

**Database di Esercizi**  
per il corso di Matematica al I anno  
della Scuola Normale Superiore

**Andrea C. G. Mennucci**

(versione 24 marzo 2026)

Pisa, Italia

*Raccolta di esercizi e elementi di teoria proposti nelle esercitazioni del corso interno  
di Matematica rivolto agli allievi del I anno della Scuola Normale Superiore.*

---

## Introduzione

[100]

La Scuola Normale Superiore è un prestigioso istituto universitario a ordinamento speciale che accoglie studenti in due percorsi distinti: il *corso ordinario*, parallelo ai corsi di laurea triennale e magistrale, e il *corso di perfezionamento*, noto anche come PhD.

Durante l'anno accademico gli studenti "normalisti" del corso ordinario devono seguire, oltre ai corsi universitari regolari presso l'Università di Pisa, alcuni "corsi interni". Gli studenti normalisti iscritti al primo anno di laurea in materie scientifiche come Matematica, Fisica, Chimica e Biologia, seguono un corso interno annuale di Matematica che mira ad approfondire e ampliare le nozioni tradizionalmente incluse nei programmi dei corsi universitari, che i normalisti seguono in parallelo.

Negli ultimi quindici anni questo corso ha incluso una serie di argomenti fondamentali. Inizia con un approfondimento dei fondamenti della Matematica, compreso l'uso degli assiomi di Zermelo-Fraenkel per la teoria degli insiemi, la costruzione degli insiemi numerici e la caratterizzazione dei numeri reali  $\mathbb{R}$  come campo ordinato completo. Prosegue con argomenti come serie e successioni, spazi metrici e topologia, calcolo differenziale ed equazioni differenziali ordinarie.

In questi anni sono stati titolari del corso i professori Giuseppe Da Prato, Fulvio Ricci, Luigi Ambrosio e Franco Flandoli. Alle esercitazioni, hanno collaborato, oltre all'autore del presente volume, Francesco Bonsante, Carlo Mantegazza, Simone Di Marino, Tommaso Pacini, Luciano Mari, Lorenzo Mazzieri, Andreas Hochenegger, Andrea Ferraguti, Alessandra Caraceni.

Gli appunti di questo corso sono stati pubblicati in [3].

L'autore ha collaborato alla parte delle "esercitazioni" (ora chiamata "didattica integrativa") per oltre dieci anni, accumulando una vasta quantità di materiale teorico e di esercizi, che vengono ora presentati in questo volume.

Come già per il testo [3], così anche questo volume non è completamente autonomo, poiché è pensato come un complemento ai corsi universitari standard del primo anno. Tuttavia, la prima parte costituisce un'eccezione, poiché i corsi che coprono gli argomenti dei fondamenti di logica di solito non sono offerti nel primo anno, e i testi spesso utilizzati in questi corsi non sono di facile accesso per gli studenti di primo anno. Pertanto, i capitoli 3 e 4 sono stati ampliati per includere gli elementi teorici necessari, spesso presentati sotto forma di esercizi. D'altra parte, a partire dal Capitolo 5, sono fornite referenze utili e/o necessarie per affrontare gli esercizi, oltre a definizioni e lemmi.

Va notato che la numerazione nel volume segue un metodo specifico: le sezioni (e sottosezioni), le note a piè di pagina e le figure sono numerate in modo indipendente, mentre tutto il resto del materiale nel volume segue una numerazione unica, divisa per sezioni. Ciò include teoremi, proposizioni, lemmi, equazioni, e altro ancora. Le diverse numerazioni sono rese distinguibili dall'uso di numeri romani o arabi e/o da appositi simboli, quale § per le sezioni e † per le note.

## ColDoc

[2G2]

L'autore ha creato un pacchetto software denominato **ColDoc** (liberamente disponibile) che semplifica la gestione di documenti  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  complessi e ne permette la fruizione *online*. È utilizzabile sia da computer che da tablet e smartphone.

La versione ColDoc di questo testo è accessibile all'indirizzo <https://coldoc.sns.it/CD/EDB>; questo portale fu inizialmente creato per facilitare l'interazione con

---

gli studenti nell'anno della pandemia Covid. Il software Co1Doc è stato migliorato negli anni, ed è adesso un robusto sistema di *document management*.

