostrate che $A \circ B \subseteq A \circ \hat{B}$. Mostrate con un esempio che l'uguaglianza potrebbe non valere. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '131']* [130]

E12.g.16 `Prerequisiti:`12.g.1,12.g.13.Se A, B sono convessi mostrate che $A \circ B$ è convesso. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '133']* [132]

§13 Semicontinuità, limiti destri e sinistri [137]

§13.a Semi continuità [2CV]

Sia (X, τ) uno spazio topologico.

Definizione 13.a.1. *Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice* semicontinua inferiormente *(abbreviata* s.c.i.*) se* [138]

$$\forall x_0 \in D(X) \quad , \quad \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

e viceversa si dice semicontinua superiormente *(abbreviata* s.c.i.*) se*

$$\forall x_0 \in D(X) \quad , \quad \limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0) \,.$$

($D(X)$ sono i punti di accumulazione in X).

Si noti che f è *semicontinua inferioriormente* se e solo se $(-f)$ è *semicontinua superiormente*: dunque in molti esercizi successivi vedremo solo i casi *s.c.i.*

Esercizi

E13.a.2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f(0) = 0$ e e $f(x) = 1/q$ se $|x| = p/q$ con p, q numeri interi primi tra loro con $q \geq 1$. Mostrare che f è continua su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e discontinua in ogni $t \in \mathbb{Q}$. [139]

Mostrate che la funzione descritta è s.c.s. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '13B']*

E13.a.3 `Prerequisiti:13.a.2.` [13C]

Costruire una funzione monotona con la stessa proprietà di quella vista nell'esercizio 13.a.2.

E13.a.4 Sia $f : X \to \mathbb{R}$; le seguenti asserzioni sono equivalenti: [13D]

1. f è *semicontinua inferiormente*,
2. per ogni t, si ha che il sottolivello
$$S_t = \{x \in X, f(x) \leq t\}$$
è chiuso,
3. l'epigrafico
$$E = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}, f(x) \leq t\}$$
è chiuso in $X \times \mathbb{R}$.

Si noti che la seconda condizione comporta che f è continua da (X, τ) in $\mathbb{R}, \tau_+$ dove $\tau_+ = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ è l'insieme delle semirette, che è una topologia (facile verifica).

Si formuli poi l'equivalente teorema per le funzioni *semicontinue superiormente*.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '13F']*

E13.a.5 Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ sono semicontinue inferiormente, allora $f + g$ è s.c.i. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '13H']* [13G]

E13.a.6 Sia I una famiglia di indici; poi, per $n \in I$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ siano funzioni s.c.i., definiamo $f \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n\in I} f_n$ allora f è s.c.i. (a valori $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$). [†88]. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '13K']* [13J]

E13.a.7 Viceversa, data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i., si mostri che esiste sempre una successione crescente di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tali che $f_n(x) \to_n f(x)$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '13N']* [13M]

E13.a.8 `Argomenti:inf-convoluzione. Difficoltà:*.` Nel caso in cui (X, d) sia uno spazio metrico e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sia s.c.i. limitata dal basso, sia [13P]

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y\in X} \{f(y) + nd(x, y)\}$$

la *inf-convoluzione*: si mostri che la successione f_n è una successione crescente di funzioni Lipschitziane con $f_n(x) \to_n f(x)$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '13Q']*

E13.a.9 Data $f : X \to \mathbb{R}$, si definisce [13R]

$$f^*(x) = f(x) \vee \limsup_{y\to x} f(y) \quad ;$$

si mostri che $f^*(x)$ è la più piccola funzione semi continua superiore che è maggiore o uguale a f in ogni punto.

Similmente si definisce

$$f_*(x) = f(x) \wedge \liminf_{y\to x} f(y)$$

e si ha $-(f^*) = (-f)_*$, e che dunque $f_*(x)$ è la più grande funzione semi continua inferiore che è minore o uguale a f in ogni punto.

Si noti infine che $f^* \geq f_*$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '13S']*

E13.a.10 `Argomenti:oscillazione.` [13T]

Data una qualunque $f : X \to \mathbb{R}$, si definisce la *funzione oscillazione* $\mathrm{osc}(f)$

$$\mathrm{osc}(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f^*(x) - f_*(x)$$

1. Si noti che $\mathrm{osc}(f) \geq 0$, e che f è continua in x se e solo se $\mathrm{osc}(f)(x) = 0$.
2. Si mostri che $\mathrm{osc}(f)$ è semicontinua superiore.
3. Se (X, d) è uno spazio metrico, si noti che

$$\mathrm{osc}(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+} \sup\{|f(y) - f(z)| \ ,\ d(x, y) < \varepsilon, d(x, z) < \varepsilon\} \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '13V']*

E13.a.11 Sia (X, τ) uno spazio topologico e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione; sia $\overline{x} \in X$ un [13W]

[†88] Si noti che questo vale anche quando $n \in I$ famiglia più che numerabile di indici; e vale in particolare quando le f_n sono continue

punto di accumulazione; sia infine U_n una famiglia di intorni aperti di $\overline{x}$ con $U_n \supseteq U_{n+1}$. Allora esiste una successione $(x_n) \subset X$ con $x_n \in U_n$ e $x_n \neq \overline{x}$ e tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \liminf_{x\to\overline{x}} f(x) \quad .$$

(Si noti che in generale non pretendiamo né ci aspettiamo che $x_n \to \overline{x}$). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '13X']

E13.a.12 Sia (X, τ) uno spazio topologico e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione; sia $\overline{x} \in X$ un punto di accumulazione; Sia A l'insieme di tutti i limiti $\lim_n f(x_n)$ (quando esistono) per tutte le successioni $(x_n) \subset X$ tali che $x_n \to \overline{x}$; allora [13Y]

$$\liminf_{x\to\overline{x}} f(x) \leq \inf A \quad ;$$

inoltre se (X, τ) soddisfa il primo assioma di numerabilità, allora l'uguaglianza vale e $\inf A = \min A$.

E13.a.13 Sia $f_1 : [0, \infty] \to [0, \infty]$ funzione monotona (debolmente crescente) e continua a destra. Sia poi $f_2 : [0, \infty) \to [0, \infty]$ data da [13Z]

$$f_2(s) = \sup\{t \geq 0 : f_1(t) > s\}$$

(con la convenzione che $\sup \emptyset = 0$) e poi ancora $f_3 : [0, \infty) \to [0, \infty]$ data da

$$f_3(s) = \sup\{t \geq 0 : f_2(t) > s\} \quad :$$

allora $f_1 \equiv f_3$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '140']

§13.b Funzioni regolate [2CT]

Definizione 13.b.1. [141]

*Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ **regolate** sono le funzioni che ammettono in ogni punto limite destro e limite sinistro.* [†89]

(Si noti in particolare che ogni funzione monotona è regolata, e ogni funzione continua è regolata.)

Esercizi

E13.b.2 Si mostri che una funzione regolata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata. [142]

E13.b.3 Prerequisiti:13.a.10. Sia $I = [a, b]$ intervallo chiuso e limitato. Si mostri che [143]

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è regolata se e solo se
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito di punti $P \subset I$ tale che, per ogni $J \subseteq I$, J intervallo aperto che non contiene alcun punto di P, si ha che l'oscillazione di f in J è minore di ε.

E13.b.4 Sia V l'insieme delle funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ costanti a tratti, che è lo spazio vettoriale generato dalle funzioni caratteristiche $\mathbb{1}_J$ degli intervalli $J \subseteq I$. Si mostri che la chiusura di V secondo la convergenza uniforme coincide con lo spazio delle funzioni regolate. [144]

Dunque lo spazio delle funzioni regolate dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$ è uno spazio di Banach.

Si vedano anche gli esercizi 16.7, 16.8, 16.9 e 18.8.

§13.c Trasformata di sup [2CR]

Definizione 13.c.1. *Sia $I = \mathbb{R}^+$ oppure $I = \mathbb{R}$ nel seguito, per semplicità.* [2CS]

Sia $\varepsilon > 0$; data $f : I \to \mathbb{R}$ limitata[†90] *, definiamo la* "trasformata sup" *come la funzione $g : I \to \mathbb{R}$ data da*

$$g(x) = \sup_{y \in (x, x+\varepsilon)} f(y) \ . \tag{13.c.2}$$

Riassumiamo questa trasformazione con la notazione $g = F(\varepsilon, f)$.

Esercizi

E13.c.3 Prerequisiti:13.c.1.Mostrate che g è regolata. [145]

E13.c.4 Prerequisiti:13.c.1.Mostrate che g è semicontinua inferiore. [146]

E13.c.5 Prerequisiti:13.c.1.Mostrate che $f = g$ se e solo se f è monotona debolmente decrescente e continua a destra. [147]

E13.c.6 Prerequisiti:13.c.1.Data [148]

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x = 4 \\ 0 & x \neq 4 \end{cases}$$

trovate f tale che $g = F(1, f)$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '149']*

E13.c.7 Prerequisiti:13.c.1.Mostrate che se f è continua allora g è continua. [14B]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '14C']*

E13.c.8 Prerequisiti:13.c.1,12.c.3.Sia $C_b = C_b(I)$ lo spazio delle funzioni $f : I :\to \mathbb{R})$ continue e limitate. Questo è uno spazio di Banach (uno spazio normato completo) con la norma $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$. [14D]

Consideriamo la mappa $F : [0,\infty) \times C_b \to C_b$ che trasforma $g = F(\varepsilon, f)$, come definito nella eqn. (13.c.2).

Mostrate che F è continua.

E13.c.9 Prerequisiti:13.c.1.Come cambiano i precedenti esercizi se si definisce invece [14F]

$$g(x) = \sup_{y \in [x, x+\varepsilon]} f(y) \ ? \tag{13.c.10}$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '14G']*

[†89] Negli estremi ovviamente si richiede uno solo dei due limiti.

[†90] L'ipotesi "limitata" è di comodo, i risultati successivi valgono anche senza questa ipotesi, con semplici modifiche.

§14 Continuità [14J]

§14.a Funzioni continue [2DP]

Definizione 14.a.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione; sia $x \in A$; f è detta* ***continua in*** *x se* [2DN]

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in A,\ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

f è detta ***continua*** *se è continua in ogni punto.*

L'insieme di tutte le funzioni continue $f : A \to \mathbb{R}$ è denotato con $C(A)$; è uno spazio vettoriale.

Ulteriori informazioni si possono trovare in Cap. 3 in [5] o Cap. 4 of [23].

Esercizi

E14.a.2 Sia $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si mostri che è limitata dall'alto [14K] †91 se e solo se $\limsup_{x\to 0+} f(x) < +\infty$.

E14.a.3 Prerequisiti:10.g.8.Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si mostri che l'insieme dei punti di discontinuità eliminabile (cioè i punti z per cui si ha $\lim_{x\to z} f(x) \neq f(z)$, cf. [61]) è al più numerabile. [14M]

E14.a.4 Prerequisiti:10.g.8.Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si mostri che l'insieme di punti di discontinuità del secondo tipo è al più numerabile (cioè i punti z dove esistono i limiti laterali ma $\lim_{x\to z+} f(x) \neq \lim_{x\to z-} f(x)$, cf. [61]). [14N]

E14.a.5 Prerequisiti:6.8.Fissato $\alpha > 1$ definiamo, per $x \in \mathbb{R}$, α^x come in 6.8. Mostrate che è una funzione continua e che è un omeomorfismo fra $\mathbb{R}$ e $(0, \infty)$. L'inversa di $y = \alpha^x$ è la funzione **logaritmo** $x = \log_\alpha y$. [21N]

E14.a.6 Prerequisiti:10.f.4.Difficoltà:*. [14P]

Sia $C \subset \mathbb{R}$ chiuso e sia $f : C \to \mathbb{R}$ continua; mostrate che esiste sempre $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua che estende f, cioè $g_{|C} = f$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '14Q']*

E14.a.7 Difficoltà:**.Trovate una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che non è monotona in nessun intervallo (aperto nonvuoto). [14R]

E14.a.8 Prerequisiti:integrale di Riemann. [14T]

Data $f = f(x, y) : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua e posto

$$g(x) = \int_0^1 f(x, y) \mathrm{d}y \quad ,$$

mostrare che g è continua.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '14V']*

E14.a.9 Data $f = f(x, y) : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua e posto [14W]

$$g(x) = \max_{y\in[0,1]} f(x, y)$$

mostrare che g è continua. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '14X']*

E14.a.10 Siano x_n, y_n successioni reali strettamente positive con limite zero; esiste una funzione continua e monotona $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tale che $f(0) = 0$ e $\forall x > 0, f(x) > 0$, e tale che $\forall n, f(x_n) < y_n$ (da cui $\lim_{x\to0+} f(x) = 0$). [14Y]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '14Z']*

E14.a.11 Sia data una funzione $g : [0, \infty) \to [0, \infty]$ tale che $g(0) = 0$ e $\lim_{x\to0+} g(x) = 0$; allora esiste una funzione continua e monotona $f : [0, \infty) \to [0, \infty]$ tale che $f(0) = 0$, $\lim_{x\to0+} f(x) = 0$ e $f \geq g$. [150]

E14.a.12 Dimostrare che se una funzione monotona è definita su un sottoinsieme denso di un intervallo aperto I, e ha immagine densa in un altro intervallo aperto J, allora si prolunga a una funzione continua monotona tra i due intervalli I, J aperti. [151]

(Cosa succede se I è chiuso ma J è aperto?)

E14.a.13 `Prerequisiti:categorie di Baire Sec. §10.k.Difficoltà:*.` [152]

Si mostri che non esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua sui razionali e discontinua sugli irrazionali. *(Sugg. Si mostri che gli irrazionali $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non sono un F_σ in $\mathbb{R}$, usando il teorema di Baire.)*

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '153']*

§14.b Funzioni uniformemente continue [2DQ]

Definizione 14.b.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione; f è detta **uniformemente continua** se* [155]

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x, y \in A,\ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ .$$

*Più in generale, dati (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici, data una funzione $f : X_1 \to X_2$, f è detta **uniformemente continua** se*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x, y \in X_1,\ d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\ .$$

Si vede facilmente che una funzione *uniformemente continua* è continua in ogni punto.

Esercizi

E14.b.2 `Prerequisiti:14.b.1.`Sia $f : X_1 \to X_2$ con (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici. [156]

Una funzione $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty]$ monotona (debolmente) crescente, con $\omega(0) = 0$ e $\lim_{t\to0+} \omega(t) = 0$, tale che

$$\forall x, y \in X_1,\ \ d_2(f(x), f(y)) \leq \omega(d_1(x, y))\ , \tag{14.b.3}$$

[†91] cioè esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in (0, 1]$ si ha $f(x) < c$

è detta **modulo di continuità** per la funzione f. (Notate che f può avere molti moduli di continuità).

Per esempio se la funzione f è Lipschitziana cioè esiste $L > 0$ tale che

$$\forall x, y \in X_1, \quad d_2(f(x), f(y)) \le L\, d_1(x, y)$$

allora f soddisfa la eqz. (14.b.3) ponendo $\omega(t) = Lt$.

Vedremo ora che l'esistenza di un modulo di continuità è equivalente alla uniforme continuità di f.

- Se f è uniformemente continua, mostrate che la funzione

$$\omega_f(t) = \sup\{d_2(f(x), f(y)) \ : \ x, y \in X_1, d_1(x, y) \le t\} \tag{14.b.4}$$

  è il più piccolo modulo di continuità.[†92]
- Notate che il modulo definito in (14.b.4) potrebbe non essere continuo, e potrebbe essere infinito per t grande — trovate esempi a riguardo.
- Mostrate inoltre che se f è uniformemente continua si può trovare un modulo che è continuo dove è finito.
- Viceversa è facile vericare che se f ha un modulo di continuità, allora è uniformemente continua.

Se non conoscete la teoria degli spazi metrici, potete dimostrare i precedenti risultati nel caso in cui $f : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$. (Si veda anche l'esercizio 14.b.12, che mostra che in questo caso il modulo ω definito in (14.b.4) è continuo ed è finito).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '157'] [UNACCESSIBLE UUID '158'] [UNACCESSIBLE UUID '159']

E14.b.5 Sia (X, d) spazio metrico, sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente continue, si mostri che $\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale. [15C]

Questo vale più in generale se $f : X \to X_2$ dove X_2 è uno spazio vettoriale normato (a cui associamo la distanza derivata dalla norma).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '15D']

E14.b.6 Difficoltà:*. Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici, con (X_2, d_2) completo. Sia $A \subset X_1$ e $f : A \to X_2$ una funzione uniformemente continua. Si mostri che esiste una funzione uniformemente continua $g : \overline{A} \to X_2$ che estende f; inoltre l'estensione g è unica. [15F]

Si noti che se ω è un modulo di continuità per f allora è anche un modulo di continuità per g. (Si assuma che ω sia continuo, o almeno che sia semicontinuo superiore).
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '15G'] [UNACCESSIBLE UUID '15H']

E14.b.7 Prerequisiti: 14.b.6. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si mostri che f è uniformemente continua se e solo esiste una funzione continua $g : \overline{A} \to \mathbb{R}$ che estende f; inoltre l'estensione g è unica. [15J]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '15K']

E14.b.8 Sia $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si mostri che è uniformemente continua se e solo se esiste finito il limite $\lim_{x\to 0+} f(x)$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '15N']* [15M]

E14.b.9 Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che esista finito il limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Si mostri che è uniformemente continua. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '15Q']* [15P]

E14.b.10 Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, si mostri che queste due asserzioni sono equivalenti. [15R]

- Esiste $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua e tale che esiste finito il limite $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$.
- f è uniformemente continua.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '15S']*

E14.b.11 Si trovi un esempio di $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua e limitata, ma non uniformemente continua. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '15V']* [15T]

E14.b.12 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Sia il modulo di continuità ω, definito tramite la eqn. (14.b.4) come nell'esercizio 14.b.2. Si mostri che ω è subadditiva cioè [15W]

$$\omega(t) + \omega(s) \geq \omega(t+s) \quad .$$

Sapendo che $\lim_{t\to 0+}\omega(t) = 0$ se ne conclude che ω è continua. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '15X']*

E14.b.13 `Prerequisiti:14.b.12.` Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua; si mostri che [15Z]

$$\limsup_{x\to\pm\infty} |f(x)|/x < \infty$$

o equivalentemente che esiste una costante C tale che $|f(x)| \leq C(1 + |x|)$ per ogni x. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '160']*

E14.b.14 `Prerequisiti:10.b.22.` Siano (X_1, d_1), (X_2, d_2) e (Y, δ) tre spazi metrici; consideriamo il prodotto $X = X_1 \times X_2$ dotato della distanza $d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$. [†93] Sia $f : X \to Y$ una funzione con le seguenti proprietà: [161]

- Per ogni fissato $x_1 \in X_1$ la funzione $x_2 \mapsto f(x_1,x_2)$ è continua (come funzione da X_2 a Y);
- esiste un modulo di continuità ω tale che

  $$\forall x_1, \tilde{x}_1 \in X_2 \ , \ \ \forall x_2 \in X_2 \ , \delta\big(f(x_1,x_2), f(\tilde{x}_1,x_2)\big) \leq \omega\big(d_1(x_1,\tilde{x}_1)\big)$$

  (potremmo definire questa proprietà dicendo che la funzione $x_1 \mapsto f(x_1,x_2)$ è uniformemente continua, con costanti indipendenti dalla scelta di x_2).

Si mostri allora che f è continua.

Si veda anche il punto 3 dell'esercizio 18.8.

§14.c Funzioni Lipschitziane & Hölderiane [2DR]

Definizione 14.c.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice* ***Lipschitziana*** *se esiste $L > 0$ tale che $\forall x, y \in A$,* [162]

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \ .$$

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice ***Hölderiana*** *se esistono $L > 0$ e $\alpha \in (0, 1]$ tale che $\forall x, y \in A$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \ .$$

*La costante α è detta l'*ordine.

Come nel caso della "uniforme continuità", questa nozione si estende alle mappe fra spazi metrici.

Esercizi

E14.c.2 Prerequisiti:14.b.2.Mostrate che le funzioni Lipschitziane, e le Hölderiane, sono uniformemente continue; che cosa si può dire del loro modulo di continuità? [163]

E14.c.3 Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Si mostri che f' è limitata su I se e solo se f è Lipschitziana. [164]

E14.c.4 Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ tale che esiste $\alpha > 1$ per cui $\forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ (cioè f è Hölderiana di ordine $\alpha > 1$): si mostri che f è costante. [165]

E14.c.5 Sia data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e una decomposizione di $[a, b]$ in intervallini $I_1 = [a, t_1], I_2 = [t_1, t_2], \ldots, I_n = [t_{n-1}, b]$ tale che la restrizione di f su ciascun I_k è Lipschitziana di costante C. Si mostri che f è Lipschitziana di costante C. [166]

Similmente con le funzioni Hölderiane.

E14.c.6 Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Hölderiana con esponente $\alpha \leq 1$. Si mostri che f è Hölderiana con esponente β per ogni $\beta < \alpha$. [167]

Si noti che questo non è tecnicamente vero per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

E14.c.7 Si costruisca $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua ma non Hölderiana. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '16B'][UNACCESSIBLE UUID '16C']* [169]

E14.c.8 Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineare è Lipschitziana. [16D]

E14.c.9 Per ognuna delle seguenti funzioni, dire se è continua, uniformemente continua, Hölderiana (e con quale esponente), o Lipschitziana. [16F]

- $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$.
- $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.
- $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)/x$
- $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^\beta$ con $\beta > 0$.

[†92] Notate che la famiglia su cui si calcola l'estremo superiore contiene sempre i casi $x = y$, dunque $\omega(t) \geq 0$.

[†93] Sappiamo da 12.10 e 10.b.22 che vi sono diverse possibili scelte di distanze, che però sono fra loro equivalenti.

- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^\beta)$ con $\beta > 0$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '16H']*

E14.c.10 Dato $L \in (0, 1)$ se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa [16J]

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

allora esiste un unico "punto fisso" cioè un punto x per cui $f(x) = x$.

E14.c.11 Trovate una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che [16K]

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ma per cui non esiste un "punto fisso", cioè un punto x per cui $f(x) = x$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '16M']*

§14.d Funzioni discontinue [2DS]

Sia nel seguito (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 14.d.1. *Un insieme E si dice un F_σ se è unione numerabile di chiusi. (Si riveda l'esercizio 10.b.30).* [2CX]

Esercizi

E14.d.2 Notate che ogni insieme aperto $A \subset X$ nonvuoto è un F_σ. *(Sugg usate 10.d.3).* [16N]
Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '16P']*

E14.d.3 `Prerequisiti:13.a.10,13.a.4.`Data una generica $f : X \to \mathbb{R}$, si mostri che l'insieme E dei punti dove f è discontinua è un F_σ. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '16R']* [16Q]

E14.d.4 `Prerequisiti:14.d.1.Difficoltà:*.` [16S]

Supponiamo che (X, d) ammetta un sottoinsieme D che è denso ma ha parte interna vuota. [†94]

Dato un $E \subset X$ che è un F_σ, si costruisca una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ per cui E è l'insieme dei punti di discontinuità.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '16T']*

[†94]Cioè, sia D che il complementare $X \setminus D$ sono densi. $X = \mathbb{R}$ soddisfa tale requisito, prendendo ad esempio $D = \mathbb{Q}$.