Il sistema Co1Doc ha diviso il testo in piccoli elementi, ciascuno identificato da un codice UUID. Il codice UUID identifica permanentemente un oggetto; laddove il numero assegnato dal sistema L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X potrebbe cambiare se altro materiale venisse aggiunto prima di questo oggetto (ad esempio, in una futura nuova edizione). Il codice UUID può essere dunque usato per riferimenti bibliografici, come anche per appuntarsi un elemento di interesse e condividerlo con un collega o uno studente, in quanto il codice UUID si può usare per ritrovare l'elemento nell'interfaccia *web*. Per esempio, questa introduzione sarà ritrovabile all'indirizzo <https://coldoc.sns.it/UUID/EDB/2G1>.

Il sistema Co1Doc implementa inoltre un sistema per gestire documenti L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X multilingua: questo testo per esempio è disponibile in Inglese e in Italiano.

## Copyright

[009]

Questo testo è Copyright: Andrea C. G. Mennucci, 2012-2024.

Le sezioni di teoria (definizioni, teoremi, e simili; e enunciati di esercizi) sono rilasciate con licenza: [Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License \(WP:CC BY-SA\)](#).

I diritti sulle soluzioni degli esercizi (in appendice) sono riservati. L'autore mantiene diritti esclusivi su queste, ai sensi della normativa vigente.

---

## §1 Notazioni

[00B]

- $\mathbb{N}$  sono i numeri naturali, incluso lo zero.
- $\mathbb{Z}$  sono i numeri interi.
- $\mathbb{Q}$  sono i numeri razionali.
- $\mathbb{R}$  è la retta reale.
- $\mathbb{C}$  sono i numeri complessi.

Un'elenco di simboli si trova inoltre all'inizio dell'indice analitico.

**Nota 1.1.** I simboli  $\wedge$  e  $\vee$  possono essere utilizzati in due contesti diversi, dove assumono significati diversi. [2DM]

- Se  $x, y \in \mathbb{R}$  sono numeri reali, allora  $x \wedge y$  è il minimo dei due numeri, mentre  $x \vee y$  è il massimo dei due numeri. Questa interpretazione è appropriata anche quando  $x, y$  sono in un insieme totalmente ordinato.<sup>†1</sup>
- In logica matematica,  $\wedge$  è la congiunzione e  $\vee$  è la disgiunzione. Vedi 2.4.

**Nota 1.2.** I simboli  $()$  usati per le parentesi sono purtroppo sovraccarichi di significati nel linguaggio matematico comune. [2FG]

- Sono usati per raggruppare operazioni algebriche, per indurre un diverso ordine di operazioni (rispetto alle regole standard di precedenza). Ad esempio, per  $x, y \in \mathbb{R}$ ,<sup>†2</sup> l'espressione  $x(y + 2)$  è identica a  $xy + 2x$  e non a  $xy + 2$ .
- Sono usati per indicare argomenti di funzioni. Ad esempio l'espressione  $f(x + y)$  dovrebbe essere letta come  $fx + fy$ , se  $f, x, y \in \mathbb{R}$ <sup>†3</sup>; mentre, se  $f$  è una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow B$ , allora  $f(x + y)$  è il risultato  $f(z)$  ottenuto valutando  $f$  sull'elemento  $z = x + y$ .

Per distinguere questi due usi, può essere sufficiente aggiungere un simbolo esplicito per indicare la "moltiplicazione", ad esempio scrivere  $f * (x + y)$  quando dovrebbe essere letto come  $f * x + f * y$ . (Alcuni autori scrivono anche  $f.(x + y)$  con un "punto")

- Sono usati per definire intervalli, ad esempio,  $(1, \pi)$  può essere l'abbreviazione di: «l'insieme dei numeri reali maggiori di 1 e minori di  $\pi$ ;» cioè

$$(1, \pi) = \{t \in \mathbb{R} : 1 < t < \pi\};$$

questo si estende agli insiemi ordinati, si veda Sez. §2.d.d.

- Sono usati per rappresentare elementi del prodotto cartesiano; ad esempio,  $(1, \pi)$  è un punto in  $\mathbb{R}^2$  con 1 come ascissa e  $\pi$  come ordinata.

---

<sup>†1</sup> $\wedge$  e  $\vee$  sono usati anche in insiemi parzialmente ordinati, ma non discuteremo la loro definizione in questo testo.

<sup>†2</sup>O, più in generale, se  $x, y$  sono elementi di un *anello* dove la moltiplicazione è indicata dalla giustapposizione di simboli.

<sup>†3</sup>Di nuovo, più in generale, se  $f, x, y$  sono elementi di un *anello* dove la moltiplicazione è denotata dalla giustapposizione.

Mentre la prima e la seconda situazione sono solitamente discernibili e riconoscibili, la terza e la quarta possono causare confusione.