§15 Funzioni e insiemi convessi [16V]

Presenteremo ora alcuni risultati riguardo alla convessità. Per semplicità useremo $\mathbb{R}^n$ come spazio ambiente, ma quasi tutti i risultati valgono in un qualunque spazio vettoriale.

§15.a Insiemi convessi [2F0]

Definizione 15.a.1. *Dati* $x_1, \dots x_k \in \mathbb{R}^n$ *, dati* $t_1, \dots t_k \geq 0$ *con* $t_1 + \cdots + t_k = 1$*, la somma* [16W]

$$x_1 t_1 + \cdots + x_k t_k$$

è una combinazione convessa *dei punti* $x_1, \dots x_k$.

Nota 15.a.2. *Se* $k = 2$ *allora la combinazione convessa si scrive usualmente come* $(tx + (1-t)y)$ *con* $t \in [0,1]$*; l'insieme di tutti questi punti è il segmento che collega* x *a* y. [23P]

Definizione 15.a.3. *Sia* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *un insieme; si dice* convesso *se* [16X]

$$\forall t \in [0,1], \quad \forall x, y \in C, \quad (tx + (1-t)y) \in C$$

cioè se il segmento che collega ogni $x, y \in C$ *è tutto compreso in* C.

(Notiamo che $\emptyset$ è un convesso, e che ogni sottospazio vettoriale o affine di $\mathbb{R}^n$ è convesso).

Gli insiemi convessi godono di tantissime proprietà interessanti, questa che segue è solo una piccola lista.

Topologia

Esercizi

E15.a.4 Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme; mostrate che è *convesso* se e solo se contiene ogni *combinazione convessa* dei suoi punti, cioè: per ogni $k \geq 1$, per ogni scelta di $x_1, \dots x_k \in C$, per ogni scelta $t_1, \dots t_k \geq 0$ con $t_1 + \cdots + t_k = 1$, si ha [16Y]

$$x_1 t_1 + \cdots + x_k t_k \in C \quad .$$

E15.a.5 `Argomenti:simplesso.` [16Z]

Dati $x_0, \dots x_k \in \mathbb{R}^n$, sia

$$\left\{ \sum_{i=0}^k x_i t_i \ : \ \sum_{i=0}^k t_i = 1 \forall i, t_i \geq 0 \right\} \tag{15.a.6}$$

l'insieme di tutte le possibili combinazioni, provare che questo insieme è convesso.

Quando i vettori $x_1 - x_0, x_2 - x_0 \dots x_k - x_0$ sono linearmente indipendenti, l'insieme sopra definito è un *simplesso* di dimensione k.

Si mostri che se $n = k$ allora il simplesso ha parte interna non vuota e uguale a

$$\left\{ \sum_{i=0}^n x_i t_i \ : \ \sum_{i=0}^n t_i = 1 \forall i, t_i > 0 \right\} \tag{15.a.7}$$

E15.a.8 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso contenente almeno due punti, sia V il più piccolo spazio affine che contiene A (si mostri che questo concetto è ben definito); e, visto A come sottoinsieme di V, si mostri che A ha parte interna non vuota. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '171']* [170]

E15.a.9 Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, $x \in A^\circ$ e $y \in A$ allora il segmento che li collega è contenuto in A°, salvo eventualmente per l'estremo y, cioè $\forall t \in (0,1), tx+(1-t)y \in A^\circ$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '173']* [172]

E15.a.10 Prerequisiti:15.a.9,10.b.5.Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, $x \in A^\circ$ e $z \in \partial A$ allora il segmento che li collega è contenuto in A°, salvo eventualmente per l'estremo z (cioè $\forall t \in (0,1), tx + (1-t)z \in A^\circ$). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '175']* [174]

E15.a.11 Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso, si mostri che, sia la sua apertura, quanto la sua chiusura, sono ancora convessi. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '177']* [176]

E15.a.12 Prerequisiti:10.b.29,15.a.10.Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso con parte interna nonvuota, si mostri che $\overline{A} = \overline{(A^\circ)}$ (la chiusura della parte interna di A). Trovate poi un semplice esempio di A per cui $\overline{A} \neq \overline{(A^\circ)}$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '179']* [178]

E15.a.13 Prerequisiti:8.13.Difficoltà:*. [17B]

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso, si mostri che $A^\circ = \left(\overline{A}\right)^\circ$ (la parte interna della chiusura di A).

Usando 15.a.18 si mostra facilmente che $A^\circ \supseteq \left(\overline{A}\right)^\circ$; solo che questo risultato fa comodo in una delle possibili dimostrazioni di 15.a.18 (!); una dimostrazione alternativa usa i simplessi come intorni, cf 15.a.5. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '17C']*

E15.a.14 Siano $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi convessi, per $i \in I$: dimostrate che [059]

$$\bigcap_{i\in I} C_i$$

è convesso.

Definizione 15.a.15. *Sia dunque $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto,* ***l'inviluppo convesso*** *di A l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono A. Per via di 15.a.14, $co(A)$ è il più piccolo insieme convesso contenente A.* [2G4]

Si vedano anche gli esercizi 12.f.7, 12.g.15 e 12.g.16.

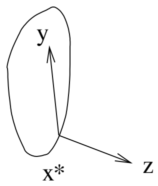
§15.a.a Proiezione, separazione

Esercizi

E15.a.16 Argomenti:proiezione.Difficoltà:*. Note:*Questo è il noto "teorema della proiezione", che vale per A convesso chiuso in uno spazio di Hilbert; se $A \subset \mathbb{R}^n$ allora la dimostrazione è più semplice, e è un utile esercizio..* [17D]

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso convesso nonvuoto e $z \in \mathbb{R}^n$, si mostri che esiste un unico punto di minimo x^* per il problema

$$\min_{x \in A} \|z - x\| \ .$$



Si mostri che x^* è il minimo se e solo se

$$\forall y \in A, \langle z - x^*, y - x^* \rangle \leq 0 \ .$$

x^* è chiamato "la proiezione di z su A".

(Notate che quest'ultima condizione dice semplicemente che l'angolo deve essere ottuso).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17G']

E15.a.17 Argomenti:separazione. Prerequisiti:15.a.16. [17H]

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso convesso non-vuoto e $z \notin A$, sia x^* definito come nell'esercizio precedente 15.a.16; definite $\delta = \|z - x^*\|$, $v = (z - x^*)/\delta$ e $a = \langle v, x^* \rangle$. Si dimostri che v, a e $v, a + \delta$ definiscono due iperpiani paralleli che separano fortemente z da A, nel senso che $\langle z, v \rangle = a + \delta$ ma $\forall x \in A, \langle x, v \rangle \leq a$.

E15.a.18 Argomenti:separazione. Difficoltà:*. [17J]

Questo risultato vale in contesti molto generali, ed è una conseguenza del "teorema di Hahn–Banach" (che fa uso del Lemma di Zorn); se $A \subset \mathbb{R}^n$ si può però dimostrare in modo elementare, vi invito a provarci.

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso nonvuoto e $z \notin A$, si mostri che esiste un iperpiano P che separa z da A, nel senso che $z \in P$ mentre A è contenuto in uno dei due semispazi chiusi che hanno P come bordo. Equivalentemente, in forma analitica, esistono $a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ tali che $\langle z, v \rangle = a$ ma $\forall x \in A, \langle x, v \rangle < a$; e

$$P = \{ y \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle y, v \rangle = a \} \ .$$

L'iperpiano P così definito è detto *iperpiano di supporto* di z per A.

Vi sono (almeno) due dimostrazioni possibili. Una possibile dimostrazione si fa per induzione su n; potete assumere senza perdita di generalità che $z = e_1 = (1, 0 \ldots 0), 0 \in A, a = 1$; tenete presente che l'intersezione di un convesso aperto con $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ è un convesso aperto in $\mathbb{R}^{n-1}$; questa dimostrazione è complessa ma non usa nessun prerequisito. Una seconda dimostrazione usa 15.a.11 e 15.a.17 se $z \notin \partial A$; se $z \in \partial A$ usa anche 15.a.12 per trovare $(z_n) \subset (A^c)^\circ$ con $z_n \to z$. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17K']

E15.a.19 Prerequisiti:15.a.18,12.f.3. Se A, B sono convessi disgiunti, con A aperto, mostrate che esiste un iperpiano che separa A e B, cioè esistono $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ e $c \in \mathbb{R}$ tale che [17M]

$$\forall x \in A, \langle x, v \rangle < c \text{ ma } \forall y \in B, \langle y, v \rangle \geq c \ ; \tag{15.a.20}$$

mostrate inoltre che se anche B è aperto, allora si può avere separazione stretta (cioè disuguaglianza stretta nell'ultimo termine in (15.a.20)).

(Suggerimento: dati $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ convessi nonvuoti, si mostri che

$$A - B \stackrel{def}{=} \{ x - y, x \in A, y \in B \}$$

è convesso; si mostri che se A è aperto allora $A - B$ è aperto, come in 12.f.3.) Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17N']

E15.a.21 Trovate un esempio di $A, B \subset \mathbb{R}^2$ convessi aperti con $\overline{A}, \overline{B}$ disgiunti, e tali che vi è un unico iperpiano che li separa (cioè una “unica” scelta di v, c che soddisfa (15.a.20); “unica”, a meno di moltiplicare v, c per una stessa costante positiva). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '17Q']* [17P]

E15.a.22 Prerequisiti:15.a.18.Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, $x \in A^\circ$ e $y \in \partial A$, allora la retta che li collega, proseguendo oltre y, rimane fuori da $\overline{A}$ (cioè $\forall t > 1, ty+(1-t)x \notin \overline{A}$). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '17S']* [17R]

E15.a.23 Argomenti:separazione,supporto. Prerequisiti: 15.a.8,15.a.18, 15.a.13. [17T]

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso nonvuoto e $z \in \partial A$, si dimostri che esistono $v \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$ tali che $\langle z, v\rangle = a$ e $\forall x \in A, \langle x, v\rangle \le a$. L’iperpiano così definito è detto *iperpiano di supporto* di z per A. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '17V']*

E15.a.24 Difficoltà:*.Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ convesso limitato aperto nonvuoto, mostrate che ∂A è sostegno di un arco semplice chiuso (e anche Lipschitz). [17W]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '17X']*

§15.b Funzione convessa

Definizione 15.b.1. *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione. f si dice* convessa *se* [17Y]

$$\forall t \in [0,1],\quad \forall x, y \in C,\quad f\big(tx + (1-t)y\big) \le tf(x) + (1-t)f(y)\ .$$

f si dice strettamente convessa *se inoltre*

$$\forall t \in (0,1),\quad \forall x, y \in C, x \ne y,\quad f\big(tx + (1-t)y\big) < tf(x) + (1-t)f(y)\ .$$

Definizione 15.b.2. *f si dice (strettamente) concava se $-f$ è (strettamente) convessa.* [17Z]

Le funzioni convesse godono di tantissime proprietà interessanti, questa che segue è solo una piccola lista.

...definizioni equivalenti

Esercizi

E15.b.3 Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso. Sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa; siano $x_1, \dots, x_n \in C$ e $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ tali che $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Si mostri che [180]

$$\sum_{i=1}^n t_i x_i \in C$$

e

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)\,.$$

E15.b.4 Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso. Sia $f : C \to \mathbb{R}$, si mostri che è convessa, se e solo se l’epigrafico [181]

$$\{(x, y) \mid x \in C\ ,\ f(x) \le y\}$$

è un sottoinsieme convesso di $C \times \mathbb{R}$.

Proprietà

Questa che segue è una lista di proprietà per funzioni convesse $f : C \to \mathbb{R}$ con $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Ovviamente queste proprietà valgono anche quando $n = 1$; ma quando $n = 1$ le dimostrazioni sono in genere più facili, si veda la sezione successiva.

Esercizi

E15.b.5 Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dato $l \in \mathbb{R}$, si definisca l'*insieme di sottolivello* come [182]

$$L_l = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le l\} \quad .$$

Mostrate che L_l è un insieme convesso (possibilmente vuoto). Deducete che i punti di minimo di f sono un insieme convesso (possibilmente vuoto). Mostrate che se f è strettamente convessa vi può essere al più un punto di minimo.

E15.b.6 Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso; siano $f_i : C \to \mathbb{R}$ convesse, dove $i \in I$ (una famiglia non vuota, e arbitraria, di indici), e definiamo $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$, dove supponiamo (per semplicità) che $f(x) < \infty$ per ogni i: si mostri che f è convessa. [183]

E15.b.7 `Prerequisiti:15.b.4,15.a.23.Difficoltà:*.`Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso, sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, sia fissato $z \in C^\circ$: si mostri che esiste $v \in \mathbb{R}^n$ tale che [184]

$$\forall x \in C, f(x) \ge f(z) + \langle v, x - z\rangle \quad . \tag{15.b.8}$$

Il piano così definito è detto *piano di supporto* per f in z. `Note:`*È preferibile non assumere che f sia continua nel dimostrare questo risultato, in quanto questo risultato si usa in genere per dimostrare che f è continua!*.*Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '185']*

E15.b.9 `Prerequisiti:12.a.1,12.10,15.b.7.Difficoltà:*.` [186]

Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso aperto, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, si mostri che f è continua.

`Note:`*Nel caso di dimensione $n = 1$, la dimostrazione è molto più facile, si veda 15.c.5.*

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '187']*

E15.b.10 `Argomenti:sottodifferenziale.Prerequisiti:15.b.7.Difficoltà:*.` [188]

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso aperto, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa; dato $z \in C$, si definisce il *sottodifferenziale* $\partial f(z)$ come l'insieme dei v per cui la relazione (15.b.8) vale (cioè, $\partial f(z)$ contiene i vettori v usati per definire i piani di supporto a f in z).

$\partial f(z)$ gode di interessanti proprietà.

- $\partial f(z)$ è localmente limitato: se $z \in C$ e $r > 0$ è tale che $B(z, 2r) \subset C$ allora esiste $L > 0$ tale che $\forall y \in B(z, r), \forall v \in \partial f(x)$ si ha $|v| \le L$. In particolare, per ogni $z \in C$ si ha che $\partial f(z)$ è un insieme limitato.
- Mostrate che ∂f è *continua superiormente* in questo senso: se $z \in C$ e $(z_n)_n \subset C$ e $v_n \in \partial f(z_n)$ e se $z_n \to_n z$ e $v_n \to_n v$ allora $v \in \partial f(z)$. In particolare, per ogni $z \in C$, $\partial f(z)$ è un insieme chiuso.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '189']*

E15.b.11 `Argomenti:minimi. Prerequisiti:15.b.10.`Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Mostrate che $z \in C^\circ$ è un minimo se e solo se $0 \in \partial f(z)$. [18B]

E15.b.12 Prerequisiti:15.b.7,15.b.10.Note:*Un viceversa del 15.b.6.* [18C]

Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso aperto; sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa; esistono successioni $(a_h)_h \subseteq \mathbb{R}, (v_h)_h \in \mathbb{R}^n$ per $h \in \mathbb{N}$, tali che $f(x) = \sup_{h\in\mathbb{N}}(a_h + v_h \cdot x)$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '18D']*

§15.c Caso reale

Sia $I \subset \mathbb{R}$, allora I è convesso se e solo è un intervallo (si veda 10.f.1). Nel seguito considereremo $f : I \to \mathbb{R}$ dove $I = (a, b)$ è un intervallo aperto.

Esercizi

E15.c.1 Si mostri che $f(x)$ è convessa se e solo se la mappa $R(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ è monotona debolmente crescente in x. [†95] Inoltre f è strettamente convessa se e solo se R è strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '18G']* [18F]

E15.c.2 Si mostri che per una funzione convessa $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ vi sono solo tre possibilità: [18H]

- f è strettamente crescente
- f è strettamente decrescente
- vi sono due valori $l_- \leq l_+$ tale che f è strettamente crescente in $[l_+, b)$, f è strettamente decrescente in $(a, l_-]$, e l'intervallo $[l_-, l_+]$ sono tutti i punti di minimo di f;

se inoltre f è strettamente convessa allora vi è al più un solo punto di minimo.

E15.c.3 Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ convessa. Si mostri che per ogni intervallo chiuso $I \subset (a, b)$ esiste una costante C tale che $f|_I$ risulta Lipschitziana con costante C. Si mostri un esempio di funzione continua e convessa definita su un intervallo chiuso che non è Lipschitziana. [18J]

E15.c.4 Si mostri che una funzione continua $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è convessa se e soltanto se per ogni $u, v \in (a, b)$ si ha [18K]

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{f(u) + f(v)}{2} \quad .$$

§15.c.a Convessità e derivate

Esercizi

E15.c.5 Prerequisiti:15.c.1.Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ convessa. [18M]

1. Si mostri che in ogni punto esistono la derivata destra $d^+(x)$ e sinistra $d^-(x)$ (In particolare f è continua).
2. Si mostri che $d^-(x) \leq d^+(x)$,
3. mentre per $x < y$ si ha $d^+(x) \leq R(x, y) \leq d^-(y)$.
4. Si deduca che $d^+(x)$ e $d^-(x)$ sono monotone debolmente crescenti.

[†95] Si noti che $R(x, y)$ è simmetrica.

5. Si mostri che $d^+(x)$ è continua a destra, mentre $d^-(x)$ è continua a sinistra.
6. Inoltre si mostri che $\lim_{s\to x-} d^+(s) = d^-(x)$, mentre $\lim_{s\to x+} d^-(s) = d^+(x)$. In particolare d^+ è continua in x se e solo se d^- è continua in x se e solo se $d^-(x) = d^+(x)$.
   Dunque d^+, d^- sono, per così dire, la stessa funzione monotona, solo che nei punti di discontinuità d^+ assume il valore dei limiti destri mentre d^- il valore dei limiti sinistri.
7. Usate il precedente per mostrare che f è derivabile in x se e solo se d^+ è continua in x, se e solo se d^- è continua in x.
8. Si mostri dunque che f è derivabile salvo che in un numero al più numerabile di punti.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '18N']*

E15.c.6 Prerequisiti:15.c.1.Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora f è convessa se e solo se f' è debolmente crescente. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '18Q']* [18P]

E15.c.7 Prerequisiti:15.c.1,15.c.6.Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora f è strettamente convessa se e solo se f' è strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '18S']* [18R]

E15.c.8 Prerequisiti:15.c.1, 15.c.6.Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile due volte, allora f è convessa se e solo se $f'' \geq 0$ in ogni punto. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '18V']* [18T]

E15.c.9 Prerequisiti:15.c.8. [18W]

Sia $J \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto non vuoto, e $f : J \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e convessa. Si mostri che i seguenti fatti sono equivalenti:

1. f è strettamente convessa,
2. l'insieme $\{x \in J : f''(x) = 0\}$ ha parte interna vuota,
3. f' è monotona strettamente crescente.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '18X']*

Si veda anche l' esercizio 16.13 per il rapporto fra integrale e convessità.

§15.c.b Funzioni convesse a valori estesi

Consideriamo funzioni convesse che possono anche assumere valore $+\infty$. Sia I un intervallo.

Esercizi

E15.c.10 Sia $f : I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convessa, si mostri che $J = \{x \in I : f(x) < \infty\}$ è un intervallo. [18Y]

E15.c.11 Note:*un altro viceversa del 15.b.6.* [18Z]

Fissato $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e data $f : I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convessa e semicontinua inferiore, esistono successioni $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) = \sup_n(a_n + b_n x)$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '190']*

§15.d Ulteriori proprietà e esercizi

Esercizi

E15.d.1 Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso, $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e monotona debolmente crescente: si provi che $f \circ g$ è convessa. [191]

E15.d.2 Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ concava, tale che $f(0) = 0$ e f continua in zero. [192]

- Si provi che f è *subadditiva*, cioè

$$f(t) + f(s) \geq f(t + s)$$

per ogni $t, s \geq 0$. Se inoltre f è strettamente concava e $t > 0$ allora

$$f(t) + f(s) > f(t + s) \, .$$

- Si provi che se $\forall x, f(x) \geq 0$ allora f è debolmente crescente.
- Il viceversa? Trovate un esempio di $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ con $f(0) = 0$, continua, monotona crescente e subadditiva, ma non concava.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '193']*

E15.d.3 Si mostri la disuguaglianza di Young: dati $a, b > 0$, $p, q > 1$ tali che $1/p + 1/q = 1$ allora [194]

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{15.d.4}$$

con uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$; usando la concavità del logaritmo.

Si veda anche 24.16. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '195']*

E15.d.5 Sia $\alpha \in (0, 1)$, si mostri che x^α è α-Hölderiana (possibilmente usando i risultati precedenti). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '197']* [196]

Si veda anche l'esercizio 16.29.

§15.d.a Funzione distanza

Esercizi

E15.d.6 `Argomenti:funzione distanza, insiemi convessi. Prerequisiti:10.d.3,15.d.8.`Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso nonvuoto, sia d_A la *funzione distanza* definita nell' esercizio 10.d.3, cioè $d_A(x) = \inf_{y \in A} |x - y|$. Si mostri che A è un'insieme convesso se e solo se d_A è una funzione convessa. [198]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '199']*

E15.d.7 `Argomenti:funzione distanza, insiemi convessi. Prerequisiti:10.d.3,15.a.16.` [19B]

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso chiuso, si definisce la *funzione distanza* $d_A(x)$ come sopra in 10.d.3; sia $z \notin A$ e x^* la proiezione di z su A (cioè il punto di minima distanza nella definizione di $d_A(z)$); posto $v = (z - x^*)/|z - x^*|$ si mostri che $v \in \partial f(z)$; dove ∂f è il *sottodifferenziale* definito in 15.b.10.

§15.d.b Funzioni e insiemi strettamente convessi

Esercizi

E15.d.8 Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso, $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $r \in \mathbb{R}$: allora $\{x \in C, f(x) < r\}$ e $\{x \in C, f(x) \leq r\}$ sono insiemi convessi (eventualmente vuoti). [19C]

Nota 15.d.9. *È vero anche il viceversa: dato $A \subset \mathbb{R}^n$ un convesso chiuso, esiste sempre una funzione convessa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $A = \{x : f(x) \leq 0\}$: ad esempio si può usare $f = d_A$, come visto in15.d.7 nella sezione precedente.* [23N]

Ci si chiede ora, cosa accade se f è strettamente convessa?

Definizione 15.d.10. *Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso chiuso è detto **strettamente convesso** se, per ogni $x, y \in A$ con $x \neq y$ e ogni $t \in (0,1)$ si ha* [19D]

$$(tx + (1-t)y) \in A^\circ \quad .$$

(Notate che un insieme strettamente convesso necessariamente ha parte interna non vuota).

Nota 15.d.11. *Dagli esercizi 15.a.9 e 15.a.10 segue che se $x \in A^\circ$ o $y \in A^\circ$ allora $(tx + (1-t)y) \in A^\circ$: dunque la definizione è "interessante" quando $x, y \in \partial A$.* [19F]

Esercizi

E15.d.12 `Prerequisiti:15.b.9.`Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa e $r \in \mathbb{R}$ allora $A = \{x, f(x) \leq r\}$ è un insieme chiuso e strettamente convesso (eventualmente vuoto). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '19H']* [19G]

§16 Integrale di Riemann [19K]

La teoria necessaria per lo svolgimento dei successivi esercizi si può trovare nel Cap. 1 in [5] o Cap. 6 in [23].

Esercizi

E16.1 Sia p un polinomio (con coefficienti complessi); sia $\theta \in \mathbb{C}, \theta \neq 0$. Definiamo $f(x) = -\int_0^x e^{-\theta t} p(t)\,\mathrm{d}t$. Si mostri che $f(x) = e^{-\theta x} q(x) - q(0)$ dove q è un polinomio che ha lo stesso grado di p. Si determini la mappa lineare (cioè la matrice) che trasforma i coefficienti di p nei coefficienti di q; and its inverse. [19M]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '19N'][UNACCESSIBLE UUID '19P']*

E16.2 Note:*Simile al punto 8 dall'esercizio 18.8.*Supponiamo che $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ siano Riemann integrabili, e sia inoltre $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. [19Q]

Trovate un esempio in cui $f_n \to_n f$ puntualmente, f è limitata, ma f non è Riemann integrabile.

Mostrate che, se la convergenza è uniforme, allora f è Riemann integrabile e

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}x = \int_a^b f \,\mathrm{d}x \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '19R']*

E16.3 Prerequisiti:16.2, 18.4. [19S]

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo con estremi a, b; siano $f, f_n : I \to \mathbb{R}$ continue non negative tali che $f_n(x) \nearrow_n f$ puntualmente (cioè per ogni x e n si ha $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ e $\lim_n f_n(x) = f(x)$); si mostri allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

(Nota se l'intervallo è aperto o semiaperto o illimitato allora gli integrali di Riemann si intendono in senso generalizzato; in questo caso il membro destro può anche valere $+\infty$). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '19T']*

Il precedente risultato prende il nome di *Teorema di Convergenza Monotona* e vale in ipotesi molto generali; nel caso di integrali di Riemann si può però vedere come conseguenza dei risultati 16.2 e 18.4.

E16.4 Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mostrate che $g \circ f$ è Riemann integrabile. [19V]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '19W']*

E16.5 Dire quali di queste funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sono Riemann integrabili: [19Y]

1. la funzione caratteristica dell'insieme di Cantor.
2. $f(0) = 0$, $f(x) = \sin(1/x)$
3. $f(0) = 0$ e
$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2 + |\sin(1/x)|}$$

4. $f(x) = 0$ se x è irrazionale, $f(x) = \cos(1/m)$ se $x = n/m$ con n, m primi fra loro.
5. $f(x) = 0$ se x è irrazionale, $f(x) = \sin(1/m)$ se $x = n/m$ con n, m primi fra loro.

E16.6 `Prerequisiti:teorema fondamentale del calcolo integrale.` [1B0]

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, mostrate che

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\, \mathrm{d}s \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1B2']* Notate che per questo risultato non è necessario ipotizzare che g sia monotona.

E16.7 `Prerequisiti:funzioni regolate Sez. §13.b.` [1B3]

Si mostri che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ regolata è Riemann integrabile.

E16.8 `Prerequisiti:funzioni regolate Sez. §13.b.` [1B4]

Si trovi una funzione Riemann integrabile $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che non è regolata.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1B5']*

E16.9 `Difficoltà:*.` Vi può essere una funzione Riemann integrabile $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che non è regolata (cioè, non ammette limiti destri e sinistri) in nessun punto? *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1B7']* [1B6]

E16.10 Se $f, g : [A, B] \to \mathbb{R}$ sono Riemann integrabili, allora $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ è Riemann integrabile. [1B8]

E16.11 Si trovi una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiore, limitata, ma non Riemann integrabile. [1B9]

E16.12 Definiamo la funzione Beta come [1BC]

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1}\, dt \; .$$

1. Mostrate che l'integrale esiste (finito) se e solo se $x, y > 0$.
2. Notate che $B(x, y) = B(y, x)$
3. Mettete in relazione $B(n, m)$ con $B(n-1, m+1)$. Calcolate dunque il valore di $B(n, m)$ per n, m naturali positivi.
4. Usate il risultato ottenuto per calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t)^9 \cos(t)^7\, dt \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1BD']*

E16.13 `Prerequisiti:funzioni convesse.` Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, e $x_0 \in I$. Si dimostri che questi due fatti sono equivalenti: [1BF]

1. $F : I \to \mathbb{R}$ è convessa.
2. Esiste $f : I \to \mathbb{R}$ monotona (debolmente) crescente, e tale che $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s$,

e si verifichi che si può scegliere f essere la derivata destra (o sinistra) di F.

E16.14 Si esibisca una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabile tale che la derivata della funzione $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ non è f. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1BH']* [1BG]

E16.15 Si calcolino esplicitamente [†96] formule primitive per [1BJ]

$$\frac{1}{\sin(x)^2}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ \frac{1}{2+\sin(x)}\quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1BK']*

E16.16 Definiamo la funzione Gamma $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ come [1BM]

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\ .$$

- Mostrate che $\Gamma(x)$ è ben definita per $x > 0$ reale.
- Mostrate che $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e deducete che $\Gamma(n+1) = n!$ per $n \in \mathbb{N}$.
- Mostrate che $\Gamma(x)$ è analitica.
  (Potete dare per buono che le derivate di Γ sono $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\log t)^n t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$; si ottengono per derivazione sotto segno di integrale.)

E16.17 Calcolate [1BN]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}$$

vedendolo come una somma approssimante di un integrale di Riemann.

E16.18 `Prerequisiti:17.c.3.` Sia $a \in \mathbb{R}$, sia I intervallo aperto con $a \in I$, sia $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ continua. [1BP]

Definiamo ricorsivamente $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ per $n \geq 1$ tramite $\varphi_n(x) = \int_a^x \varphi_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$; si mostri che

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n \varphi_0(t)\,\mathrm{d}t \qquad (16.19)$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1BQ']*

E16.20 `Prerequisiti:16.18.Note:`*See also Apostol [4].* [1BR]

Sia $a \in \mathbb{R}$, sia I intervallo aperto con $a \in I$; supponendo che $f : I \to \mathbb{R}$ sia di classe C^{n+1}, mostrate la **formula di Taylor con resto integrale**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1BS']*

E16.21 Prerequisiti:15.c.1, 16.13.Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $g : I \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato e contenuto in I. Presi $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, sia [1BT]

$$R(x,y) = \frac{1}{y-x}\int_x^y g(s)\,\mathrm{d}s$$

(con la usuale convenzione che $\int_x^y g(s)\,\mathrm{d}s = -\int_y^x g(s)\,\mathrm{d}s$, in modo che $R(x,y) = R(y,x)$). Se g è monotona, si mostri che $R(x,y)$ è monotona in ciascuna variabile. Se g è continua e $R(x,y)$ è monotona in ciascuna variabile, si mostri che g è monotona.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1BV']*

E16.22 Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che [1BW]

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

per ogni $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua: mostrate allora che $f \equiv 0$.

E16.23 Torniamo all'esercizio 7.c.33: eseguendo formalmente il prodotto di Cauchy della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ con se stessa, si ottiene la serie $\sum_n (-1)^n c_n$ con $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$; mostrate che $c_n \to \pi$. [1BX]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1BY']*

E16.24 Difficoltà:*.Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata, mostrate che [1BZ]

$$\lim_{y\to 0+} \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = f(0)$$

(Sugg. si cominci dal caso f costante.)

E16.25 Siano $n, m \geq 1$ interi, e definiamo [1C0]

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^n (\log x)^m\,\mathrm{d}x \quad :$$

ponete in relazione $I_{n,m}$ con $I_{n,m-1}$; usate la relazione per calcolare esplicitamente

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1C1']*

E16.26 Prerequisiti:16.25.Difficoltà:**.Mostrate le identità [1C2]

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \qquad (=\sim 1.291285997\ldots) \tag{16.27}$$

$$\int_0^1 x^{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-n} \qquad (=\sim 0.783430510712\ldots) \tag{16.28}$$

(Sugg.: usate lo sviluppo in serie di potenze di e^z e ponete $z = x\log(x)$; usate l'esercizio 16.25 precedente.)

E16.29 `Difficoltà:*`.Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa: mostrate che [1C3]

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \le \int_0^1 \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x \quad . \tag{16.30}$$

Questo risultato è noto come **diseguaglianza di Jensen**.

E16.31 `Difficoltà:*`.Supponiamo che $f : (0,1) \to (0,\infty)$ sia continua e decrescente e $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ allora $\lim_{r\to 0} r f(r) = 0$. [1C4]

Altri esercizi riguardo all'integrazione secondo Riemann si trovano in 14.a.8, 17.c.2, 18.8 (parte 8).

†96 Tratto dal libro di Giaquinta e Modica [9], pag. 162 e seguenti.

§17 Funzioni derivabili [1C5]

Definizione 17.1. *Sia nel seguito $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto.* [2D0]

Dicendo che $f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile *intenderemo* derivabile in ogni punto.

Ricordiamo che, dato $k \geq 1$ intero, f ***è di classe*** *C^k se f è derivabile k-volte e la derivata $f^{(k)}$ è continua; e $f \in C^\infty$ se f è derivabile infinite volte. (Alle volte scriveremo $f \in C^k$ per indicare che f è di classe C^k).*

Per poter risolvere i seguenti esercizi potrebbe essere necessario conoscere alcuni risultati fondamentali in Analisi e Calcolo Differenziale, che si possono per esempio trovare in [23, 5]; specificatamente:

- il teorema di Lagrange [†97] : Teorema 5.10 in [23], o [65].
- la regola di De l'Hôpital, e i suoi corollari: Teorema 5.13 in [23], Sez. 7.12 in [5] o [25, 64];
- il Teorema di Taylor, e le diverse forme dei resti: Teorema 5.15 in [23], Cap. 7 in [5] o [66].

Esercizi

E17.2 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile, e $x, y \in I$ con $x < y$. Mostrare che se $f'(x) \cdot f'(y) < 0$ allora esiste $\xi \in I$ con $x < \xi < y$ tale che $f'(\xi) = 0$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1C7']* [1C6]

E17.3 `Prerequisiti:`17.2`.Note:`*Proprietà di Darboux*. [1C8]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile; vogliamo mostrare che per ogni intervallo $I \subset A$ l'immagine $f'(I)$ è un intervallo.

Mostrate dunque questo risultato. Per ogni $x, y \in I$ con $x < y$, poniamo $a = f'(x), b = f'(y)$; assumiamo per semplicità che $a < b$; sia poi c con $a < c < b$: allora esiste $\xi \in I$ con $x < \xi < y$ tale che $f'(\xi) = c$.

(Mostrate infine che questa proprietà effettivamente implica che l'immagine $f'(I)$ di un intervallo I è un intervallo).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1C9']*

E17.4 `Prerequisiti:`17.3`.` [1CB]

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$: mostrate allora che $f'(t)$ ha sempre lo stesso segno.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1CC']*

E17.5 `Prerequisiti:`17.3`.Difficoltà:*.` [1CD]

Si trovi una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata che mappa intervalli in intervalli, ma per cui non esiste $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto e con $f = g'$.

(Notate che f non può essere continua, per via del Teorema Fondamentale del Calcolo).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1CF']*

E17.6 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile , con $f' = f$: si mostri in maniera elementare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = \lambda e^x$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1CH']* [1CG]

E17.7 Si trovi una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile la cui derivata sia limitata ma non sia continua. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1CK']* [1CJ]

E17.8 Si trovi una $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile [†98] la cui derivata sia illimitata. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1CN']* [1CM]

E17.9 `Difficoltà:*`.Si trovi una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che l'immagine di $[0, 1]$ secondo f' è $f'([0, 1]) = (-1, 1)$. [1CP]

Prima di cercare l'esempio, fate questa riflessione. Ricordiamo la proprietà di Darboux 17.3: l'immagine di un intervallo I secondo f' è un intervallo $f'(I)$; questa non dice però che l'immagine di $f'([0, 1])$ debba essere un intervallo chiuso e limitato. Se però si sapesse inoltre che f' è continua, cosa potreste dire di $f'([0, 1])$? Cosa ne deducete a priori dunque sull'esempio cercato?

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1CQ']*

E17.10 Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile: mostrare che f' è continua se e solo se per ogni x [1CV]

$$f'(x) = \lim_{(s,t)\to(x,x), s\neq t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \ .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1CW']*

E17.11 Sia f derivabile in (a, b) sia $x_0 \in (a, b)$ e $x_0 < \alpha_n < \beta_n, \beta_n \to x_0$ per $n \to \infty$. Si mostri che se la successione $\frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}$ è limitata allora [1CX]

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \to_n f'(x_0)$$

Si mostri con un esempio che tale conclusione è falsa se la condizione data non è verificata.

E17.12 Si supponga che una data funzione $f : (a, b) \to R$ sia derivabile in ogni punto di (a, b) tranne che in x_0, e che esista finito il limite $\lim_{t\to x_0} f(t)$. Si mostri che f è derivabile anche in x_0 e che $f(x_0) = \lim_{t\to x_0} f(t)$. [1CZ]

E17.13 `Prerequisiti:10.g.8`.Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in ogni punto. Si mostri che $\max\{f, g\}$ è derivabile salvo su un insieme al più numerabile. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1D2'][UNACCESSIBLE UUID '1D3']* [1D1]

E17.14 Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che se $f(t) = 0$ allora $f'(t) = 0$. Mostrare che la funzione $g(t) = |f(t)|$ è derivabile. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1D6']* [1D4]

E17.15 Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ un polinomio con tutte radici reali e coefficienti tutti non nulli. Si mostri che il numero di radici positive (contate [1D7]

[†97] Anche noto come *Teorema del valor medio* o *Teorema dell'incremento finito*.

[†98] Si intende: la derivata $f'(x)$ esiste ed è finita per ogni $x \in [-1, 1]$; agli estremi $x = -1, 1$ si calcolano solo le derivate destra e rispettivamente sinistra.

con molteplicità) è uguale al numero di cambiamenti di segno nella successione dei coefficienti di p. *[Sugg. si ragioni per induzione su n, utilizzando il fatto che tra due radici consecutive di p esiste una radice di p' .]* Questo risultato è noto come *Criterio di Cartesio*.

E17.16 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile, e $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Mostrare che se $f'(a) = f'(b)$ allora esiste ξ con $a < \xi < b$ tale che [1D9]

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} \quad .$$

§17.a Derivate successive [2D1]

Esercizi

E17.a.1 Sia I un intervallo aperto e $x_0 \in I$, sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I e tale che esista la derivata seconda f'' in x_0: allora si mostri che esiste il limite [1DD]

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)}{t^2}$$

e che coincide con $f''(x_0)$.

Si trovi poi un semplice esempio di f derivabile in $(-1, 1)$ e tale che non esista la derivata seconda f'' in $x_0 = 0$, ma esista il precedente limite.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1DF']*

E17.a.2 5 Sia $n \geq 1$ intero. Sia I un intervallo aperto e $x_o 0 I$, siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili $n-1$ volte nell'intervallo e la cui derivata $(n-1)$-esima è derivabile in x_0. [1DG]

Si mostri allora che il prodotto fg è derivabile $n - 1$ volte nell'intervallo e la sua derivata $(n - 1)$-esima è derivabile in x_0. Si scriva una formula esplicita per la derivata n-esima $(fg)^{(n)}$ in x_0 del prodotto delle due funzioni, (formula che impieghi le derivate della sola f e della sola g).

(Se non la trovate, guardate in Wikipedia la Regola di Leibniz [63]) .

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1DH']*

E17.a.3 Difficoltà:*.Sia $n \geq 1$ intero. Siano I, J intervalli aperti con $x_0 \in I, y_0 \in J$. Siano poi date $g : I \to \mathbb{R}$ e $f : J \to \mathbb{R}$ tali che $g(I) \subseteq J$, f, g sono derivabili $n - 1$ volte nei rispettivi intervalli, la loro derivata $(n - 1)$-esima è derivabile in x_0 (risp. y_0) e infine $g(x_0) = y_0$. [1DJ]

Si mostri che la funzione composta $f \circ g$ è è derivabile $n-1$ volte nell'intervallo e la sua derivata $(n - 1)$-esima è derivabile in x_0.

Si scriva una formula esplicita per la derivata n-esima$(f \circ g)^{(n)}$ in x_0 della composizione delle due funzioni, (formula che impieghi le derivate della sola f e della sola g).

(Se non la trovate, leggete la pagina wikipedia (in Inglese) [56]; oppure, vedete questa presentazione: https://drive.google.com/drive/folders/1746bdJ89ZywciaEqvIMlGZ7kKHWVekhb).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1DK']*

E17.a.4 `Prerequisiti:`17.a.3,3.1.1.Si mostri che la funzione [1DM]

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases} \tag{17.a.5}$$

è di classe C^∞, e per $x > 0$ si ha

$$\varphi^{(n)}(x) = e^{-1/x} \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} \frac{n!}{m!} \frac{(-1)^{m+n}}{x^{m+n}} \quad ,$$

$$\binom{n-1}{m-1} = \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} \quad .$$

mentre $\varphi^{(n)}(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}, x \le 0$.

Procedete similmente per

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{17.a.6}$$

anche in questo caso $\psi \in C^\infty$ e $\psi^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; ma in questo caso $\psi(x) = 0 \iff x = 0$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1DN'][UNACCESSIBLE UUID '1DP'] [UNACCESSIBLE UUID '1DQ']*

E17.a.7 Sia dato N intero positivo. Si trovi un esempio di funzione C^∞ con $\varphi(x) = 0$ per $x < 0$ mentre $\varphi^{(n)}(x) > 0$ per $0 \le n \le N$ e $x > 0$. [1DR]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1DS']* Notiamo però che non si può richiedere che tutte le derivate siano positive, a causa dell'esercizio 20.2.

E17.a.8 Cosa si può mettere al posto di ”???” in modo che la funzione [1DT]

$$g(x) = \begin{cases} ??? & \text{se } 0 < x < 1\,, \\ 1 & \text{se } x \ge 1\,, \\ 0 & \text{se } x \le 0\,. \end{cases}$$

sia di classe C^∞?

Più in generale, come si possono raccordare due funzioni C^∞ in modo da ottenere una funzione C^∞? Date $f_0, f_1 \in C^\infty$ mostrate [†99] che esiste una funzione $f \in C^\infty$ che soddisfa

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0(x) \quad \text{se } x \le 0 \quad , \\ f(x) &= f_1(x) \quad \text{se } x \ge 1 \quad . \end{aligned}$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1DV']*

E17.a.9 `Difficoltà:*`.Siano $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0, f_1 \in C^\infty$ con $f_0', f_1' > 0$ e $f_1(1) > f_0(0)$: allora si può interpolare con una funzione $f \in C^\infty$ che soddisfi [1DW]

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0(x) \text{ se } x \le 0 \\ f(x) &= f_1(x) \text{ se } x \ge 1 \end{aligned}$$

[†99] Possibilmente con una semplice costruzione basata sull'esempio 17.a.4.

in modo che l'interpolante abbia $f' > 0$.

Cosa succede se $f_1(1) = f_0(0)$?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DX']

E17.a.10 Prerequisiti:17.a.4. Si trovi un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C^\infty$ e tale, che posto $A = \{x : f(x) = 0\}$ il luogo di zeri, si abbia che 0 è l'unico punto di accumulazione di A, cioè $D(A) = \{0\}$. Si confronti questo esempio con la Prop. 6.8.4 negli appunti [3]; e con l'esempio 20.7. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1F0'] [1DZ]

E17.a.11 Difficoltà:*.Note:*Lemma di Hadamard.* [1F1]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ e tale che $f(0) = 0$. Sia, per $x \neq 0$, $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)/x$. Si mostri che g si prolunga, assegnando un opportuno valore a $g(0)$, e che la funzione prolungata è C^∞. Che rapporto c'è fra $g^{(n)}(0)$ e $f^{(n+1)}(0)$?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1F2']

E17.a.12 Prerequisiti:17.a.11.Difficoltà:*.Sia $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una funzione di classe C^∞ tale che $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \neq 0$, e $f''(0) \neq 0$: si mostri che [1F4]

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{f(x)} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è di classe C^∞. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1F5']

E17.a.13 Difficoltà:* . Dati $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ e dati numeri reali $a_{i,h}$ (con $i, h = 0, \ldots n$) si mostri che esiste un polinomio $p(x)$ tale che $p^{(i)}(x_h) = a_{i,h}$. [1F7]

Questa consideriazione è alla base della teoria dell'interpolazione secondo Hermite, si veda [57].

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1F8']

E17.a.14 Prerequisiti:funzioni convesse.Note:*Esercizio 1 del compito Marzo 2010.* [1F9]

Consideriamo le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, tali che per ogni fissato $n \geq 0$, $f^{(n)}(x)$ abbia segno costante (e cioè non si annulli mai) †100. Associamo a ogni tale funzione la sequenza dei segni che vengono assunti da f, f', f'' ....

Quali sono le possibili sequenze di segni, e quali invece sono le sequenze impossibili?

(Per es. presa $f(x) = e^x$, a questa si associa la sequenza $+ + + + + \ldots$, che è dunque una sequenza possibile.)

Si veda anche l'esercizio 20.2.

Si vedano anche gli esercizi 15.c.8 e 15.c.9 sul rapporto fra convessità e proprietà delle derivate.

§17.b Sviluppo di Taylor [2D2]

Definizione 17.b.1 (Simboli di Landau)**.** *Sia $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e I un intorno di a. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$. Diremo che "$f(x) = o(g(x))$ per x tendente ad a" se* †101 [1FB]

†100 Si intende che $f^{(0)} = f$.

†101 Considerate che $J = \{x \in I : |x - a| < \delta\}$ è un intorno di a.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, x \in I \wedge\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \le \varepsilon |g(x)| \quad .$$

Questa notazione si legge come “f è o piccolo di g”.

Se $g(x) \neq 0$ *per* $x \neq a$*, allora equivalentemente si può scrivere*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad .$$

Diremo che “$f(x) = O(g(x))$ per x tendente ad a” *se se esistono una costante* $c > 0$ *e un intorno* J *di* a *per cui* $\forall x \in J, |f(x)| \le c|g(x)|$.

Di nuovo, se $g(x) \neq 0$ *per* $x \neq a$*, allora equivalentemente si può scrivere*

$$\limsup_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty \quad ,$$

Questa notazione si legge come “f è O grande di g”.

Per maggiori informazioni, e altre notazioni, si veda [52].

Questa notazione è usualmente accreditata a Landau.

Nel seguito per semplicità consideriamo solo il caso in cui $\lim_{x\to a} g(x) = 0$; inoltre negli sviluppo di Taylor si ha sempre che $g(x) = (x-a)^n$ con $n \ge 1$ intero. [†102]

Nota 17.b.2. *Attenzione! I simboli “o piccolo” e “O grande” sono usati in modo diverso da altri simboli della Matematica. Infatti essi possono rappresentare funzioni diverse, anche nello stesso contesto! Ad esempio se scriviamo* [1FC]

$$\sin(x) = x + o(x) \quad , \quad \cos(x) = 1 + o(x)$$

i due simboli “$o(x)$” a destra e a sinistra rappresentano funzioni diverse. Particolare cura dunque va messa nel mostrare le proprietà usate nel calcolo. Quando sono presenti molti tali simboli, è preferibile sostituirli con altri simboli di funzioni, come si vede negli esempi successivi.

Vediamo due esempi. Sia $a = 0$ per semplicità.