È necessaria una certa attenzione nell'analisi delle frasi che coinvolgono prodotti cartesiani di insiemi ordinati, come ad esempio: «un punto  $(x, y)$  nel rettangolo  $R$  del piano che è il prodotto  $R = (0, 1) \times (2, 4)$ ». Qui  $(x, y)$  è un punto in  $\mathbb{R}^2$  mentre  $(0, 1)$ ,  $(2, 4)$  sono intervalli in  $\mathbb{R}$ .

Per evitare confusione, possiamo usare una notazione diversa per i punti e/o per gli intervalli: molti simboli simili a "parentesi" sono disponibili al giorno d'oggi nello spazio di codice Unicode esteso; e sono utilizzabili in  $\text{\LaTeX}$  usando il pacchetto `unicode-math`.

Ad esempio, nell'affermazione precedente, possiamo usare questa notazione (non standard): parentesi barrate  $\langle \dots \rangle$  per indicare il punto in  $\mathbb{R}^2$  con  $x$  come ascissa e  $y$  come ordinata; le doppie parentesi  $\langle a, b \rangle = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$  per gli intervalli; in modo da ottenere «un punto  $\langle x, y \rangle$  nel rettangolo  $R$  del piano che è il prodotto  $R = (0, 1) \times (2, 4)$ ». In questo caso, per coerenza tipografica, possiamo usare allo stesso tempo doppie parentesi quadre per intervalli chiusi, ad esempio  $\llbracket 2, 4 \rrbracket$ .

Questo può essere considerato eccessivo per questo esempio. Ma la situazione può essere più complicata!

Ad esempio, potremmo avere a che fare con intervalli di elementi di un insieme ordinato  $X$ , che è anche un prodotto cartesiano  $X = X_1 \times X_2$  di insiemi ordinati  $X_1, X_2$  (!)<sup>†4</sup> In tal caso, possiamo prima etichettare gli ordinamenti:  $\leq_1$  essendo la relazione d'ordine su  $X_1$ ,  $\leq_2$  essendo la relazione d'ordine su  $X_2$ , e  $\leq$  essendo la relazione d'ordine su  $X$ ; e utilizzare una notazione (non standard) per gli intervalli, ad esempio

$$\langle a, b \rangle_1 = \{t \in X_1 : a <_1 t <_1 b\}$$

per gli intervalli aperti nel primo insieme (con estremi  $a, b \in X_1$ ),

$$\langle z, w \rangle_{\leq} = \{x \in X : w < x < z\}$$

per intervalli aperti nel prodotto cartesiano  $X$  (con estremi  $z, w \in X$ ), e così via. Ancora una volta, per coerenza tipografica, possiamo usare doppie parentesi quadre per intervalli chiusi, come ad esempio

$$\llbracket a, b \rrbracket_1 = \{x \in X_1 : a \leq_1 x \leq_1 b\}$$

e così via.

Nel seguito useremo spesso le usuali parentesi  $()$ , come è consuetudine; ma in certi contesti useremo la notazione proposta in questa nota (quando potrebbe aiutare nella comprensione del testo).

Si vedano inoltre le note 2.6 e 5.1.

<sup>†4</sup>Ed esiste un metodo standard per ordinare un prodotto cartesiano di insiemi ordinati, si veda Sez. §2.d.b.

---

## §2 Fondamenti

[00C]

### §2.a Logica

[1YS]

Nelle prossime sezioni daremo alcune definizioni; queste sono semplificate, ma sufficienti per affrontare gli esercizi. I lettori interessati a un approfondimento possono consultare un libro di logica quale ad esempio [13].

[23H]

#### §2.a.a Proposizioni

**Definizione 2.1.** Una proposizione logica  $\varphi$  è un'asserzione che assume valore di verità o di falsità.

[1VW]

(Svolto il  
2022-10-11)

**Esempio 2.2.** Esempi:

[1VX]

- “la neve è bianca”,
- “la Terra ha un diametro di circa 12000km”,
- “un kg di pane costa 3€”.

(Si potrebbe discutere filosoficamente su cosa si intende per “verità”: in molti ambiti la verità di una proposizione è soggettiva, può dipendere dal contesto, dall'interpretazione, da chi fa e da chi risponde alla domanda, da quando la domanda è posta, etc etc; in matematica la situazione è più semplice).

[23J]

Una proposizione può dipendere da alcune variabili. Esempi:

- “la persona  $x$  di mestiere fa il panettiere”,
- “il numero  $x$  è maggiore di 9”.