Esempio 17.b.3. *Enunciamo in maniera informale questa proprietà.* [1FD]

$$\text{Se } n \ge m \ge 1 \text{ allora } o(x^n) + o(x^m) = o(x^m).$$

Per dimostrarla la convertiamo in un enunciato preciso. Innanzitutto la riscriviamo così.

$$\text{Se } f(x) = o(x^n) \text{ e } g(x) = o(x^m) \text{ allora } f(x) + g(x) = o(x^m).$$

Dunque la dimostriamo. Come ipotesi abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} f(x)x^{-n} = 0 \textit{ e } \lim_{x\to 0} g(x)x^{-m} = 0$$

allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x^m} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^m} + \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^m} = \lim_{x\to 0} x^{n-m}\frac{f(x)}{x^n} + 0 = 0.$$

Esempio 17.b.4. *Enunciamo in maniera informale questa seconda proprietà* [1FF]

$$\text{Se } n \geq 1 \text{ allora } o\Big(x^n + o(x^n)\Big) = o(x^n).$$

La riscriviamo così.

$$\text{Se } f(x) = o(x^n) \text{ e } g(x) = o(x^n + f(x)) \text{ allora } g(x) = o(x^n).$$

Notiamo che, per $x \neq 0$ piccolo, $x^n + f(x)$ è non nullo, in quanto esiste un intorno in cui $|f(x)| \leq |x^n/2|$. Come ipotesi abbiamo che $\lim_{x\to 0} f(x)x^{-n} = 0$ e $\lim_{x\to 0} g(x)/(x^n + f(x)) = 0$ allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n + f(x)} \frac{x^n + f(x)}{x^n}$$

ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n + f(x)} = 0$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n + f(x)}{x^n} = 1 \quad .$$

Esercizi

E17.b.5 Sia $a = 0$ per semplicità. Riscrivete le successive relazioni e dimostratele. [1FG]

- Se $n \geq m \geq 1$ allora

  $$O(x^n)+O(x^m) = O(x^m), \quad o(x^n)+O(x^m) = O(x^m), \quad x^n+O(x^m) = O(x^m) \quad .$$

- Se $n > m \geq 1$ allora

  $$O(x^n) + o(x^m) = o(x^m), \quad x^n + o(x^m) = o(x^m).$$

- Per $n, m \geq 1$

  $$\begin{aligned} x^n O(x^m) &= O(x^{n+m}) \\ x^n o(x^m) &= o(x^{n+m}) \\ O(x^n)O(x^m) &= O(x^{n+m}) \\ o(x^n)O(x^m) &= o(x^{n+m}) \end{aligned}$$

- $$\int_0^y O(x^n)\,\mathrm{d}x = O(y^{n+1}) \quad \int_0^y o(x^n)\,\mathrm{d}x = o(y^{n+1}) \quad .$$

E17.b.6 Si scriva il polinomio di Taylor di $f(x)$ intorno a $x_0 = 0$, sfruttando "*il calcolo di Landau degli $o(x^n)$*" visto sopra. [1FJ]

†102 Alcuni tesi usano anche la notazione $o(1)$ per indicare una quantità infinitesima per $x \to a$, ma questo può generare confusione .

$f(x)$	$=$	$p(x) + o(x^4)$	
$(\cos(x))^2$	$=$		$+o(x^4)$
$(\cos(x))^3$	$=$		$+o(x^4)$
$\cos(x)e^x$	$=$		$+o(x^4)$
$\cos(\sin(x))$	$=$		$+o(x^4)$
$\sin(\cos(x))$	$=$		$+o(x^4)$
$\log(\log(e + x))$	$=$		$+o(x^3)$
$(1 + x)^{1/x}$	$=$		$+o(x^3)$

(Per sviluppare gli ultimi due sarà necessaria un po' di fantasia; per ridurre i conti, si sviluppino gli ultimi due solo fino a $o(x^3)$).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1FK']*

E17.b.7 Si trovi un' approssimazione razionale di $\cos(1)$ con errore minore di $1/(10!) \sim 2.10^{-7}$ *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1FN']* [1FM]

E17.b.8 Si scriva lo sviluppo di Taylor di $(1 + x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. *(Se ne deduca una generalizzazione del simbolo binomiale $\binom{\alpha}{k}$).* La serie di Taylor costruita con questi coefficienti è a volte detta *serie binomiale*, e converge per $|x| < 1$. [1FP]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1FQ']*

E17.b.9 `Prerequisiti:`16.20`.Note:`*Da un idea nel libro di Apostol [4], Capitolo 7.3.*Scrivere lo sviluppo di Taylor (intorno a $x_0 = 0$) per $-\log(1 - x)$ integrando [1FR]

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{(1-x)} \tag{17.b.10}$$

e confrontare il "resto"

$$\int_0^x \frac{t^n}{(1-t)} \, \mathrm{d}t \tag{17.b.11}$$

così ottenuto con il "resto integrale" di $f(x) = -\log(1 - x)$ (come presentato in esercizio 16.20).

Procedere similmente per $\arctan(x)$ integrando

$$1/(1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} - (-1)^n x^{2n+2}/(1 + x^2) \quad . \tag{17.b.12}$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1FS']*

E17.b.13 `Prerequisiti:`16.20,17.b.9`.Difficoltà:.`Valutare per quali $r > 0$ si ha che il resto di Taylor di $f(x) = -\log(1 - x)$ è infinitesimo in n, uniformemente per $|x| < r$; questo, usando il resto visto in (17.b.11), usando il resto integrale oppure usando il resto di Lagrange. [1FT]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1FV']*

Si veda anche l'esercizio 16.20.

§17.c Derivate parziali e totali, differenziali [2D3]

Esercizi

E17.c.1 Verificate che le seguenti derivate parziali esistono e calcolatele: [1FX]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(4xy+3x^2y-zy^2\right)\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(4xy+3x^2y-zy^2\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{ze^{x+|y|}}{1+x^2|y|}\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{ze^{x+|y|}}{1+x^2|y|}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FY']

E17.c.2 Prerequisiti:integrale di Riemann,16.2.Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto con $0 \in I$. [1FZ] Data $f = f(x,y) : I \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e tale che anche $\frac{\partial}{\partial x} f$ esiste ed è continua, posto

$$g(x) = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad ,$$

mostrate che g è di classe C^1, e che

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\ .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1G0'][UNACCESSIBLE UUID '1G1']

E17.c.3 Prerequisiti:integrale di Riemann, 14.a.9, 14.a.8, 17.c.2.Sia [1G2]

$$h(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,z)\,\mathrm{d}z$$

dove a, b, f sono funzioni di classe C^1: mostrate che h è di classe C^1 e calcolate la derivata.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1G3']

E17.c.4 Le seguenti funzioni sono differenziabili in $(0,0)$? [1G4]

$$f_1(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } x>0 \\ x+ye^{-x^2} & \text{se } x\le 0 \end{cases}, \qquad f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$f_3(x,y) = (\arctan(y+1))^{x+1}, \qquad f_4(x,y) = \max\{x^2,y^2\}\ .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1G5']

E17.c.5 Prerequisiti:3.1.1.Sia $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Ricordiamo che, per il Teorema di Schwarz, invertendo le operazioni di derivazione parziale di f, il risultato non cambia. Sia $N(n,k)$ il numero di derivate parziali (potenzialmente diverse) di ordine n: mostrate che $N(n,k) = \binom{n+k-1}{k-1}$ (che è un polinomio a coefficienti interi nella variabile n, di ordine $k-1$). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1G7'] [1G6]

E17.c.6 Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, sia $\overline{x} \in W$. Sia poi $\psi : W \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Sia $\nabla\psi(\overline{x})$ il vettore riga di coordinate $\frac{\partial}{\partial x_k}\psi(\overline{x})$ (che è il gradiente di ψ, caso particolare della “matrice Jacobiana”); lo abbreviamo a $D = \nabla\psi(\overline{x})$ per semplicità; sia H la matrice Hessiana di componenti $H_{h,k} = \frac{\partial^2}{\partial x_k x_h}\psi(\overline{x})$; si mostri la validità della formula di Taylor al secondo ordine [1G8]

$$\psi(\overline{x} + v) = \psi(\overline{x}) + Dv + \frac{1}{2}v^t Hv + o(|v|^2)$$

(notate che il prodotto Dv è una matrice 1×1 che identifichiamo con un numero reale, e similmente per $v^t Hv$).

E17.c.7 Prerequisiti:17.c.6.Siano $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti non vuoti, e sia $G : V \to W$ di classe C^2. Sia $\overline{y} \in V$ e $\overline{x} = G(\overline{y}) \in W$. Sia poi $\psi : W \to \mathbb{R}$ di classe C^2; posto $\tilde{\psi} = \psi \circ G$, confrontare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di ψ e di $\tilde{\psi}$ (centrati rispettivamente in $\overline{x}$ e $\overline{y}$). Supponendo inoltre che G sia un diffeomorfismo, verificare che [1GB]

- $\overline{x}$ è un punto stazionario per ψ se e solo se $\overline{y}$ è punto stazionario anche per $\tilde{\psi}$,
- e in questo caso gli Hessiani di ψ e di $\tilde{\psi}$ sono simili (cioè le matrici sono uguali a meno di cambio di coordinate).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1GC']*

§17.d Teorema di funzione implicita [2D4]

Useremo il Teorema di Funzione Implicita, nella versione a più variabili (Teorema 7.7.4 in [3]). Lo riportiamo qui per comodità, con alcune piccole modifiche nelle notazioni.

Teorema 17.d.1 (Teorema delle funzioni implicite in $\mathbb{R}^n$). *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, con A aperto, e sia $\overline{x} = (\overline{x}', \overline{x}_n) \in A$ tale che $\partial_{x_n} f$ esiste in un intorno di $\overline{x}$, è continua in $\overline{x}$ e $\partial_{x_n} f(\overline{x}) \neq 0$. Poniamo $\overline{a} = f(\overline{x})$.* [1GD]

Esiste allora un intorno “cilindrico” U di $\overline{x}$

$$U = U' \times J$$

dove

$$U' = B(\overline{x}', \alpha)$$

è la palla aperta in $\mathbb{R}^{n-1}$ centrata in $\overline{x}'$ di raggio $\alpha > 0$, e

$$J = (\overline{x}_n - \beta, \overline{x}_n + \beta)$$

con $\beta > 0$. Per questo intorno si ha che $U \cap f^{-1}(\{\overline{a}\})$ coincide con il grafico $x_n = g(x')$, con $g : U' \to J$ continua.

Questo significa che, per ogni $x = (x', x_n) \in U$, si ha $f(x) = \overline{a}$ se e solo se $x_n = g(x')$.

Inoltre, se f è di classe C^k su A per qualche $k \in \mathbb{N}^*$, allora g è di classe C^k su U' e vale

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x') = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x', g(x'))}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x', g(x'))} \qquad \forall x' \in U', \forall i, 1 \leq i \leq n-1 \quad . \tag{17.d.2}$$

Esercizi

E17.d.3 Consideriamo la seguente funzione di 2 variabili di classe C^∞ [1GF]

$$f(x, y) = x^3 + y^4 - 1 \quad .$$

Verificate che $\{f = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ non sia vuoto; indi, per ogni punto del piano dove questa si annulla discutete se si può applicare il teorema di funzione implicita, e dunque se l'insieme $\{f = 0\}$ è localmente grafico di funzione C^∞. Studiate inoltre l'insieme $\{f = 0\}$: è compatto? Quante componenti connesse vi sono?

(Tenere presente quanto mostrato in 17.d.13).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1GG']*

E17.d.4 Ripetete lo studio dell'esercizio 17.d.3 precedente per la funzione [1GJ]

$$f(x, y) = \sin(x + y) + x^2 \quad .$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1GK'][UNACCESSIBLE UUID '1GN']*

E17.d.5 Note:*Esercizio 2, Compito scritto del 30 Giugno 2017.*Ripetete lo studio dell'esercizio precedente per la funzione [1GP]

$$f(x, y) = 1 + 4x + e^x y + y^4 \quad .$$

Mostrare che il luogo di zeri non è compatto.

E17.d.6 Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ differenziabili, e tali che in $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$ si ha che $\nabla f(p_0), \nabla g(p_0)$ sono linearmente indipendenti e che $f(p_0) = g(p_0) = 0$: mostrare che l'insieme $E = \{f = 0, g = 0\}$ è una curva in un intorno di p_0. [1GQ]

(Sugg. considerate che il prodotto vettore $w = \nabla f(p_0) \times \nabla g(p_0)$ è nonnullo se e solo se i vettori sono linearmente indipendenti — infatti è formato dai determinanti dei minori della matrice Jacobiana; assumendo senza perdita di generalità che $w_3 \neq 0$, mostrate che E è localmente il grafico di una funzione $(x, y) = \gamma(z)$.)

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1GR']*

E17.d.7 Note:*Compito scritto 4 Luglio 2018.*La figura 5 mostra l'insieme $E = \{(x, y) : ye^x + xe^y = 1\}$. [1GS]

Si dimostrino rigorosamente le seguenti proprietà:

(i) in ogni punto $(x_0, y_0) \in E$ sono soddisfatte le ipotesi del Teorema della funzione implicita;

(ii) $E \cap \{(x, y) : x > 0\}$ coincide con il grafico, nella forma $y = f(x)$, di un'unica funzione f definita su $(0, +\infty)$;

(iii) E è connesso;

(iv) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(v) Mostrate (almeno intuitivamente) che esiste $x_0 > 0$ con la proprietà che f è decrescente per $0 < x < x_0$, crescente per $x > x_0$.

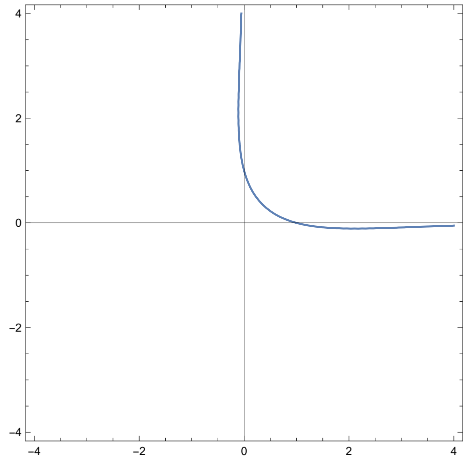


Figura 5: Figura per esercizio 17.d.7.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GV']

E17.d.8 Sia E l'insieme di rette orizzontali [1GW]

$$E = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, 1/n) : x \in \mathbb{R}\} \quad .$$

Trovate una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$ di classe C^1 tale che $E = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$.

Dimostrate che necessariamente $\partial_y f(0,0) = 0$.

Sia ora $(\overline{x}, \overline{y}) = (0,0)$. Notate che esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(0) = 0$ e $f(x, g(x)) = 0$! Difatti la funzione $g \equiv 0$ è l'unica funzione con tali caratteristiche. Dunque una parte della tesi nel teorema di funzione implicita è soddisfatta.

Spiegate dunque precisamente perché la tesi del teorema di funzione implicita non è soddisfatta.

§17.d.a Estensioni

Vediamo ora alcune varianti del teorema "standard".

Esercizi

E17.d.9 `Prerequisiti:14.c.1.` [1GX]

Lavoriamo nelle ipotesi del teorema 17.d.1. Mostrate che se $f(\cdot, y)$ è Lipschitziana di costante L per ogni fissato y cioè

$$|f(x_1', y) - f(x_2', y)| \le L|x_1' - x_2'| \ \ \forall x_1', x_2 \in U', y \in J$$

(e $L > 0$ non dipende da x_1', x_2', y) allora g è Lipschitziana di costante L'. Che rapporto vi è fra le costanti L e L'?

Similmente se f è Hölderiana.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GY']

E17.d.10 Nelle stesse ipotesi del precedente teorema 17.d.1, mostrate che esistono $\varepsilon > 0$ e una funzione continua $\tilde{g} : V \to \mathbb{R}$ dove $I = (\overline{a} - \varepsilon, \overline{a} + \varepsilon)$ e $V = U' \times I$ è aperto in $\mathbb{R}^n$, tali che [1GZ]

$$\forall (x', a) \in V \quad , \quad (x', \tilde{g}(x', a)) \in U \quad \text{e} \quad f\big(x', \tilde{g}(x', a)\big) = a \quad . \tag{17.d.11}$$

Viceversa se $x \in U$ e $a = f(x)$ e $a \in I$ allora $x_n = \tilde{g}(x', a)$.

Notate che la precedente relazione significa che, per ogni fissato $x' \in U'$, la funzione $\tilde{g}(x', \cdot)$ è l'inversa della funzione $f(x', \cdot)$ (quando definite su opportuni intervalli aperti).

Dunque si ha anche che la funzione $\tilde{g}$ è sempre differenziabile rispetto ad a, e la derivata parziale è

$$\frac{\partial}{\partial a}\tilde{g}(x', a) = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_n} f(x', \tilde{g}(x', a))} \quad .$$

Le altre derivate invece (ovviamente) sono come nel teorema 17.d.1.

La regolarità di $\tilde{g}$ è la stessa di g: se f è Lipschitziana allora $\tilde{g}$ è Lipschitziana; se $f \in C^k(U)$ allora $\tilde{g} \in C^k(V)$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1H0']

E17.d.12 Nelle stesse ipotesi dell'esercizio 17.d.10, assumiamo inoltre che $f \in C^1(A)$. [1H1]

- Decomponiamo $y = (y', y_n), \in \mathbb{R}^n$ come già fatto per x. Definiamo la funzione $G : V \to \mathbb{R}^n$ come $G(y) = (y', \tilde{g}(y))$. Sia $W = G(V)$ l'immagine di V, mostrate che $W \subseteq U$ e che W è aperto.
- Mostrate che è $G : V \to W$ è un diffeomorfismo; e che la sua inversa è la mappa $F(x) = (x', f(x))$.
- Poniamo $\tilde{f} = f \circ G$. Mostrate che $\tilde{f}(x) = x_n$.

(Questo esercizio sarà usato, insieme al 17.c.7, per affrontare i problemi vincolati in sezione §17.e). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1H2']

E17.d.13 Prerequisiti: 8.e.17, 8.e.18, 10.g.8, 10.g.9, 17.a.8, 17.d.1, 21.7 e 21.a.4. [1H3]
Difficoltà:**.

Per questo esercizio sono necessarie definizioni e risultati presentati nel capitolo §21.

Sia $r \geq 1$ intero, o $r = \infty$. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^r, e tale che $\nabla F \neq 0$ in ogni punto in cui $F = 0$.

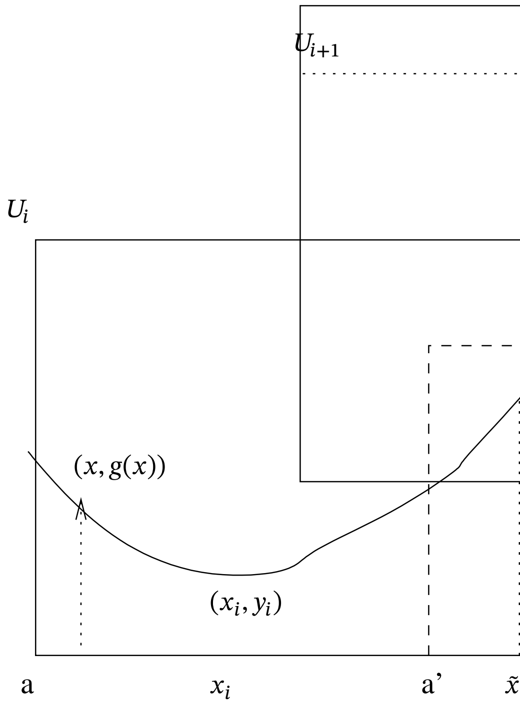
Sappiamo da che 8.e.17 che $\{F = 0\}$ è l'unione disgiunta di componenti connesse, da 8.e.18 che ogni componente connessa è un chiuso.

Mostrate che, per ogni componente connessa K, vi è un aperto $A \supseteq K$ tale che $K = A \cap \{F = 0\}$, e che dunque vi è un numero al più numerabile di componenti connesse.

Mostrate che ogni componente connessa è il sostegno di una curva semplice immersa e di classe C^r, di uno dei seguenti due tipi:

- la curva è chiusa, oppure
- la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ non è chiusa e è illimitata (cioè $\lim_{t \to \pm\infty} |\gamma(t)| = \infty$).

Il primo caso si verifica se e solo se la componente connessa è un compatto.



Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1H4'][UNACCESSIBLE UUID '1H5']*

§17.e Problemi vincolati [2D5]

Definizione 17.e.1. *Sia ora $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f, \varphi : A \to \mathbb{R}$ funzioni reali di classe C^1 su A. Fissato $a \in \mathbb{R}$ definiamo poi l'insieme di livello* [1F6]

$$E_a = \{x \in A : \varphi(x) = a\}$$

assumiamo che E_a sia non vuoto, e che $\nabla\varphi(x) \neq 0$ per ogni $x \in E_a$.

*Chiamiamo **punto di minimo locale di f vincolato a** E_a un punto di E_a che sia di minimo locale per $f|_{E_a}$; e similmente per i massimi.*

Per risolvere i seguenti esercizi potrà essere utile applicare i risultati visti in 17.c.6, 17.c.7, 17.d.12.

Esercizi

E17.e.2 Prerequisiti:17.e.1,17.d.12. Siano f, φ di classe C^1 nell' aperto A, e sia $\overline{x}$ un punto di minimo locale per f vincolato ad E_a (dunque $\varphi(x) = a$). Mostrate che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(\overline{x}) + \lambda\nabla\varphi(\overline{x}) = 0$; questo λ è detto **il moltiplicatore di Lagrange**. [1H8]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1H9']*

E17.e.3 Prerequisiti:17.e.1,17.c.7,17.e.2.Siano f, φ di classe C^2 nell' aperto A, e sia $\overline{x}$ un punto di minimo vincolato per f vincolata ad E_a; sia λ il moltiplicatore di Lagrange; definiamo $h = f(x) + \lambda\varphi(x)$, allora [1HB]

$$\forall v, v \cdot \nabla\varphi(x) = 0 \Longrightarrow v \cdot Hv \geq 0$$

dove H è la matrice Hessiana di h.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1HC']*

E17.e.4 Nelle stesse ipotesi, vediamo un "vice versa". Siano $f, \varphi : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2 nell' aperto A, e siano $\overline{x} \in E_a$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(\overline{x}) + \lambda \nabla \varphi(\overline{x}) = 0$; si abbia [1HD]

$$\forall v, v \cdot \nabla \varphi(x) = 0 \Longrightarrow v \cdot Hv > 0$$

dove

$$h(x) = f(x) + \lambda \varphi(x)$$

e H è la matrice Hessiana di h in $\overline{x}$. Si mostri allora che $\overline{x}$ è un punto di minimo locale vincolato per f rispetto a E_a.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1HF']*

§17.e.a Vincoli con diseguaglianze

Consideriamo ora un diverso tipo di vincolo.

Definizione 17.e.5. *Sia* [2BH]

$$F_a = \{x \in A : \varphi(x) \le a\} \quad ;$$

assumiamo sempre che F_a sia non vuoto e che $\nabla \varphi(x) \neq 0$ per ogni $x \in E_a$.

Chiamiamo ***punto di minimo locale di f vincolato a*** *F_a un punto di F_a che sia di minimo locale per $f|_{F_a}$; e similmente per i massimi.*

Esercizi

E17.e.6 Prerequisiti:17.e.5,17.e.1.Mostrate che $\partial F_a = E_a$ e che F_a coincide con la chiusura della sua parte interna. *(Le operazioni di chiusura e frontiera vanno eseguite all'interno di A, visto come spazio topologico!)* [1HG]

E17.e.7 Prerequisiti:17.e.5.Mostrate che condizione necessaria perché $x \in A$ sia minimo locale di f vincolata a F_a è che, [1HH]

- o $\varphi(x) < a$ e $\nabla f(x) = 0$,
- oppure $\varphi(x) = a$ e $\nabla f(x) + \lambda \nabla \varphi(x) = 0$ con $\lambda \ge 0$.

Queste sono le condizioni di **Karush–Kuhn–Tucker**.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1HJ']*

E17.e.8 Prerequisiti:17.e.5.Nel caso $n = 1$, supponiamo che A sia un intervallo aperto, mostrate che se $\varphi(x) = a$ e $f'(x)\varphi'(x) < 0$ allora il punto x è punto di minimo locale per f vincolata a F_a. [1HK]

E17.e.9 Prerequisiti:17.e.5.Trovate un semplice esempio nel caso $n = 2$ in cui il punto x non è di minimo locale per f vincolata a F_a, ma $\varphi(x) = a$ e $\nabla f(x) + \lambda \nabla \varphi(x) = 0$ con $\lambda > 0$. [1HM]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1HN']*

§18 Limiti di funzioni [1HQ]

Definizione 18.1. *Si consideri un insieme A, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e una successione di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}$. Diremo che f_n converge a f puntualmente se* [2DT]

$$\forall x \in A\,,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad .$$

Diremo che f_n converge a f uniformemente se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A\,,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad .$$

Ulteriori informazioni si possono trovare in Cap. 6 of [3], Cap. 11 in [5] o Cap. 7 of [23].

Definizione 18.2. *Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni $f : X_1 \to X_2$, diremo che è una **famiglia equicontinua** se vale una di queste proprietà equivalenti.* [1HR]

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathcal{F}$
$$\forall x, y \in X_1,\ d_1(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \quad .$$
- *Esiste $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty]$ una fissata funzione monotona debolmente crescente per cui $\lim_{t\to 0+} \omega(t) = \omega(0) = 0$ (che è detta* "modulo di continuità" [†103]*) per cui*
$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall x, y \in X_1,\ d_2(f(x), f(y)) \leq \omega\big(d_1(x, y)\big) \quad . \tag{18.3}$$
- *Esiste $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty]$ una fissata funzione continua con $\omega(0) = 0$ che soddisfa* (18.3).

(Per l'equivalenza fra le ultime due può essere utile 14.a.11.)

Esercizi

E18.4 Note:*Questo risultato è noto come "lemma del Dini".* [1HS]

Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $I \subset X$ un compatto e siano $f, f_n : I \to \mathbb{R}$ continue e tali che $f_n(x) \searrow_n f(x)$ puntualmente (cioè per ogni $x \in I$ e n si ha $f(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ e $\lim_n f_n(x) = f(x)$). Si mostri allora che $f_n \to f$ uniformemente.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1HT']*

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1HV']*

Negli esercizi successivi vedremo che se anche una sola delle ipotesi viene a mancare, allora esistono controesempi.

E18.5 Trovate un esempio di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e limitate e tali che $f_n(x) \searrow_n 0$ puntualmente, ma non $f_n \to 0$ uniformemente. [1HW]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1HX']*

E18.6 Trovate un esempio di $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$ continue e limitate e tali che $f_n(x) \to_n 0$ puntualmente ma non $f_n \to 0$ uniformemente. [1HY]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1HZ']*

E18.7 Trovate un esempio di funzioni $f_n : [0,1] \to [0,1]$ continue e limitate e tali che $f_n(x) \searrow_n f(x)$ puntualmente a $f : [0,1] \to [0,1]$ (cioè per ogni x e n si ha $0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x) \le 1$ e $\lim_n f_n(x) = f(x)$) ma f non è continua e non si ha convergenza $f_n \to f$ uniforme. [1J1]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J2']

E18.8 Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Quali di queste classi $\mathcal{F}$ di funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ sono chiuse per convergenza uniforme? Quali sono chiuse per convergenza puntuale? [1J3]

1. Le funzioni continue e monotone (debolmente) crescenti su $I = [0,1]$.

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J4']
2. Le funzioni convesse su $I = [0,1]$.

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J5']
3. Data $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una fissata funzione continua con $\omega(0) = 0$ (che è detta *"modulo di continuità"*), sia

   $$\mathcal{F} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ \forall x, y, |f(x) - f(y)| \le \omega(|x - y|)\}$$

   (questa è detta *una famiglia di funzioni equicontinue*, come spiegato nella definizione 18.2.)

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J6']
4. Dato $N \ge 0$ fissato, la famiglia di tutti i polinomi di grado minore o uguale a N, visti come funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J7']
5. Le funzioni regolate su $I = [0,1]$. †104

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J9']
6. Le funzioni uniformemente continue e limitate su $I = \mathbb{R}$.

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JB']
7. Le funzioni Hoelderiane su $I = [0,1]$, cioè

   $$\left\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists b > 0, \exists \alpha \in (0,1]\ \forall x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \le b|x - y|^\alpha \right\}$$

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JC'][UNACCESSIBLE UUID '1JD']
8. Le funzioni Riemann integrabili su $I = [0,1]$.

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JF']

E18.9 Ci chiediamo se le classi precedenti $\mathcal{F}$ godono di una *"proprietà di rigidità"*, cioè se da una convergenza più "debole" nella classe segue una convergenza più "forte". Dimostrate le seguenti proposizioni. [1JG]

1. Siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ continue e monotone (debolmente) crescenti, definite su un intervallo $I = [a, b]$ chiuso e limitato. Se vi è un insieme denso J in I e con $a, b \in J$, per cui $\forall x \in J, f_n(x) \to_n f(x)$, allora $f_n \to_n f$ uniformemente.

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JH']

†103 Riguardo alla nozione di "modulo di continuità" si veda anche 14.b.2.

†104 Le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ *regolate* sono le funzioni che ammettono in ogni punto limite destro e limite sinistro finiti. Si veda la Sezione §13.b.

2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto. Siano $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ convesse su A. Se vi è un insieme J denso in A tale che $\forall x \in J, f_n(x) \to_n f(x)$, allora per ogni $[a, b] \subset A$ si ha che $f_n \to_n f$ uniformemente su $[a, b]$.

   Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1JJ']*

3. Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ una successione equicontinua di funzioni [†105] definite su un intervallo $I = [a, b]$ chiuso e limitato, e sia ω il loro modulo di continuità.
   Se vi è un insieme J denso in $[a, b]$ tale che $\forall x \in J, f_n(x) \to_n f(x)$, allora, f si estende da J a I in modo da essere continua (con modulo ω), e $f_n \to_n f$ uniformemente su $[a, b]$.

   Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1JK']*

4. Siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ polinomi di grado minore o uguale a N, visti come funzioni definite su un intervallo $I = [a, b]$ chiuso e limitato; siano fissati $N + 1$ punti distinti $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N \le b$; supponiamo che , per ogni x_i, $f_n(x_i) \to_n f(x_i)$: allora f_n convergono a f uniformemente, e così ogni loro derivata $D^k f_n \to_n D^k f$ uniformemente.

   Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1JM']*

Si cerchino inoltre controesempi per simili proposizioni quando applicate alle altre classi di funzioni viste nell'esercizio precedente.

E18.10 Prerequisiti:18.2, 18.8 punto 6.Difficoltà:*. [1JN]

Se $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ sono uniformemente continue su un insieme $I \subset \mathbb{R}$, e $f_n \to_n f$ uniformemente su I, allora f è uniformemente continua, e la famiglia $(f_n)_n$ è equicontinua.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1JP']*

E18.11 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e siano $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le traslate di f, definite (per $t \in \mathbb{R}$) da $g_t(x) = f(x - t)$. Si mostri che g_t tende puntualmente a f per $t \to 0$ se e solo se f è continua; e che g_t tende uniformemente a f per $t \to 0$ se e solo se f è uniformemente continua. [1JQ]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1JR']*

E18.12 Sia $I \subset \mathbb{R}$ un aperto, sia $\hat{x}$ un punto di accumulazione per I [†106], sia $f_m : I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni limitate che convergono uniformemente a $f : I \to \mathbb{R}$ quando $m \to \infty$. Supponiamo che per ogni m esista $\lim_{x \to \hat{x}} f_m(x)$ allora [1JS]

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{x \to \hat{x}} f_m(x) = \lim_{x \to \hat{x}} \lim_{m \to \infty} f_m(x)$$

nel senso che se uno dei due limiti esiste allora esiste anche l'altro, e sono uguali. (Il precedente risultato vale anche per limiti destri o limiti sinistri).

Mostrate con un semplice esempio che se il limite non è uniforme allora la precedente uguaglianza non vale.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1JT']* (Si veda anche l'esercizio 7.a.8).

E18.13 Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo compatto, siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ continue. Mostrate che i due seguenti fatti sono equivalenti. [1JV]

†105 La definizione è in 18.2

†106 Includendo anche il caso in cui I è superiormente illimitato e $\hat{x} = +\infty$, oppure il caso in cui I è inferiormente illimitato e $\hat{x} = -\infty$.

a. Per ogni $x \in X$ e per ogni successione $(x_n)_n \subset I$ per cui $x_n \to_n x$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$;

b. $f_n \to_n f$ uniformemente su I.

Trovate indi un esempio dove $I = [0,1)$, il primo punto vale, ma f_n non tende uniformemente a f.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1JW']*

§18.a Sul Teorema di Ascoli–Arzelà

Vediamo ora alcuni esercizi che ricostruiscono il famoso Teorema di Ascoli–Arzelà.

Esercizi

E18.a.1 `Prerequisiti:18.8 punto 6,18.10.` Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme. Sia X l'insieme delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ limitate e uniformemente continue. Dotiamo X della distanza $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$. Mostrate che lo spazio metrico (X, d_∞) è completo. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1JY']* In particolare, X è un sottospazio vettoriale chiuso nello spazio $C_b(I)$ delle funzioni continue e limitate. [1JX]

E18.a.2 `Prerequisiti:18.2,18.8.6,18.10.Difficoltà:**.` [1K0]

Sia (X, d_∞) come nell'esercizio 18.a.1 precedente. Sia ora $\mathcal{F} \subseteq X$ una famiglia di funzioni, supponiamo che $\mathcal{F}$ sia totalmente limitata (come definito in 10.j.1): mostrate allora che la famiglia $\mathcal{F}$ è equicontinua.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1K1']*

E18.a.3 `Prerequisiti:18.2,10.j.6, 18.9.3.Difficoltà:*.` [1K2]

Sia ora invece $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue, e supponiamo che la successione (f_n) sia equicontinua e limitata (cioè $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$). Si mostri che esiste una sottosuccessione f_{n_k} che converge uniformemente.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1K3']*

E18.a.4 `Prerequisiti:18.2,10.j.1,10.j.12,18.a.3,18.a.2.Difficoltà:**.Note:`*Una versione del teorema di Ascoli–Arzelà.* [1K4]

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Sia $C(I)$ l'insieme delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Dotiamo $C(I)$ della distanza $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$. Sappiamo che lo spazio metrico $(C(I), d_\infty)$ è completo.

Sia $\mathcal{F} \subseteq C(I)$: le seguenti sono equivalenti.

1. $\mathcal{F}$ è compatto
2. $\mathcal{F}$ è chiusa, è equicontinua e limitata (cioè $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_\infty < \infty$).

§19 Serie di potenze [1K6]

La teoria necessaria per lo svolgimento dei successivi esercizi si può trovare nel Cap. 6 di [3], Sez. 11.6 in [5] o Cap. 8 di [23].

Esercizi

E19.1 Una serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ha raggio di convergenza positivo se e solo se se esiste $\ell > 0$ per cui $|a_k| \le \ell^k$ per ogni $k \ge 1$. [1K7]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1K8']*

E19.2 Siano c_k numeri complessi, e $a_k = |c_k|$; si noti che le serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ hanno lo stesso raggio di convergenza R. [1K9]

Posta, per $t > 0$ reale $\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, si noti che questa formula definisce una funzione monotona $\tilde{f} : [0, \infty) \to [0, \infty]$; si mostri che il raggio di convergenza R coincide con l'estremo superiore dei $t \ge 0$ per cui $\tilde{f}(t) < \infty$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1KB']* *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1KC']*

E19.3 Prerequisiti:7.e.4.Data $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ con $a_k \ge 0$ e con il raggio di convergenza $r > 0$, dimostrate che $\lim_{t \to r-} f(t) = f(r)$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1KF']* [1KD]

E19.4 Trovate due esempi di serie $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ con $a_k > 0$ e con raggio di convergenza r positivo e finito, per cui [1KG]

- $f(r) < \infty$
- $f(r) = \infty$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1KH']*

E19.5 Trovate un esempio di serie $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ con $a_k \in \mathbb{R}$ e con raggio di convergenza r positivo e finito, per cui esiste finito il limite $\lim_{t \to r-} f(t)$, ma la serie non converge in $t = r$. [1KJ]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1KK']*

Notate che (per il Lemma di Abel) se la serie converge in $t = r$ allora esiste il limite $\lim_{t \to r-} f(t) = f(r)$.

E19.6 Siano $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Supponendo che $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ con raggio di convergenza r positivo e $t \in (-r, r)$, si determinino i coefficienti a_k in modo da soddisfare le seguenti equazioni differenziali. [1KM]

1. $f'(t) = f(t)$ e $f(0) = b$,
2. $f'(t) = t^2 f(t)$ e $f(0) = b$,
3. $f''(t) = t^2 f(t)$ e $f(0) = b, f'(0) = 0$,
4. $t f''(t) + f'(t) + t f(t) = 0$ e $f(0) = b, f'(0) = 0$,
5. $t^2 f''(t) + t f'(t) + (t^2 - m^2) f(t) = 0$ $m \ge 2$ intero, $f(0) = f'(0) = \ldots f^{(m-1)} = 0$, e $f^{(m)} = b$.

(Le ultime due sono dette *Equazioni di Bessel*). *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1KP'][UNACCESSIBLE UUID '27G']*

Si vedano anche gli esercizi 20.3, 24.a.2, 24.a.4 e 24.a.1.

§19.a Somma e prodotto, composizione e inversa [2D6]

Esercizi

E19.a.1 Prerequisiti:19.2.Consideriamo le serie di potenze [1KQ]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \; ,$$

con raggio di convergenza non nullo, rispettivamente r_f e r_g.

Si mostri che la funzione prodotto $h(x) = f(x)g(x)$ si può esprimere in serie di potenze

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

dove

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \; ;$$

con raggio di convergenza $r_h \geq \min\{r_f, r_g\}$. (Si noti la somiglianza con il prodotto di Cauchy, discusso in sezione §7.c.c)

Può succedere che $r_h > \min\{r_f, r_g\}$?

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1KR']*

E19.a.2 Prerequisiti:19.1.Difficoltà:*.Sia $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ con $b_0 = g(0) \neq 0$: si esprima formalmente la funzione reciproca $f(x) = 1/g(x)$ come serie di potenze e si calcolino i coefficenti a partire dai coefficienti b_m; se il raggio di convergenza di g è non nullo si mostri che il raggio di convergenza di f è non nullo e che $f(x) = 1/g(x)$ laddove le due serie $f(x), g(x)$ convergono. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1KT']* [1KS]

E19.a.3 Prerequisiti:19.2,17.a.3.Difficoltà:*. [1KV]

Consideriamo le serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \; ,$$

con raggio di convergenza non nullo, rispettivamente r_f e r_g. Supponiamo che $g(0) = 0 = b_0$. Siano $I_f, I_g \subset \mathbb{C}$ dischi centrati in zero con raggi minori rispettivamente di r_f e r_g: le precedente serie dunque definiscono funzioni $f : I_f \to \mathbb{C}$ e $g : I_g \to \mathbb{C}$. A meno di rimpicciolire I_g, assumiamo che $g(I_g) \subset I_f$.

Si mostri che la funzione composta $h = f \circ g : I_g \to \mathbb{C}$ si può esprimere come serie di potenze $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ (con raggio di convergenza almeno r_g); si mostri come i coefficienti c_k possono essere calcolati dai coefficienti a_k, b_k. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1KW'][UNACCESSIBLE UUID '1KX'] [UNACCESSIBLE UUID '1KY']*

E19.a.4 Difficoltà:*.Sia $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ con raggio di convergenza non nullo r_g. Sia $I_g \subset \mathbb{C}$ un disco centrato in zero di raggio minore di r_g; abbiamo dunque definito una funzione $g : I_g \to \mathbb{C}$. assumiamo $g(0) = 0$ e $g'(0) \neq 0$; Assumendo che l'inversa $f(y) = g^{-1}(y)$ si possa esprimere in serie di Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calcolate i coefficienti della serie di f partendo da quelli di g. [1KZ]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1M0']*

E19.a.5 Prerequisiti:19.a.4.Difficoltà:**. [1M1]

Definendo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dove i coefficienti a_n sono stati ricavati nel precedente esercizio 19.a.4, si provi a mostrare che il raggio di convergenza f è positivo. †107

§19.b Exp,sen,cos [2D7]

Esercizi

E19.b.1 Prerequisiti:19.2,19.a.1, 6.7, 6.8.È uso definire [1M3]

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

per $z \in \mathbb{C}$. Vogliamo riflettere su questa definizione.

- Innanzitutto, per ogni $z \in \mathbb{C}$, possiamo effettivamente definire
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$
(si noti infatti che il raggio di convergenza è infinito — come si verifica facilmente usando il criterio della radice 7.c.1).
- Notiamo che $f(0) = 1$; definiamo $e = f(1)$ che è il *numero di Nepero*†108
- Si mostri che $f(z + w) = f(z)f(w)$ per $z, w \in \mathbb{C}$.
- Si verifica facilmente che $f(x)$ è monotona crescente per $x \in (0, \infty)$; usando la relazione precedente, si ottiene che è monotona crescente per $x \in \mathbb{R}$.
- Si mostri poi che, per $n, m > 0$ interi, $f(n/m) = e^{n/m}$ (per la definizione di $e^{n/m}$ si riveda 6.7).
- Si deduca che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ (per la definizione di e^x si riveda 6.8)

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1M4']*

E19.b.2 Prerequisiti:7.e.4. [1M5]

Dato $z \in \mathbb{C}$, mostrate che

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N = e^z \qquad (19.b.3)$$

e che il limite è uniforme sui compatti. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1M6']*

E19.b.4 Se $z = x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, possiamo allora calcolare l'esponenziale complesso come prodotto $e^z = e^x e^{iy}$. Si usino gli sviluppi in serie di potenze per mostrare la *identità di Eulero* $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. [1M7]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1M8']*

E19.b.5 Viceversa si noti allora che $\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$, $\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{i2}$. [1M9]

E19.b.6 Si usi la precedente formula per verificare le note identità [1MB]

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1MC']*

E19.b.7 Definiamo le funzioni *coseno iperbolico* †109 [1MD]

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

e *seno iperbolico*

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} .$$

- Si verifichi che

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

  (che giustifica il nome di "iperbolico").
- Si verifichino gli sviluppi in serie

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{6!} x^6 + \ldots$$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{1}{7!} x^7 + \ldots$$

- Si verifichi che

$$\cosh' = \sinh \quad , \quad \sinh' = \cosh$$

- Si verifichino le formule

$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \cosh y \sinh x$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x \,.$$

§19.c Esponenziale di matrici [2D8]

Definizione 19.c.1. *Definiamo l'esponenziale di matrici come* [1MF]

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

dove si intende che $A^0 = \mathbb{I}$, la matrice identità.

Esercizi

E19.c.2 Prerequisiti:Sezione . §12.d, 12.c.3, 12.e.4, 12.d.4, 19.b.2. [1MG]

Dotiamo lo spazio delle matrici $\mathbb{C}^{n\times n}$ di una delle norme viste in Sezione §12.e.

†107 La dimostrazione si può trovare in Proposizione 9.1 a pg 26 nel libro di Henri Cartan [8].
†108 Conosciuta come *Euler's number* o *Napier's constant* in Inglese.
†109 Si veda la pagina di Wikipedia "Derivazione delle funzioni iperboliche" [46] che spiega in quale senso y è un "angolo".

- Mostrate che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ converge.
- Mostrate che
$$\exp(A) = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{I} + A/N\right)^N \tag{19.c.3}$$
dove $\mathbb{I}$ è la matrice identità in $\mathbb{R}^{n\times n}$; e che la convergenza è uniforme in ogni intorno compatto di A. *(Sugg. fate buon uso del simile risultato 19.b.2.)*

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1MH']*

E19.c.4 Se A è invertibile allora [1MJ]

$$A\exp(B)A^{-1} = \exp(ABA^{-1}) \quad .$$

E19.c.5 La derivata di [1MK]
$$t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$$
è $A\exp(tA)$. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1MM']*

E19.c.6 Se A, B commutano, allora [1MN]

$$A\exp(B) = \exp(B)A \quad , \quad \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)\,.$$

In particolare $\exp(A)$ è sempre invertibile e la sua inversa è $\exp(-A)$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1MP']*

E19.c.7 Siano [1MQ]
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad :$$
calcolate
$$\exp(A)\exp(B) \quad , \quad \exp(B)\exp(A) \quad , \quad \exp(A+B) \quad ;$$
otterrete che sono tutti diversi fra loro. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1MR']*

E19.c.8 Se A, B commutano allora la derivata direzionale di exp nel punto A in direzione B è $B\exp(A)$, cioè [1MS]

$$\frac{d}{dt}\exp(A+tB)|_{t=0} = B\exp(A) \quad .$$

E19.c.9 `Difficoltà:*.`Mostrate che [1MT]

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)) \quad .$$

Sugg. usate la formula di Jacobi 24.14 per calcolare la derivata di $\det(\exp(tA))$*; usate il risultato precedente 19.c.5 — vedere anche 23.f.4. Un'altra dimostrazione si può ottenere passando alla forma di Jordan (usando 19.c.4).*

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1MV']*

E19.c.10 `Difficoltà:*.`Nel caso generale (quando non sappiamo se A, B commutano) procediamo come segue. Definiamo $[A, B] = AB - BA$. [1MW]

- Posto $B_0 = B$ e $B_{n+1} = [A, B_n]$ si ha

$$B_n = A^n B - nA^{n-1}BA + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}BA^2 + \cdots + (-1)^n BA^n = \\ = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}A^{n-k}BA^k \ ;$$

- definiamo ora $Z = Z(A, B)$

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!} \ , \qquad (19.c.11)$$

(notate che Z è lineare in B): si mostra che la serie precedente converge e che

$$\exp(A)B\exp(-A) = Z \ ; \qquad (19.c.12)$$

- da questa infine si dimostra che

$$\exp(A)\exp(B)\exp(-A) = \exp(Z) \ .$$

(Queste formule si possono vedere come conseguenze della formula di Baker–Campbell–Hausdorff [51]). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MX']

E19.c.13 Prerequisiti:19.c.2.In generale (anche quando A, B non commutano) [1MY]

$$\exp(A + B) = \lim_{N\to\infty}\Big(\exp(A/N)\exp(B/N)\Big)^N$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MZ']

E19.c.14 Prerequisiti:23.f.3.Difficoltà:**.Nel caso generale (anche quando non sappiamo se A, B commutano), possiamo esprimere $\exp(A + sB)$ usando una espressione in serie di potenze. Definiamo [1N0]

$$C(t) = \exp(-tA)B\exp(tA)$$

e (ricorsivamente) $Q_0 = \mathbb{I}$ (la matrice identità) e poi

$$Q_{n+1}(t) = \int_0^t C(\tau)Q_n(\tau)\,d\tau$$

allora si ha

$$\exp(-A)\exp(A + sB) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n Q_n(1) \ ; \qquad (19.c.15)$$

questa serie converge per ogni s.

Se ne ricava in particolare che la derivata direzionale di exp nel punto A in direzione B è

$$\frac{d}{ds}\exp(A + sB)|_{s=0} = \exp(A)Q_1(1) = \int_0^1 \exp((1-\tau)A)B\exp(\tau A)\,d\tau \ .$$

(Sugg. usate l'esercizio 23.f.3 con $Y(t, s) = \exp(-tA)\exp(t(A + sB))$ e poi ponete $t = 1$.)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1N1']

E19.c.16 `Prerequisiti:19.c.10.Difficoltà:*.` [1N2]

Dimostrate la relazione

$$\frac{d}{dt}\exp(A+tB)|_{t=0}=\int_0^1 \exp(sA)B\exp((1-s)A)\,\mathrm{d}s \quad .$$

usando le relazioni (19.c.11) e (19.c.12) di esercizio 19.c.10.

§20 Funzioni analitiche [1N4]

La teoria necessaria per lo svolgimento dei successivi esercizi si può trovare nel Cap. 6 di [3] o Cap. 8 di [23].

Esercizi

E20.1 Prerequisiti:17.a.4. [1N5]

Si verifichi che la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x \le 0 \end{cases}$$

(vista anche in 17.a.4) non è analitica.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1N6']

E20.2 Note:*Esercizio 2 del compito Marzo 2010.* [1N7]

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto non vuoto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $\forall x \in I, \forall k \ge 0$, si ha $f^{(k)}(x) \ge 0$: si mostri che f è analitica.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1N9'] Si veda anche l'esercizio 17.a.14.

E20.3 Prerequisiti:19.a.1. [1NC]

Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si mostri che è analitica su tutto $\mathbb{R}$, ma il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di Taylor centrato in x_0 è $\sqrt{1+x_0^2}$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1ND'][UNACCESSIBLE UUID '1NF']

Studiate similmente anche $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ oppure $f(x) = e^{1/(x^2+1)}$.

E20.4 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞; sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia [1NG]

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

la serie di Taylor; supponiamo che g abbia raggio di convergenza $R > 0$: dunque $g : J \to \mathbb{R}$ è un funzione ben definita, dove $J = (x_0 - R, x_0 + R)$. Può succedere che $f(x) \ne g(x)$ per un punto $x \in J$?

E se f è analitica? [†110]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1NH']

E20.5 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto non vuoto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Sia [1NJ]

$$b_n = \sup_{x\in I} |f^{(n)}(x)| = \|f^{(n)}\|_\infty \quad ;$$

se

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{b_n} < \infty$$

[†110] Per "analitica" intendiamo: fissato x_0 esiste una serie $h(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ con raggio di convergenza non nullo tale che $f = h$ in un intorno aperto di x_0 (intorno contenuto nel disco di convergenza) .

allora f è analitica.

Mostrate con un semplice esempio che la richiesta non è necessaria.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1NK'][UNACCESSIBLE UUID '1NM']*

E20.6 Note:*Esercizio 1 Compito 30 Giugno 2017.* [1NN]

Sia f una funzione continua sull'intervallo $[0, 1]$. Si dimostri che la funzione

$$F(t) = \int_0^1 f(x)e^{tx}\, dx$$

è analitica su $\mathbb{R}$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1NP']*

E20.7 Sia $I = (0, 1)$, si trovi un esempio di una funzione analitica $f : I \to \mathbb{R}$ non identicamente zero, ma tale che $A = \{x \in I : f(x) = 0\}$ abbia un punto di accumulazione in $\mathbb{R}$. Si confronti questo esempio con la Prop. 6.8.4 negli appunti [3]; e con l'esempio 17.a.10. [1NQ]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1NR']*

§21 Curve [1NT]

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 21.1. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.* [1NV]

- *Una funzione continua $\gamma : I \to X$ è detta* ***curva parametrica****, o più semplicemente nel seguito* curva.
- *Se γ è iniettiva si dice che la curva è* ***semplice****.*
- *Se γ è un omeomorfismo con la sua immagine, si dice che la curva è* ***inclusa****, o anche* ***embedded****.*
- *Se $X = \mathbb{R}^n$ e γ è di classe C^1 e $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, allora γ è detta una* ***curva immersa*** *o* ***curva regolare****.* †111

Chiameremo ***sostegno*** *o* ***supporto*** *l'immagine $\gamma(I)$ di una curva.*

Si usa anche il termine arco *come sinonimo di* curva*;* †112 *questo termine viene prevalentemente usato quando la curva non è (necessariamente) chiusa.*

Rimandiamo lo studio delle curve chiuse alla prossima sezione.

Riportiamo due nozioni di equivalenza di curve. La prima era presente in una versione preliminare delle note [3].

Definizione 21.2. *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli. Siano $\gamma : I \to X$ e $\delta : J \to X$ due curve. Si pone $\gamma \sim \delta$ se esiste un omeomorfismo* †113 *crescente $\varphi : I \to J$ tale che $\gamma = \delta \circ \varphi$.* [1NW]

La seconda è la definizione 7.5.4 dal capitolo 7 sezione 5 dagli appunti [3].

Definizione 21.3. *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli. Siano $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\delta : J \to \mathbb{R}^n$ due curve regolari. Si pone $\gamma \approx \delta$ se esiste un diffeomorfismo* †114 *$\varphi : I \to J$ monotono crescente, tale che $\gamma = \delta \circ \varphi$.* [1NX]

Esercizi

E21.4 `Prerequisiti:21.2,21.3.` [1J8]

Mostrare che la relazione $\gamma \sim \delta$ è una relazione di equivalenza.

Mostrare che la relazione $\gamma \approx \delta$ è una relazione di equivalenza.

E21.5 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Mostrate che f è continua se e solo se, per ogni curva $\gamma : [0, 1] \to A$ si ha che $f \circ \gamma$ è continua. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1NZ']* [1NY]

E21.6 Supponiamo che I sia un intervallo chiuso e limitato; usate l'esercizio 10.j.4 per mostrare che un arco $\gamma : I \to X$ semplice è un omeomorfismo con la sua immagine, e dunque la curva è "embedded". [1P0]

Il risultato è ancora vero se I non è chiuso? E se I non è limitato?

E21.7 `Prerequisiti:21.6.Difficoltà:*.` [1P1]

†111 Negli appunti [3] si usa *curva regolare* e così anche in alcuni testi come [1].

†112 Notare che però in [23] "*arc*" è una curva iniettiva.

†113 vedere 8.g.2.

†114 Un diffeomorfismo è una funzione bigettiva $\varphi : I \to J$ di classe C^1, la cui inversa è di classe C^1; in particolare φ' non è mai nulla, e (quando dominio e codominio sono intervalli) ha sempre lo stesso segno.

Presa una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ definiamo nel seguito $\hat{I} = \{t \in \mathbb{R} : -t \in I\}$ e $\hat{\gamma} : \hat{I} \to \mathbb{R}^n$ tramite $\hat{\gamma}(t) = \gamma(-t)$.

Vogliamo mostrare che, in certe ipotesi, due curve hanno lo stesso sostegno se e solo se sono equivalenti.

- Siano $\gamma, \delta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ curve semplici, ma non chiuse, e con lo stesso sostegno. Mostrate che se $\gamma(0) = \delta(t)$ allora $t = 0$ oppure $t = 1$. Nel caso $\gamma(0) = \delta(0)$, mostrate che $\gamma \sim \delta$. Se invece $\gamma(0) = \delta(1)$ allora $\hat{\gamma} \sim \delta$.
- Siano $\gamma, \delta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ curve semplici e immerse, ma non chiuse, e con lo stesso sostegno, e sia $\gamma(0) = \delta(0)$: mostrate che $\gamma \approx \delta$. Se invece $\gamma(0) = \delta(1)$ allora $\hat{\gamma} \approx \delta$.

(Per il caso di curve chiuse si veda 21.a.10)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1P2']

E21.8 Mostrate che $[0,1]$ e $[0,1]^2$ non sono omeomorfi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1P4'] [1P3]

E21.9 Prerequisiti:10.j.4, 21.8.Mostrate che non si può trovare una curva $c : [0,1] \to [0,1]^2$ continua e bigettiva; dunque una curve $c : [0,1] \to [0,1]^2$ che è continua e surgettiva, non può essere iniettiva: come ad esempio la curva di Peano o la curva di Hilbert. [1P5]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1P6']

E21.10 Note:*Bella formula tratta da [68].* [1P7]

Sia $S = S(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ la sfera unitaria $S = \{x : |x| = 1\}$. Sia $v, w \in S$ con $v \neq w$ e $v \neq -w$; sia $T = \arccos(v \cdot w)$ in modo che $T \in (0, \pi)$; quindi la geodetica (cioè la curva di lunghezza minima parametrizzata dall'arco) $\gamma(t) : [0, T] \to S$ che connette v a w all'interno S è

$$\gamma(t) = \frac{\sin\left(T - t\right)}{\sin(T)} v + \frac{\sin\left(t\right)}{\sin(T)} w \quad ,$$

e la sua lunghezza è T.

(Si può presumere che, quando $v \cdot w = 0$ cioé $T = \pi/2$, allora la geodetica è $\gamma(t) = v \cos(t) + w \sin(t)$). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1P8']

§21.a Curve chiuse

Aggiungiamo altre definizioni a quelle già viste in 21.1.

Definizione 21.a.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Sia $\gamma : I \to X$ una curva parametrica.* [1PB]

- *Se $\gamma(a) = \gamma(b)$ si dice che la curva è **chiusa**;*
- *inoltre si dice che la curva è **semplice e chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e γ è iniettiva quando ristretta a $[a, b)$.* [†115]
- *Se $X = \mathbb{R}^n$ e γ è di classe C^1 e è chiusa, si assume ulteriormente che $\gamma'(a) = \gamma'(b)$.*

[†115] Cioè, non si richiede la iniettività negli estremi.

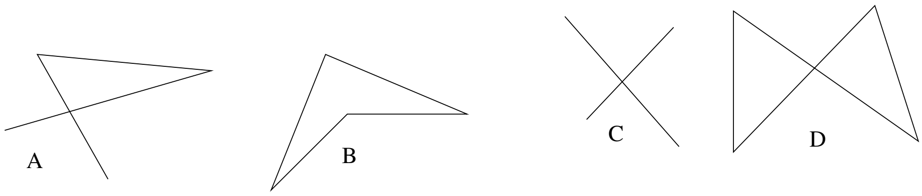


Figura 6: Insiemi dell'esercizio 21.a.2

Esercizi

E21.a.2 Consideriamo i sottoinsiemi del piano delle seguenti figure 6: quali possono essere sostegno di una curva semplice? oppure di una curva chiusa semplice? oppure unione di sostegni di due curve semplici (possibilmente chiusi)? *(Dimostrate le vostre affermazioni.)* [1PC]

E21.a.3 Sia $\gamma : [0,1] \to X$ una curva chiusa, mostrate che ammette un' estensione $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to X$ continua e periodica di periodo 1. [1PF]

E21.a.4 Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ una curva chiusa di classe C^1, mostrate che ammette un' estensione $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ periodica di periodo 1 e di classe C^1. [1PG]

E21.a.5 Useremo le definizioni e i risultati della Sezione §10.o, in particolare 10.o.7. [1PH]

Data $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to X$ continua e periodica di periodo 1, possiamo definire la mappa $\hat{\gamma} : S^1 \to X$ tramite la relazione

$$\hat{\gamma}\Big((\cos(t), \sin(t))\Big) = \tilde{\gamma}(t) \ .$$

Mostrate che questa è una buona definizione, e che $\hat{\gamma}$ è continua.

Usate l'esercizio 10.j.4 per mostrare che ogni arco semplice chiuso, se visto equivalentemente come mappa $\hat{\gamma} : S^1 \to X$, è un omeomorfismo con la sua immagine.

Nel seguito useremo mappe periodiche per rappresentare le curve chiuse.

Esercizi

E21.a.6 Adattate la nozione di equivalenza 21.2 al caso di archi semplici e chiusi, vedendoli però come mappe $\gamma : \mathbb{R} \to X$ continue e periodiche di periodo 1; quali ipotesi richiediamo alle mappe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? [1PK]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1PM']*

E21.a.7 `Prerequisiti:21.2,21.a.3.`Siano γ, δ curve chiuse, ma viste come mappe definite su $\mathbb{R}$ e continue e periodiche di periodo 1. [1PN]

Vediamo una nuova relazione: si ha $\gamma \sim_f \delta$ sse esiste un omeomorfismo crescente $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per cui $\gamma = \delta \circ \varphi$

Mostrate che questa è una relazione di equivalenza.

Confrontatela con la relazione $\sim$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1PP']*

E21.a.8 Prerequisiti:21.3,21.a.4. Siano γ, δ curve chiuse e immerse, ma viste come mappe definite su $\mathbb{R}$ e C^1 e periodiche di periodo 1. [1PQ]

Vediamo una nuova relazione: si ha $\gamma \approx_f \delta$ sse esiste un diffeomorfismo crescente $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per cui $\gamma = \delta \circ \varphi$

Mostrate che questa è una relazione di equivalenza.

Confrontatela con la relazione $\approx$.

E21.a.9 Prerequisiti:21.3,21.a.4,21.a.8. Date un semplice esempio di curve chiuse immerse per cui si ha $\gamma \approx_f \delta$ ma non $\gamma \approx \delta$. [1PR]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1PS']*

E21.a.10 Prerequisiti:21.6. Difficoltà:*. [1PT]

Siano $\gamma, \delta : S^1 \to \mathbb{R}^n$ curve chiuse semplici e immerse e con lo stesso sostegno; poniamo $\hat{\gamma}(t) = \gamma(-t)$: mostrate che o $\gamma \approx_f \delta$ oppure $\hat{\gamma} \approx_f \delta$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1PV']*

Altri esercizi riguardo alle curve sono 11.21, 15.a.24, 17.d.13 e 24.4; si veda inoltre la Sezione §23.d.

§22 Superfici [1PZ]

Esercizi

E22.1 Prerequisiti:17.d.1.Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1; sia $\overline{x} \in A$ tale che $f(\overline{x}) = 0$, e $\nabla f(\overline{x}) \neq 0$: per il teorema di funzione implicita 17.d.1 l'insieme $E = \{f = 0\}$ è un grafico in un intorno di $\overline{x}$, e il piano tangente a questo grafico è l'insieme degli x per cui [1Q0]

$$\langle x - \overline{x}, \nabla f(\overline{x})\rangle = 0\ \ .$$

Confrontate questo risultato col Lemma 7.7.1 negli appunti [3]: "il gradiente è ortogonale agli insiemi di livello" . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q1']

E22.2 Dato $m > 0$, mostrate che la relazione $xyz = m^3$ definisce una superficie in $\mathbb{R}^3$. Provate che i piani tangenti alla superficie nei punti del primo ottante $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$ formano con i piani coordinati di $\mathbb{R}^3$ un tetraedro di volume costante. [1Q2]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q3']

E22.3 Sia $a > 0$. Mostrare che la relazione $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ definisce una superficie regolare dentro il primo ottante $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Provare che i piani tangenti alla superficie tagliano i tre assi coordinati in tre punti, la somma delle cui distanze dall'origine è costante. [1Q4]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q5']

E22.4 Siano $a > 0, b > 0, c > 0$. Si determini un piano tangente all'ellissoide [1Q8]

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

in un punto con $x, y, z > 0$, in modo che il tetraedro delimitato da questo piano e dai piani coordinati abbia volume minimo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q9']

§23 Equazioni differenziali [1QB]

Per poter risolvere i seguenti esercizi sarà necessario conoscere alcuni risultati fondamentali, quali: il Teorema di esistenza e unicità locale [†116], il Lemma di Gronwall; e in generale i metodi per analizzare, risolvere e/o studiare qualitativamente le Equazioni Differenziali. Questi si possono per esempio trovare in [26, 21, 20, 3].

Esercizi

E23.1 Per ogni punto (x, y) del piano con $x, y > 0$ passa un'unica ellissi $4x^2 + y^2 = a$ (con $a > 0$). Descrivete la famiglia di curve che in ogni punto sono ortogonali all'ellisse passante per quel punto. Si veda la figura 7. [1QC]

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1QF']*

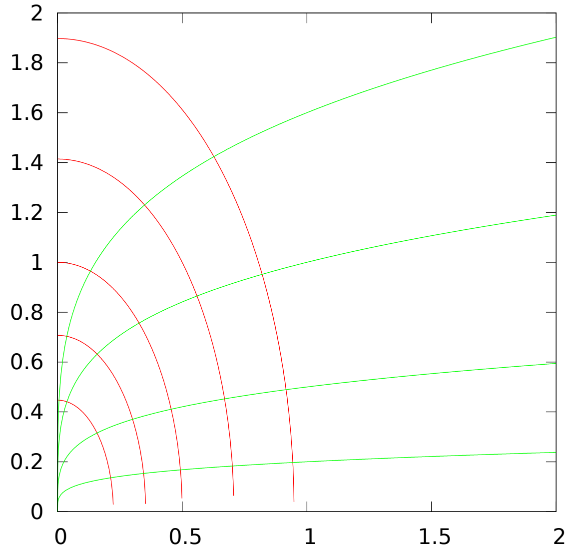


Figura 7: Ellissi (in rosso) e curve a esse ortogonali.

E23.2 `Prerequisiti:17.4.` [1QH]

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto.

Sia $F : I \times \mathbb{R} \to (0, \infty)$ funzione continua positiva, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile che risolve l'equazione differenziale

$$(f'(x))^2 = F(x, f(x)) \quad .$$

Mostrate allora che x è sempre crescente, nel qual caso si ha $f'(x) = \sqrt{F(x, f(x))}$ per ogni x, oppure è sempre decrescente, nel qual caso si ha $f'(x) = -\sqrt{F(x, f(x))}$; e che dunque f è di classe C^1.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1QJ']*

E23.3 `Prerequisiti:23.2.` [1QK]

[†116] Anche noto come: teorema di Picard–Lindelöf theorem, o di Cauchy–Lipschitz.

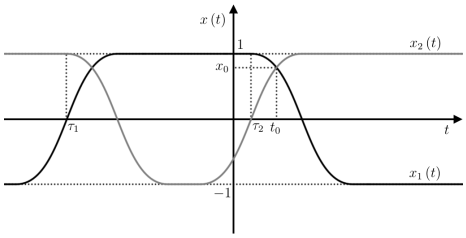


Figura 8: Figura per 23.3

Descrivete tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabili che risolvono

$$\forall x\ ,\ (f'(x))^2 + (f(x))^2 = 1\ .$$

Mostrate che se $-1 < f(x) < 1$ per $x \in I$ intervallo aperto allora si ha che f è un arco di sinusoide per $x \in I$.

Mostrate che tutte le soluzioni sono C^1, e che sono C^∞ a tratti.

Vedrete che $f \equiv 1$ e $f \equiv -1$ sono inviluppi delle altre soluzioni, come spiegato nella sezione §23.d.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QM']

E23.4 Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione C^2 tale che $f(0) = f(1) = 0$ e $f'(x) = f(x)f''(x)$ per ogni $x \in [0,1]$. [1QN]

Si provi che la funzione f è identicamente nulla.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QP'][UNACCESSIBLE UUID '1QQ']

§23.a Problemi autonomi

Esercizi

E23.a.1 Prerequisiti:16.3.Siano dati $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ fissati e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione limitata e continua con $f(x_0) = 0$ ma $f(x) > 0$ per $x \neq x_0$. Vogliamo studiare il problema autonomo [1QR]

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t))\ , \\ x(t_0) = x_0\ . \end{cases}$$

Notate che $x \equiv x_0$ è una possibile soluzione. Mostrate che se, per $\varepsilon > 0$ piccolo, †117

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{f(y)}\, \mathrm{d}y = \infty \tag{23.a.2}$$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{1}{f(y)}\, \mathrm{d}y = \infty \tag{23.a.3}$$

allora $x \equiv x_0$ è l'unica soluzione; mentre in caso contrario esistono molte soluzioni di classe C^1: descrivetele tutte.

†117 Se la condizione vale per un $\varepsilon > 0$ allora vale per ogni $\varepsilon > 0$, dato che $f > 0$ lontano da x_0.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QS']

Le condizioni (23.a.2) e (23.a.3) sono un caso particolare della *condizione di unicità di Osgood*, si veda Problem 2.25 in [26].

E23.a.4 Sia $\alpha > 1$ e si consideri l'equazione [1QV]

$$\begin{cases} x'(t) = |x(t)|^\alpha \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

con $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ fissati. Mostrate che si ha esistenza e unicità della soluzione; calcolate l'intervallo massimale di definizione; usate il metodo di separazione delle variabili per calcolare esplicitamente le soluzioni. (Essendo la equazione autonoma, si potrebbe assumere che $t_0 = 0$, ma l'esempio risulta forse più chiaro con un t_0 generico).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QW']

E23.a.5 Cosa succede nell'esercizio precedente nel caso $\alpha \in (0, 1)$? [1QX]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QY']

E23.a.6 Prerequisiti:23.a.4.Sia $\alpha > 1$ e si consideri di nuovo [1QZ]

$$\begin{cases} x'(t) = |x(t)|^\alpha \\ x(0) = 1 \end{cases},$$

abbiamo visto in 23.a.4 che questo ammette una soluzione massimale $x : I_\alpha \to \mathbb{R}$. Fissato $t \in \mathbb{R}$ mostrate che si ha $t \in I_\alpha$ per $\alpha > 1$ vicino a 1, e che $\lim_{\alpha\to 1+} x(t) = e^t$. Notate che e^t è la unica soluzione di $x'(t) = |x(t)|$ con $x(0) = 1$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1R0']

§23.b Risoluzione

Esercizi

E23.b.1 Sia data $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua; trovate le $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che risolvono [1R1]

$$\forall x \neq 0\,,\ f'(x) = \Theta\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

(Sugg. si effettui il cambio di variabili $f(x) = xh(x)$ e si trovi e risolva un'equazione differenziale per $h(x)$.)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1R2']

E23.b.2 Trovate le soluzioni del problema [1R4]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}$$

con la sostituzione $z = y/x$, e anche confrontandolo col problema

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y}{y}\,.$$

§23.c Discussioni qualitative

Per i successivi esercizi può essere utile il seguente semplice lemma di confronto.

Lemma 23.c.1. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, siano $f, g : U \to \mathbb{R}$ continue con $f \ge g$; sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto con $t_0 \in I$, e siano $x, w : I \to \mathbb{R}$ soluzioni di* [1R7]

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad w(t) = g(t, w(t))$$

con $x(t_0) \ge w(t_0)$: allora $x(t) \ge w(t)$ per $t \ge t_0$. Basta infatti notare che $x'(t) \ge w'(t)$ e dunque $x(t) - w(t)$ è crescente.

(Vi sono versioni molto più raffinate di questo lemma, si veda ad esempio nella sezione 8.6 negli appunti del corso [3]).

Esercizi

E23.c.2 Discutete le soluzioni di [1R8]

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x) - x)^3 \\ y(0) = a \quad . \end{cases}$$

Studiate in modo qualitativo l'esistenza (locale o globale) delle soluzioni, e le proprietà di monotonia e convessità/concavità.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1R9'][UNACCESSIBLE UUID '1RB']*

E23.c.3 Si considera il problema di Cauchy [1RD]

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x)^2 + x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Mostrate che esiste unica la soluzione globale $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che y è limitata e esistono finiti i limiti $\lim_{x\to\infty} y(x)$, $\lim_{x\to-\infty} y(x)$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1RG'][UNACCESSIBLE UUID '1RH']*

E23.c.4 Discutete l'equazione differenziale [1RK]

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x) - x^2} \\ y(0) = a \end{cases}$$

per $a \ne 0$, studiando in modo qualitativo l'esistenza (locale o globale) delle soluzioni, e le proprietà di monotonia e convessità/concavità. [†118]

Mostrate che la soluzione esiste per tutti i tempi positivi.

Mostrate che per $a > 0$ la soluzione non si estende a tutti i tempi negativi.

`Difficoltà:*`.Mostrate che esiste un $\tilde a < 0$ critico tale che, per $\tilde a < a < 0$ la soluzione non si estende a tutti i tempi negativi, mentre per $a \le \tilde a$ la soluzione esiste per tutti i tempi negativi; inoltre per $a = \tilde a$ si ha $\lim_{x\to-\infty} y(x) - x^2 = 0$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1RP']*

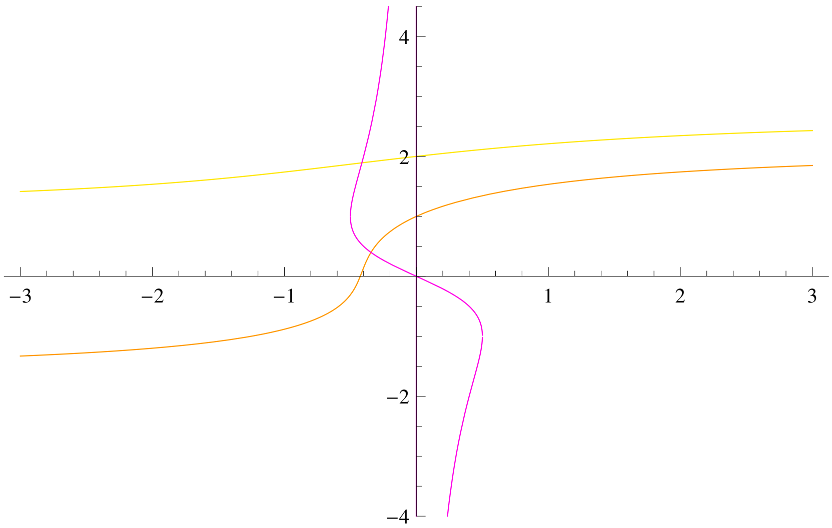


Figura 9: Esercizio 23.c.3. In viola la linea dei flessi. In giallo le soluzioni con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y(0) = 2$.

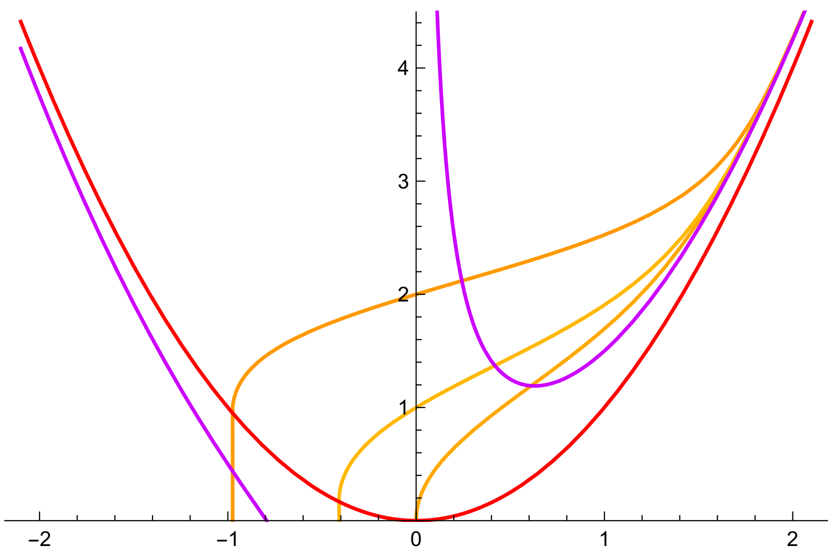


Figura 10: Esercizio 23.c.4. Soluzioni per $a > 0$
In viola la linea dei flessi. In rosso la parabola dove la derivata della soluzione è infinita. In giallo le soluzioni con dati iniziali $y(0) = 2$, $y(0) = 1$, $y(0) = 1/1000$.

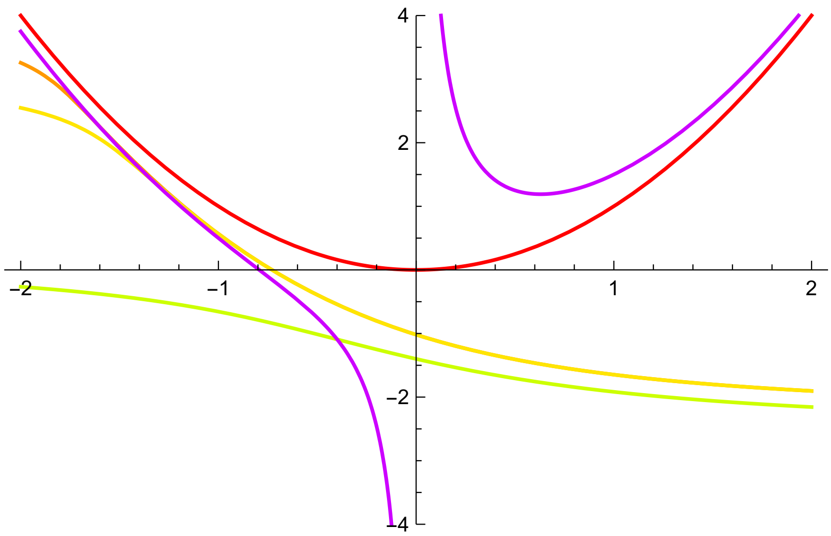


Figura 11: Esercizio 23.c.4. Soluzioni per $a < 0$
In viola la linea dei flessi. In rosso la parabola dove la derivata della soluzione è infinita. Sono disegnate le soluzioni con dati iniziali $a = -1,4$ ("verde"), $a = -1,0188$ ("arancione") e $a = -1,019$ ("gialla"). Notate che queste ultime si differenziano solo per $0,0002$ come dati iniziali, sono indistinguibili nel grafico per $x > -1$, ma poi per $x < -1$ si allontanano velocemente, e per $x = -2$ valgono rispettivamente $3,25696$ e $2,54856$, con una differenza di circa $0,7$!

E23.c.5 `Note:`*Esercizio 4, compito 9 Luglio 2011.* Si dimostri che il problema di Cauchy [1RQ]

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)\big(y(x) - x^2\big) \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y = y(x)$, definita su tutto $\mathbb{R}$ e tale che

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \quad .$$

---

†118 L'equazione differenziale è tratta dall'esercizio 13 in [2].

§23.d Inviluppo

Data una famiglia di curve planari, vogliamo definire la *curva inviluppo*. Vediamo due possibili definizioni.

Definizione 23.d.1 (Inviluppo di curve)**.** [23Y]

- *Supponiamo che le curve nel piano siano descritte dall'equazione in forma implicita* $F(x, y, a) = 0$*; cioè, fissato il parametro* a*, la curva è il luogo*

$$\{(x, y) : F(x, y, a) = 0\} \quad ;$$

allora l'inviluppo si ottiene ricavando la a *dalla equazione* $\frac{\partial}{\partial a}F(x, y, a) = 0$ *e sostituendola nella* $F(x, y, a) = 0$*.*

- *Per semplicità, consideriamo curve che sono funzioni dell'ascissa. Sia* $y = f(x, a) = f_a(x)$ *una famiglia di funzioni, con* $x \in I, a \in J$ *(intervalli aperti), allora* $y = g(x)$ ***è l'inviluppo di*** f_a *se il grafico di* g *è coperto dall'unione dei grafici delle* f_a *e la curva* g *è tangente a ogni* f_a *laddove la tocca; più precisamente, per ogni* $x \in I$ *esiste* $a \in J$ *per cui* $g(x) = f(x, a)$*, e inoltre, per ogni scelta di* a *che soddisfa* $g(x) = f(x, a)$*, si ha* $g'(x) = f'(x, a)$*.*

Nota 23.d.2. *La curva inviluppo ha una importante proprietà nel campo delle equazioni differenziali. Supponiamo infatti che* $y = f_a(x)$ *siano soluzioni della equazione differenziale* $\Phi(y', y, x) = 0$*: allora anche* g *è soluzione (verifica immediata).* [†119] [240]

Vogliamo vedere che le due precedenti definizioni sono equivalenti, in questo senso.

Esercizi

E23.d.3 Partiamo dalla prima definizione. Supponiamo di poter applicare il Teorema di Funzione Implicita al luogo [1RV]

$$E_a = \{(x, a) : F(x, y, a) = 0\} \quad ;$$

precisamente, supponiamo che in un punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{a})$ si abbia che $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. A questo aggiungiamo anche l'ipotesi $\frac{\partial^2 F}{\partial aa} \neq 0$. Fissato a, si può esprimere E_a localmente come grafico $y = f(x, a) = f_a(x)$. Usiamo inoltre l'ipotesi $\frac{\partial^2 F}{\partial aa} \neq 0$ per esprimere localmente $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ come grafico $a = \Phi(x, y)$. Definito $G(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, y, \Phi(x, y))$, mostrate che $G = 0$ può essere rappresentato come $y = g(x)$. Mostrate infine che g è l'inviluppo delle curve f_a.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1RW'][UNACCESSIBLE UUID '1RX']

E23.d.4 Nelle ipotesi precedenti, supponendo che $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial aa} > 0$, mostrate che il grafico dell'inviluppo g è localmente il "bordo" dell'unione dei grafici delle f_a, nel senso che $g(x) \geq f_a(x)$ con uguaglianza per un solo a. [1RY]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1RZ'][UNACCESSIBLE UUID '1S0']

E23.d.5 Note:*Dal testo [20], a pg 84.*.Consideriamo le curve [1S1]

$$y = f(x, a) = ax + \frac{a^2}{2}$$

- Trovate un equazione differenziale risolta da tutte le curve. *(Sugg. Si elimini a dal sistema $y = f, y' = \frac{\partial}{\partial x} f$. Il risultato può essere lasciato in forma non normale.)*
- Calcolate l'inviluppo; verificate che soddisfa la equazione differenziale prima ottenuta.

Si veda anche la figura 12. *Soluzione nascosta:* *[UNACCESSIBLE UUID '1S2']*

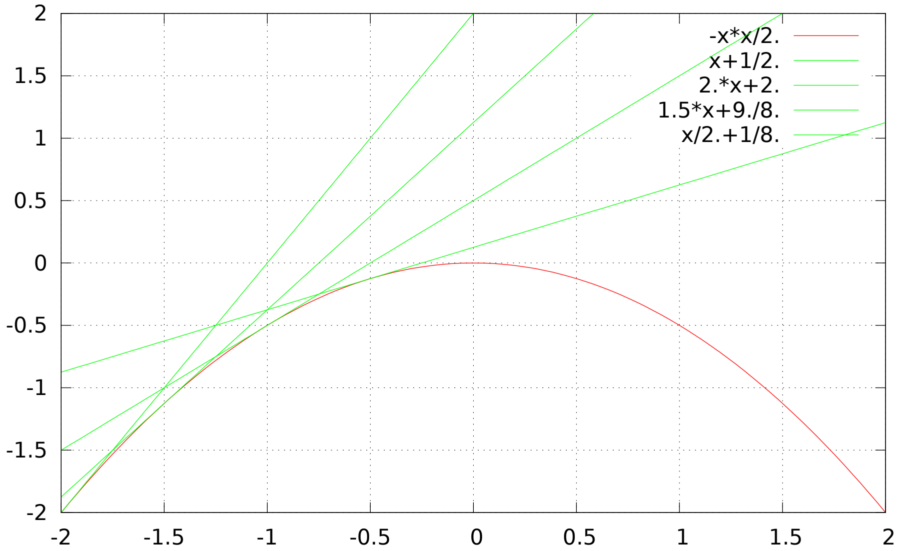


Figura 12: Soluzione di 23.d.5: inviluppo.

E23.d.6 Consideriamo le ellissi $ax^2 + y^2/a = 2$ (con $a > 0$). [1S4]

- Trovate la regione del piano coperta da queste ellissi.
- Mostrate che il bordo di questa regione è l'inviluppo delle ellissi, e descrivetelo.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1S5'][UNACCESSIBLE UUID '1S6']*

E23.d.7 Consideriamo le rette $ax + y/a = 1$ (con $a > 0$). [1S7]

- Trovate la regione del primo quadrante coperta da queste rette.
- Mostrate che il bordo di questa regione è l'inviluppo delle rette e descrivetelo.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1S8']*

E23.d.8 Consideriamo le rette [1S9]

†119 Con le equazioni in forma normale però questa nozione non è interessante perché si ha unicità locale e allora non vi possono essere soluzioni speciali; cioè se $g = f_a$ $g' = f'_a$ in un punto x allora coincidono in un intorno.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{1-a} = 1$$

con $x, y, a \in (0, 1)$. Descrivete la curva inviluppo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SB']

§23.e Equazioni lineari (a coefficienti costanti)

Definizione 23.e.1. *Indichiamo formalmente con D l'operazione* "calcolo della derivata". *Dato un polinomio $p(x)$* [23Z]

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

(che ha coefficienti $a_i \in \mathbb{C}$, costanti) costruiamo formalmente l'operatore lineare

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots a_1 D + a_0$$

che trasforma una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^{n+k} nella funzione $p(D)f$, di classe almeno C^k, definita puntualmente da

$$[p(D)f](x) \stackrel{def}{=} a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \ldots a_1 f'(x) + a_0 f(x) \quad .$$

Esercizi

E23.e.2 Dati due polinomi $p(x), q(x)$ e il polinomio prodotto $r(x) = p(x)q(x)$, mostrate che $p(D)[q(D)f] = r(D)f$ [1SC]

E23.e.3 Posta $f(x) = e^{\lambda x}$, notate che [1SD]

$$[p(D)f](x) = p(\lambda)f(x) \quad .$$

Possiamo dunque considerare gli esponenziali $e^{\lambda x}$ come autovettori di $p(D)$, con autovalore $p(\lambda)$.

E23.e.4 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^n, sia $\theta \in \mathbb{C}$ costante e sia $g(x) = e^{\theta x} f(x)$. Mostrate che, se p è un polinomio e $q(x) = p(x + \theta)$, allora [1SF]

$$p(D)g = e^{\theta x}[q(D)f] \quad .$$

Notate che possiamo scrivere la relazione anche come un "coniugio"

$$e^{-\theta x}\big[p(D)[e^{\theta x} f]\big] = p(D + \theta)f \; .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SG']

E23.e.5 Prerequisiti: 23.e.4. Dati $\theta \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$, posto $p(x) = (x - \theta)^k$, mostrate che $p(D)f = 0$ se e solo se $f(x) = e^{\theta x} r(x)$ con r polinomio di grado al più $k - 1$. [1SH]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SJ']

E23.e.6 Prerequisiti: 16.1, 23.e.4. [1SK]

Siano dati $\theta, \tau \in \mathbb{C}$ con $\theta \neq \tau$, $q(x)$ un polinomio, e $k \in \mathbb{N}$; poniamo $p(x) = (x-\theta)^k$. Mostrate che

$$p(D)f(x) = e^{\tau x} q(x)$$

se e solo se

$$f(x) = e^{\theta x} r(x) + e^{\tau x} \tilde{q}(x) \; ,$$

con r polinomio di grado al più $k - 1$ e $\tilde{q}$ polinomio dello stesso grado di q.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SM']

E23.e.7 Dati $a_0 \dots a_n \in \mathbb{C}$ costanti, con $a_n \neq 0$, e posto $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$, descrivete tutte le possibili soluzioni f di [1SN]

$$p(D)f = 0 .$$

Mostrate che lo spazio delle soluzioni è uno spazio vettoriale (basato sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi) di dimensione n.

(Sugg. fattorizzate il polinomio e sfruttate gli esercizi precedenti.).

E23.e.8 `Prerequisiti:23.e.7.`Con p come sopra, analizzate inoltre il problema [1SP]

$$p(D)f = e^{\alpha x}$$

(con $\alpha \in \mathbb{C}$ costante).

Cosa succede quando α si avvicina a una radice del polinomio p?

[UNACCESSIBLE UUID '1SQ']Dati i parametri $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$, e anche $\alpha \in \mathbb{C}$, la soluzione del problema di Cauchy [1SR]

$$\begin{cases} p(D)f = e^{\alpha x} \\ f(0) = y_0, \\ \dots \\ f^{n-1}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

esiste per tutti i tempi, e dipende con continuità dai parametri $\alpha, y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$.

E23.e.9 Data $h = h(x)$, e $\theta \in \mathbb{R}$, risolvete le equazioni differenziali [1SS]

$$(D - \theta)f(x) = h(x)$$

$$(D - \theta)^2 f(x) = h(x)$$

$$(D^2 + \theta^2)f(x) = h(x)$$

$$(D^2 - \theta^2)f(x) = h(x)$$

e i casi particolari

$$(D - 1)f(x) = x^k$$

$$(D - \theta)f(x) = e^{\alpha x}$$

(con $\alpha \in \mathbb{C}$, e $k \in \mathbb{N}$, costanti).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1SV']*

§23.f Equazioni matriciali

Per risolvere i seguenti esercizi bisogna conoscere le proprietà elementari dell'esponenziale di matrici, si veda in sezione §19.c.

Esercizi

E23.f.1 Prerequisiti:19.c.6,19.c.5, Sezione §19.c. [1SW]

Date $A, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ funzioni continue a valori matrici, risolvete l'equazione differenziale

$$X' = AX + F \quad , X(0) = C \quad ,$$

dove $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$.

(Sugg.: usate il metodo di variazione delle costanti: sostituite $Y(t) = \exp(-tA)X(t)$)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SX']

E23.f.2 Prerequisiti:19.c.6,19.c.5, Sez. §19.c.Difficoltà:*. [1SY]

Date matrici $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, risolvete l'equazione differenziale

$$X' = AX + XB \quad , X(0) = C \quad ,$$

dove $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SZ']

E23.f.3 Prerequisiti:12.c.3,12.e.5.Difficoltà:*. [1T1]

Sia $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ lo spazio delle matrici, lo dotiamo di una norma $\|C\|_V$ submoltiplicativa. Sia $C \in V$ e siano $A, B : \mathbb{R} \to V$ curve continue nello spazio delle matrici.

- Definite ricorsivamente $Q_0 = C$, e

  $$Q_{n+1}(s) = \int_0^s A(\tau)Q_n(\tau)B(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad ;$$

  mostrate che la serie

  $$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t)$$

  è ben definita, mostrando che, per ogni $T > 0$, converge totalmente nello spazio delle funzioni continue $C^0 = C^0([-T, T] \to V)$, dotato della norma

  $$\|Q\|_{C^0} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|t|\le T} \|Q(t)\|_V \quad .$$

- Mostrate che la funzione appena definita è la soluzione dell'equazione differenziale

  $$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t)B(t) \quad , \quad Y(0) = C \quad .$$

- Nel caso in A, B siano costanti, notate che

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{A^n C B^n}{n!} \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1T2']

E23.f.4 Prerequisiti:23.f.3,23.f.4.Note:*Identità di Abel*. [1T3]

Siano date $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ continua, e la soluzione $Y(t)$ dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} Y(t) = A(t)Y(t) \quad , \quad Y(0) = C$$

(che è stata studiata in 23.f.3). Posto $a(t) = \mathrm{tr}(A(t))$, mostrate che

$$\det(Y(t)) = \det(C) e^{\int_0^t a(\tau)\, \mathrm{d}\tau} \quad .$$

Se C è invertibile se ne deduce che $Y(t)$ è sempre invertibile.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1T4']

E23.f.5 Prerequisiti:19.c.6,19.c.5,23.f.3. [1T6]

Siano date $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $F, A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ continue, e la soluzione $Y(t)$ della equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} Y(t) = A(t)Y(t) \quad , \quad Y(0) = \mathrm{Id} \ .$$

Risolvete la equazione

$$X' = AX + F \ , X(0) = C \ ,$$

dove $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, usando $Y(t)$ come funzione ausiliaria.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1T7']

§24 (pseudo)compit(in)i [1T8]

Esercizi

E24.1 Note:*rielaborato dal compito 26 Gennaio 2016.* [1T9]

Sia $(q_n)_{n\geq 1}$ una enumerazione dei razionali di $(0,1)$ e definiamo

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n:q_n<t} 2^{-n}$$

e

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n:q_n\leq t} 2^{-n}$$

per $t \in (0,1)$.

- Mostrate che f, g sono strettamente crescenti.
- Calcolate i limiti per $t \downarrow 0$ e $t \uparrow 1$.
- Mostrate che f è continua a sinistra, g è continua a destra, e che

$$\lim_{\tau\to t+} f(\tau) = g(t) \quad , \quad \lim_{\tau\to t-} g(\tau) = f(t) \quad .$$

- Mostrate inoltre che f è discontinua in t se e solo se $t \in \mathbb{Q}\cap(0,1)$; e similmente per g.
- Cosa cambia se sostituiamo 2^{-n} con il termine a_n di una serie assolutamente convergente?

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1TB'][UNACCESSIBLE UUID '1TC']*

E24.2 Prerequisiti:14.a.9.Note:*compito 23 giugno 2012.* [1TD]

Sia f una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}$, con $f(0) \neq 0$. Si dimostri che esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che i due vettori

$$v = (x, f(x)) \quad , \quad w = (-f'(x), 1)$$

siano linearmente dipendenti. (Notate che il vettore w è ortogonale al tangente al grafico di f.) Si discuta la possibilità che questa condizione sia verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1TF']*

E24.3 Note:*riadattati dal compitino 9 apr 2011.* [1TG]

Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty \quad .$$

- Fissato $a < f(0)$ sia M_a l'insieme degli $m \in \mathbb{R}$ tali che la retta $y = mx + a$ intersechi il grafico $y = f(x)$ della funzione f in almeno un punto: si mostri che M_a ammette minimo $\hat{m} = \hat{m}(a)$;
- si mostri che $\hat{m}$ dipende in modo continuo da a, [†120]
- e che $\hat{m}(a)$ è monotona strettamente decrescente.

[†120] Suggerimento: ripensate all'esercizio 14.a.9.

- Se f è derivabile, si mostri che la retta $y = \hat{m}(a)x + a$ è tangente al grafico in tutti i punti in cui lo incontra.
- Supponiamo ulteriormente che f sia di classe C^2 e che $f''(x) > 0 \forall x > 0$ †121. Si mostri che vi è un unico punto x in cui la retta $y = \hat{m}(a)x + a$ incontra il grafico $y = f(x)$; lo chiamiamo $\hat{x} = \hat{x}(a)$;
- e mostrate che le funzioni $a \mapsto \hat{x}(a)$ e $a \mapsto \hat{m}(a)$ sono derivabili.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1TH']*

E24.4 `Argomenti:cerchio osculatore.` `Note:`*riadattati dal compitino 9 apr 2011.* [1TJ]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in 0, con $f(0) = 0$ e $f''(0) \neq 0$. Si dimostri che esistono unici un punto $P = (a, b)$ nel piano e una costante $r > 0$, tali che

$$d\big(P, (x, f(x))\big) = r + o(x^2),$$

determinando a, b, r in funzione di $f'(0), f''(0)$. Si intende che $d(P, Q)$ è la distanza euclidea fra due punti P, Q nel piano.

Sugg. per chiarirvi le idee, provate innanzitutto il caso in cui anche $f'(0) = 0$.

(Il grafico della funzione f è una curva nel piano; per ipotesi questa curva passa per l'origine; in questo esercizio abbiamo determinato il cerchio, di raggio r e centro P, che meglio approssima la curva nelle vicinanze dell'origine: questo cerchio è detto "cerchio osculatore", e il suo raggio si chiama "raggio di curvatura", e l'inverso del raggio è la "curvatura" della curva nell'origine.)

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1TK'][UNACCESSIBLE UUID '1TM']*

E24.5 `Note:`*Esercizio 2, Compito 4 Aprile 2009.* [1TN]

- Si verifichi che per ogni $t > 1$ l'equazione

  $$\sin x = x^t$$

  ammette una e una sola soluzione $x > 0$.
- Chiamata $f(t)$ tale soluzione, si determini l'immagine della funzione t e si dimostri che è strettamente crescente e continua su $(1, +\infty)$.
- Si dimostri che f si prolunga per continuità a $t = 1$ e si discuta l'esistenza della derivata destra della funzione prolungata in tale punto.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1TP']*

E24.6 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\cos(f(x))$ è derivabile: se ne può dedurre che f è derivabile? *Se è vero, dimostratelo; se non è vero, producete un esempio.* [1TS]

E24.7 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f > 0$ e tale che $\log(f(x))$ è convessa: se ne può dedurre che f è convessa? *Se è vero, dimostratelo; se non è vero, producete un esempio.* [1TT]

E24.8 Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, con $g > 0$: mostrate che f/g è di classe C^∞. [1TV]

E24.9 Sia $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ con raggio di convergenza $\rho > 0$, e sia $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$; si mostri che la funzione $g(x) = f(x)/x^n$ è estendibile a $x = 0$; si mostri (l'estensione di) g coincide con una opportuna serie di potenze $g(x) = \sum_{n=0}^\infty b_n x^n$. Cosa si può dire del raggio di convergenza di g? [1TW]

E24.10 Note:*Criterio di Dirichlet per gli integrali.* [1TX]

Siano $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continue, e inoltre f positiva e monotona decrescente con $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, mentre

$$\sup_{x>0} \left| \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \right| < \infty \quad .$$

Dimostrate allora che

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

converge.

E24.11 Note:*compitino 12/1/2013.* [1TY]

Dato un sottoinsieme E di $\mathbb{N}$ e un intero $n \in \mathbb{N}$, l'espressione

$$\frac{\mathrm{card}(E \cap \{0, 1, ..., n\})}{n + 1}$$

indica quale frazione del segmento $\{0, 1, ..., n\}$ è contenuta in E. La nozione di "densità" in $\mathbb{N}$ di E è riferita al comportamento di tali frazioni al tendere di n all'infinito. Precisamente, si definiscono la densità superiore $\overline{d}(E)$ di E e la sua densità inferiore $\underline{d}(E)$ come

$$\overline{d}(E) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathrm{card}(E \cap \{0, 1, \ldots, n\})}{n + 1} \quad ,$$

$$\underline{d}(E) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathrm{card}(E \cap \{0, 1, \ldots, n\})}{n + 1} \quad .$$

Se $\overline{d}(E) = \underline{d}(E) = d \in [0, 1]$, si dice che E ha densità d. (Si veda anche [59].)

1. Si dimostri che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1$, l'insieme $E_\alpha = [n\alpha] : n \in N$ ha densità $d = 1/\alpha$ (il simbolo $[x]$ indica la parte intera di $x \in R$).
2. Sia $E = \{m_0, m_1, \ldots, m_k, \ldots\}$ un insieme infinito, con $m_0 < m_1 < \ldots < m_k < \ldots$. Si dimostri che $\overline{d}(E) = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{m_k}$ e $\underline{d}(E) = \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{m_k}$.
3. Si trovi un insieme E con $\overline{d}(E) = \overline{d}(\mathbb{N} \setminus E) = 1$.

E24.12 Note:*esercizio 6 nel compito del 13/1/2011.* [1TZ]

Ogni numero intero $n \geq 1$ si decompone in modo unico come $n = 2^k d$, con $k \in N$ e d intero dispari. Si consideri la successione $a_n = d/2^k$ e se ne determinino

1. limite superiore e inferiore;
2. l'insieme dei punti limite.

E24.13 Argomenti:matrice, determinante. Note:*esercizio 4 nello pseudocompitino del 14/3/2013.* [1V0]

1. Sia $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ una matrice 2 per 2; identificando $\mathbb{R}^{2\times2}$ con $\mathbb{R}^4$, si calcoli il gradiente del determinante e si verifichi che è nonnullo se e solo se la matrice è non nulla.

†121 Usate l'esercizio 24.2 precedente!

2. Sia Z l'insieme delle matrici $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con determinante nullo; mostrate che è un chiuso con parte interna vuota.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1V1']*

E24.14 `Argomenti:matrice,determinante.Difficoltà:*.` [1V2]

Dimostrate la formula di Jacobi:

$$\frac{d}{da_{i,j}}\det(A) = C_{i,j} \quad ,$$

dove $a_{i,j}$ è l'elemento di A in riga i e colonna j, e C è la matrice dei cofattori di A, che è la trasposta della matrice aggiunta $\mathrm{adj}(A)$. Conseguentemente, se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ è differenziabile, allora

$$\frac{d}{dt}\det F(t) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{adj}(F(t))\,\frac{dF(t)}{dt}\right)$$

dove $\mathrm{tr}(X)$ è la traccia di X.

Sugg. usate lo sviluppo di Laplace per il determinante.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1V3']*

E24.15 `Argomenti:matrice,determinante.Prerequisiti:24.14.Difficoltà:*.` [1V4]

Vogliamo generalizzare i risultati del precedente esercizio 24.13 al caso di matrici $n \times n$.

Ricordiamo le seguenti proprietà del determinante delle matrici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Il rango è la dimensione dell'immagine di A (vista come applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$) ed è anche il massimo numero di colonne linearmente indipendenti in A.
- A ha rango n se e solo $\det(A) \neq 0$.
- Se si scambiano due colonne in A, il determinante cambia di segno;
- se si somma a una colonna un multiplo di un altra colonna il determinante non cambia.
- La caratterizzazione del rango tramite i minori, *«Il rango di A è pari al massimo ordine di un minore invertibile di A»*.
- lo sviluppo di Laplace del determinante, e la formula di Jacobi (*cf* 24.14).
- Il determinante di A è uguale al determinante della trasposta; dunque ogni risultato precedente vale se si legge "riga" invece di "colonna".

Si vedano anche [62, 55].

Mostrate i seguenti risultati.

1. Mostrate che il gradiente della funzione $\det(A)$ è nonnullo se e solo se il rango di A è almeno $n-1$.
2. Sia Z l'insieme delle matrici $\mathbb{R}^{n\times n}$ con determinante nullo; mostrate che è un chiuso con parte interna vuota.

3. Sia B una matrice fissata di rango al più $n-2$, mostrate che la tesi del teorema è falsa negli intorni U_B della matrice B, nel senso che $Z \cap U_B$ non è contenuto in una superfice[†122].

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1V6']

E24.16 Si mostri la disuguaglianza di Young: dati $a,b>0$, $p,q>1$ tali che $1/p+1/q=1$ allora [1V7]

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (24.17)$$

con uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$; usando un opportuno studio di funzione.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1V8']

Si veda anche 15.d.3.

E24.18 Determinare fra i triangoli iscritti nel cerchio unitario quello di area massima. [1Q6]

§24.a Equazioni funzionali

Esercizi

E24.a.1 Note:*esercizio 1, compito 7 Giugno 2010.* [1V9]

Si dimostri che esiste una e una sola funzione continua f sull'intervallo $[-1,1]$ tale che

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} f\big(x^2\big) \quad \forall x \in [-1,1] \quad .$$

Si dimostri che f è rappresentabile come serie di potenze centrata in zero; e che il raggio di convergenza è uno.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1VB']

E24.a.2 Difficoltà:*.Note:*esercizio 3, compito 30 Giugno 2017.* [1VC]

Si consideri il problema (non di Cauchy)

$$\begin{cases} y'(x) = y(x^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Si dimostri che per ogni $r<1$ esiste un'unica soluzione definita su $I=(-r,r)$ e si deduca che lo stesso vale per $r=1$.
- Si dimostri che la soluzione è rappresentabile come somma di una serie di potenze centrata in 0 e convergente sull'intervallo $[-1,1]$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1VD']

E24.a.3 Note:*esercizio 3 compito 23 Giugno 2012.* [1VF]

Si dimostri che esiste una e una sola funzione f continua sull'intervallo $[0,1]$ che soddisfi la condizione

$$f(x) = \sin(x) + \int_0^1 \frac{f(t)}{x^2+t^2+1}\, \mathrm{d}t \quad \forall x \in [0,1] \quad .$$

E24.a.4 Note:*esercizio 4 compito 23 Giugno 2012.* [1VG]

Una funzione $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$, analitica in un intorno di 0, soddisfa sul suo dominio le condizioni

$$\begin{cases} f'(x) = 1 + f(-x) \\ f(0) = c \end{cases} \quad ;$$

(si noti che questo non è un problema di Cauchy!).

- Si determini f.
- Si dimostri che la funzione trovata è l'unica soluzione, nell'insieme delle funzioni derivabili in un intorno di 0.

E24.a.5 [1VH]

- Mostrate che esiste una unica funzione $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ continua che soddisfa

$$f(x) = x \cos(f(x)) \ .$$

- Fissati a, b mostrate che esistono un numero finito di $f : (-a, b) \to \mathbb{R}$ continue soddisfacenti

$$f(x) = x \cos(f(x)) \ \ \forall x \in (a, b).$$

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1VJ']*

§24.b Campi vettoriali [1PW]

Esercizi

E24.b.1 Note:*esercizio 4, compito 20 Giugno 2017.* [1PX]

Sia F un campo vettoriale continuo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tale che, per ogni $x \neq 0$, $F(x)$ è un multiplo scalare di x. Per $r > 0$, indichiamo con S_r la sfera di raggio r centrata in 0.

- Si dimostri che, per ogni arco regolare γ con sostegno contenuto in una sfera S_r , si ha $\int_\gamma F = 0$.
- Si dimostri che, se un tale campo F è conservativo, allora $|F(x)|$ è costante su ogni sfera S_r, e dunque che $F(x) = x\rho(|x|)$ con $\rho : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continua.

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1PY']*

†122 Non vi scervellate, è più facile di quello che sembra… ci sono troppe matrici con determinante nullo vicino a B…

UUID

Indice analitico

Elenco delle figure

Riferimenti bibliografici

[1] M. Abate and F. Tovena. *Curves and Surfaces*. UNITEXT. Springer Milan, 2012. ISBN 9788847019416. *DOI: 10.1007/978-88-470-1941-6*. URL https://books.google.it/books?id=iwGjNhpkSeQC. †111

[2] Emilio Acerbi, Luciano Modica, and Sergio Spagnolo. *Problemi scelti di Analisi Matematica II*. Liguori Editore, 1986. ISBN 88-207-1484-1. †118

[3] L. Ambrosio, C. Mantegazza, and F. Ricci. *Complementi di matematica*. Scuola Normale Superiore, 2021. ISBN 9788876426933. URL https://books.google.it/books?id=1QR0zgEACAAJ. §1, 3.b.3, §3.b.b, §3.b.c, 3.c.5, †27, †30, §3.h.b, 3.j.2, §3.j, †42, †45, †46, 6.7, §6.c, 7.a.16, 7.a.17, 7.d.4, †58, 8.e.1, 8.e.6, 8.e.14, 8.e.15, 8.e.17, 8.g.2, †65, †68, †70, 10.f.1, §10.n, 17.a.10, §17.d, §18, §19, §20, 20.7, §21, §21, †111, 22.1, §23, §23.c

[4] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison - Wesley, 1974. 16.20, 17.b.9

[5] T.M. Apostol. *Calculus, Volume 1*. Wiley, 1991. ISBN 9780471000051. URL https://books.google.it/books?id=o2D4DwAAQBAJ. §14.a, §16, §17, §18, §19

[6] John L. Bell. The Axiom of Choice. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter 2021 edition, 2021. 3.j.45

[7] Andreas Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. In *Axiomatic set theory (Boulder, Colo., 1983)*, volume 31 of *Contemp. Math.*, pages 31–33. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984. 3.b.47

[8] H. Cartan. *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013. ISBN 9780486318677. URL https://books.google.it/books?id=xUHDAgAAQBAJ. †107

[9] Mariano Giaquinta and Giuseppe Modica. *Analisi Matematica 1. Funzioni di una variabile*. Pitagora Editrice Bologna, 1999. ISBN 9788837110499. †96

[10] P.R. Halmos. *Naive Set Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN 9781475716450. URL https://books.google.it/books?id=jV_aBwAAQBAJ. 3.b.16

[11] H. Herrlich. *Axiom of Choice*. Axiom of Choice. Springer, 2006. ISBN 9783540309895. URL https://books.google.it/books?id=JXIiGGmq4ZAC. †22, 3.j.39

[12] D. Hilbert, E.J. Townsend, and E. Jerome. *The Foundations of Geometry*. Project Gutenberg. Project Gutenberg., 2004. URL https://www.gutenberg.org/ebooks/17384. §9.a, §9.a

[13] P.G. Hinman. *Fundamentals of Mathematical Logic*. Taylor & Francis, 2005. ISBN 9781568812625. URL https://books.google.it/books?id=xA6D8o72qAgC. §3.a, †10, 3.a.25, 3.b.16, †18, †22, 3.c.5, §3.h.b, 3.j.27

[14] T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN 9783540447610. URL https://books.google.it/books?id=CZb-CAAAQBAJ. 3.b.3, §3.b.b, †22, †29, §3.h.b

[15] J.L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1975. ISBN 9780387901251. URL https://books.google.it/books?id=-goleb9Ov3oC. 3.d.17, 3.d.32, †39, 7.d.3, §8, 8.e.6, †68

[16] Steven G. Krantz. *The Axiom of Choice*, pages 121–126. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002. ISBN 978-1-4612-0115-1. *DOI: 10.1007/978-1-4612-0115-1_9*. †24

[17] Azriel Levy. The independence of various definitions of finiteness. *Fundamenta Mathematicae*, 46:1–13, 1958. *DOI: 10.4064/fm-46-1-1-13*. URL https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118218255. †33

[18] G. H. Meisters. Polygons have ears. *The American Mathematical Monthly*, 82(6):648–651, 1975. ISSN 00029890, 19300972. *DOI: 10.2307/2319703*. 9.a.8

[19] Jan Mycielski. A system of axioms of set theory for the rationalists. volume 53, pages 206–213, 2006. URL https://www.ams.org/journals/notices/200602/200602FullIssue.pdf. 3.j.45

[20] Livio C. Piccinini, Giovanni Vidossich, and Guido Stampacchia. *Equazioni differenziali ordinarie in R^N (problemi e metodi)*. Liguori Editore, 1978. §23, 23.d.5

[21] ______. *Ordinary Differential Equations in Rn*. Springer, 1984. ISBN 978-0-387-90723-9. *DOI: 10.1007/978-1-4612-5188-0*. §23

[22] H. Rubin and J.E. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice, II*. ISSN. Elsevier Science, 1985. ISBN 9780080887654. URL https://books.google.it/books?id=LSsbBU9FesQC. 3.b.47, 3.j.20, 3.j.45

[23] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw–Hill, New York, 3rd edition, 1964. †41, †42, †43, †44, †45, 6.7, 7.a.19, 7.c.22, §8, 8.e.1, §9.b, §14.a, §16, §17, §18, §19, §20, †112

[24] Alfred Tajtelbaum-Tarski. Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix. *Fundamenta Mathematicae*, 5(1):147–154, 1924. 3.j.45

[25] A. E. Taylor. L'hospital's rule. *The American Mathematical Monthly*, 59(1):20–24, 1952. ISSN 00029890, 19300972. URL http://www.jstor.org/stable/2307183. §17

[26] Gerald Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140. American Mathematical Soc., 2012. ISBN 978-0-8218-8328-0. URL http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/index.html. (Freely available on the author's website). §23, 23.a.1

[27] Helge Tverberg. A proof of the jordan curve theorem. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 12(1):34–38, 1980. *DOI: 10.1112/blms/12.1.34*. §9.a, §9.a

[28] Wikipedia. Preordine — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2015. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Preordine&oldid=74440486. [Online; in data 1-dicembre-2022]. 3.g.3

[29] ______. Mathematical morphology — Wikipedia, the free encyclopedia, 2016. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mathematical_morphology&oldid=714099245. [Online; accessed 24-July-2016]. §12.g

[30] ______. Tautologia — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Tautologia&oldid=81165325. [Online; in data 29-luglio-2016]. †10

[31] ______. Teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. URL https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoria_degli_insiemi_di_Zermelo-Fraenkel&oldid=82731028. [Online; in data 19-ottobre-2016]. 3.b.16

[32] ______. Teoria ingenua degli insiemi — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. URL https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoria_ingenua_degli_insiemi&oldid=82742337. [Online; in data 18-ottobre-2016]. 3.b.16

[33] ______. Strictly convex space — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Strictly_convex_space&oldid=861198993. [Online; accessed 15-maggio-2023]. †85

[34] ______. Insieme diretto — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2019. URL https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Insieme_diretto&oldid=102088385. [Online; in data 25-novembre-2022]. 3.d.17, 3.d.32

[35] ______. Rete (matematica) — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2019. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Rete_(matematica)&oldid=105548311. [Online; in data 14-dicembre-2022]. 7.d.3

[36] ______. Spazio di Baire — wikipedia, l'enciclopedia libera, 2020. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Spazio_di_Baire&oldid=112747513. [Online; in data 3-maggio-2023]. †82

[37] ______. Teorema di Hurwitz (teoria dei numeri) — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2020. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Hurwitz_(teoria_dei_numeri)&oldid=110293279. [Online; in data 30-novembre-2022]. 6.f.6

[38] ______. Dominio d'integrità — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2021. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Dominio_d'integrità&oldid=118873859. [Online; in data 16-novembre-2022]. 5.13

[39] ______. Identità di Bézout — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2021. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Identità_di_Bézout&oldid=121969472. [Online; in data 30-novembre-2022]. 6.f.5

[40] ______. Ordered ring — Wikipedia, the free encyclopedia, 2021. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ordered_ring&oldid=1035305291. [Online; accessed 16-November-2022]. 5.6

[41] ______. Teorema di Heine-Borel — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2021. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Heine-Borel&oldid=124237381. [Online; in data 7-agosto-2023]. §10.j, 10.j.2

[42] ______. Two ears theorem — Wikipedia, the free encyclopedia, 2021. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Two_ears_theorem&oldid=1024888322. [Online; accessed 13-novembre-2022]. 9.a.8

[43] ______. Accumulation point — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Accumulation_point&oldid=1097360512. [Online; accessed 29-dicembre-2022]. †60

[44] ______. Base (topologia) — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2022. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Base_(topologia)&oldid=130588263. [Online; in data 8-agosto-2023]. †68

[45] ______. Cantor's intersection theorem — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cantor's_intersection_theorem&oldid=1127277305. [Online; accessed 28-giugno-2023]. 6.c.13

[46] ______. Derivazione delle funzioni iperboliche — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2022. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Derivazione_delle_funzioni_iperboliche&oldid=128089918. [Online; in data 23-luglio-2023]. †109

[47] ______. Hurwitz's theorem (composition algebras) — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hurwitz's_theorem_(composition_algebras)&oldid=1092800573. [Online; accessed 14-novembre-2022]. 5.5

[48] ______. Resultant — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Resultant&oldid=1105451284. [Online; accessed 1-dicembre-2022]. 6.g.7

[49] ______. Topologist's sine curve — wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Topologist_s_sine_curve&oldid=1116036369. [Online; accessed 24-aprile-2023]. 10.e.4

[50] ______. Axiom of choice — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Axiom_of_choice&oldid=1173520442. [Online; accessed 28-September-2023]. †25

[51] ______. Baker–Campbell–Hausdorff formula — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Baker-Campbell-Hausdorff_formula&oldid=1168221703. [Online; accessed 7-agosto-2023]. 19.c.10

[52] ———. Big O notation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Big_O_notation&oldid=1161509085. [Online; accessed 24-giugno-2023]. 17.b.1

[53] ———. Cantor set — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cantor_set&oldid=1166344861. [Online; accessed 10-agosto-2023]. §9.b

[54] ———. Curva di Koch — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Curva_di_Koch&oldid=131755745. [Online; in data 4-maggio-2023]. 11.21

[55] ———. Determinant — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Determinant&oldid=1169031704. [Online; accessed 10-agosto-2023]. 24.15

[56] ———. Faà di Bruno's formula — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Faa_di_Bruno_s_formula&oldid=1160739646. [Online; accessed 19-giugno-2023]. 17.a.3

[57] ———. Hermite interpolation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hermite_interpolation&oldid=1131496413. [Online; accessed 2-luglio-2023]. 17.a.13

[58] ———. Mazur–Ulam theorem — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mazur-Ulam_theorem&oldid=1169902092. [Online; accessed 29-August-2023]. §12.b

[59] ———. Natural density — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Natural_density&oldid=1152033872. [Online; accessed 7-agosto-2023]. 24.11

[60] ———. Poligono — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Poligono&oldid=134370006. [Online; in data 10-agosto-2023]. †73

[61] ———. Punto di discontinuità — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Punto_di_discontinuita&oldid=132026126. [Online; in data 18-maggio-2023]. 14.a.3, 14.a.4

[62] ———. Rank (linear algebra) — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rank_(linear_algebra)&oldid=1142781860. [Online; accessed 10-agosto-2023]. 24.15

[63] ———. Regola del prodotto — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Regola_del_prodotto&oldid=133241954. [Online; in data 19-giugno-2023]. 17.a.2

[64] ———. Regola di De l'Hôpital — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Regola_di_de_l'Hopital&oldid=134135629. [Online; in data 16-settembre-2023]. §17

[65] ———. Teorema di Lagrange — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Lagrange&oldid=133646261. [Online; in data 16-settembre-2023]. §17

[66] ———. Teorema di Taylor — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Taylor&oldid=132628671. [Online; in data 16-settembre-2023]. §17

[67] ———. Valutazione p-adica — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Valutazione_p-adica&oldid=131981334. [Online; in data 3-maggio-2023]. 10.n.3

[68] Laurent Younes, Peter W. Michor, Jayant Shah, and David Mumford. A metric on shape space with explicit geodesics. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 19(1):25–57, 2008. ISSN 1120-6330. *DOI: 10.4171/RLM/506*. 21.10

Indice