Scriveremo

$$P(x) \doteq \text{“il numero } x \text{ è maggiore di 9”}$$

per dire che  $P(x)$  è il simbolo che riassume la proposizione scritta a destra.

**Nota 2.3.** Perché la proposizione abbia senso, dovremo restringere l'ambito della variabile a un opportuno insieme; nel primo caso, l'insieme degli essere umani; nel secondo caso, un insieme numerico (es. numeri interi).

[23K]

A questo livello della trattazione, il concetto di “insieme” è intuitivo; vedremo più avanti che esiste una teoria assiomatica degli insiemi, quasi universalmente usata in Matematica; comunque anche il concetto intuitivo di insieme è ampiamente usato (Si veda la nota 2.52).

#### §2.a.b Logica proposizionale

**Definizione 2.4.** Una **logica proposizionale** è un linguaggio, con associato un alfabeto di variabili (che per comodità nel seguito identificheremo con l'alfabeto Italiano) e la

[00D]

famiglia di connettivi <sup>†5</sup>

negazione, NOT	$\neg$
coniunzione, AND	$\wedge$
disgiunzione, OR	$\vee$
implicazione	$\Rightarrow$
doppia implicazione, iff	$\Leftrightarrow$

a questi simboli aggiungiamo le parentesi, che sono usate per raggruppare parti della formula (quando vi sia il rischio di ambiguità); le parentesi sono omesse quando la precedenza degli operatori lo permette; gli operatori sono elencati nella precedente lista in ordine decrescente di precedenza. <sup>†6</sup>

**Definizione 2.5.** Le *formule ben formate* sono

- formule atomiche, cioè composte da una sola variabile, oppure
- una formula del tipo  $\neg(\alpha)$  dove  $\alpha$  è una formula ben formata, oppure
- - una formula del tipo  $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ , oppure
  - una formula del tipo  $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$ , oppure
  - una formula del tipo  $(\alpha) \vee (\beta)$ , oppure
  - una formula del tipo  $(\alpha) \wedge (\beta)$ ,
 dove  $\alpha, \beta$  sono due formule ben formate.

[00G]

(Svolto il 2022-10-11)

Si può determinare se una formula è ben formata facendo un numero finito di controlli usando le regole precedenti: infatti le regole stabiliscono che ogni formula ben formata si deve poter spiegare in termini di formule ben formate che sono più corte di lei. Dunque la affermazione “questa formula è ben formata” è “decidibile”. <sup>†7</sup>

[1YK]

**Nota 2.6.** Nella definizione 2.5 si parla di formule atomiche, cioè composte da una sola variabile; vogliamo riflettere su questo. Nei linguaggi di programmazione è permesso usare, per identificare gli oggetti (variabili, funzioni, etc), nomi composti da più lettere, come ad esempio

[228]

```
foo = 3 ;
bar = 7;
pippo = foo + bar;
```

Nella matematica questo è inusuale, in quanto in una formula come

$$xyz + abc$$

sarebbe difficile capire se  $xyz$  è una variabile, oppure il prodotto di tre variabili  $x, y, z$ . Per questo, d’abitudine, in matematica gli identificativi sono composti da una sola

<sup>†5</sup>Nei testi di logica spesso viene usato il simbolo  $\rightarrow$  per l’implicazione e il simbolo  $\leftrightarrow$  per la doppia implicazione

<sup>†6</sup>Alcuni studiosi usano diversi ordini di precedenza, in particolare alcuni considerano “l’implicazione” precedente alla rispetto alla “disgiunzione”. Per questo è sempre meglio usare le parentesi per raggruppare le parti di frase dove questi connettivi vengono usati.

<sup>†7</sup>La definizione precisa di “decidibile” esula da queste note. Pensate a un algoritmo scritto al computer che, data una formula, con un numero finito di passaggi risponda “ben formata” oppure “non ben formata”. Notate però che il numero di controlli da fare cresce esponenzialmente con la lunghezza della formula.

lettera; fanno eccezione alcune funzioni notevoli, quali  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ ,  $\log$ ...etc. Questo però crea qualche problema quando si vuole esprimere una formula dove vi siano molte variabili; per questo vengono usati anche lettere dall'alfabeto greco, e persino ebraico, in particolare "aleph" א e "beth" ב; e le lettere vengono inoltre corredate da indici, a pedice come  $x_1, x_2, x_3$  o ad apice  $x^1, x^2, x^3$  (stando attenti a non confondersi con l'elevamento a potenza); vi sono poi varianti espressi con i segni  $\hat{x}, \bar{x}, \tilde{x}, x'$  (stando attenti a non confondersi con le derivate); e vi sono scelte di tipi di carattere, quali il "calligrafico"  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \dots$ , il "fraktur"  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \dots$   $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  o il blackboard bold  $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, \mathbb{d} \dots \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ .

**Definizione 2.7.** Una **valutazione** assegna ad ogni variabile un valore "vero" oppure "falso". Conoscendo il valore delle variabili, e usando le note tabelle di verità per i connettivi <sup>†8</sup>, si può calcolare il valore di ogni formula ben formata. [00J]

Dunque una formula ben formata è una "proposizione logica" in quanto assume valore di verità o di falsità, a seconda del valore dato alle sue variabili libere. Possiamo allargare la definizione aggiungendo che le proposizioni viste nella sezione precedente sono "formule atomiche"; ad esempio

$$\text{"}x \text{ è un numero minore di } 3\text{"} \wedge \text{"}y \text{ è un numero pari\text{"}}$$

sarà anch'essa una "formula ben formata".

Per comodità, in questa Sezione, aggiungiamo al linguaggio anche le costanti  $V$  e  $F$  che sono rispettivamente sempre vere e sempre false, in ogni valutazione. <sup>†9</sup> Nella costruzione delle formule ben formate vengono trattate come le variabili. Notate che non abbiamo introdotto il connettivo di uguaglianza " $=$ ". Quando tutte le variabili possono assumere solo i valori vero/falso, l'uguaglianza  $a = b$  può essere interpretata come  $a \iff b$ . In contesti più generali (come nel caso della teoria degli insiemi) invece "l'uguaglianza" necessita di una precisa definizione.

### Esercizi

E2.8 Completate la seguente tabella di verità [1VY]

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1VZ']

E2.9 Dite quali formule sono ben formate, e aggiungete le parentesi per evidenziare l'ordine di precedenza. [00K]

$$\begin{aligned} a \wedge \neg b \wedge c \wedge d \\ \neg a \vee b \wedge c \Rightarrow d \\ a \Rightarrow \neg b \wedge c \vee d \\ a \wedge b \vee c \Leftrightarrow \neg c \Rightarrow d \\ a \vee b \neg c \vee d \end{aligned}$$

<sup>†8</sup>Si veda 2.8

<sup>†9</sup>Le costanti  $V$  e  $F$  possono essere eliminate dalla logica definendole come  $V = A \vee \neg A$  e  $F = \neg V$ .



Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OOM']

E2.10 Una formula ben formata nella logica proposizionale è una **tautologia** se per ogni *valutazione* la formula è sempre vera. Supponiamo che  $A, B, C$  siano formule ben formate. Mostrate che le seguenti proprietà dei connettivi sono tautologie. <sup>†10</sup> [OON]

$A \Rightarrow A$	legge dell'identità	
$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	legge della doppia negazione	
$A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A$	leggi di idempotenza	
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	legge di contrapposizione,	
	o della contronominale <sup>†11</sup>	(2.11)
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$	equivalenza di implicazione,	
	coniunzione e disgiunzione	(2.12)
$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$	prima legge di De Morgan	(2.13)
$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	seconda legge di De Morgan	(2.14)
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	proprietà distributiva della congiunzione	
	rispetto alla disgiunzione	(2.15)
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	proprietà distributiva della disgiunzione	
	rispetto alla congiunzione	(2.16)
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	proprietà commutativa di $\wedge$	
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	proprietà commutativa di $\vee$	
$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	proprietà associativa di $\wedge$	
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	proprietà associativa di $\vee$	(2.17)

Queste due ultime proprietà permettono di omettere le parentesi in sequenze di congiunzioni oppure di disgiunzioni.

Le proprietà (2.12),(2.13),(2.14) dicono che potremmo fondare tutta la logica sui soli connettivi  $\neg$  e  $\wedge$ , (o su  $\neg, \vee$ ).

<sup>†10</sup>Queste liste sono tratte dalla Sezione 1.3 in [13], oppure [30].

<sup>†11</sup>La proposizione  $(\neg B \Rightarrow \neg A)$  è detta "contronominale" della  $(A \Rightarrow B)$ .

Altre tautologie importanti, spesso usate nel ragionamento logico.

$A \vee \neg A$	legge del terzo escluso	
$\neg(A \wedge \neg A)$	legge di non contraddizione	
$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$	modus ponens	(2.18)
$(\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A$	modus tollens	(2.19)
$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	negazione dell'antecedente	
$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	affermazione del conseguente	
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$	esportazione	
$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))$	dimostrazione per parti	
$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$	dimostrazione per casi	
$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	sillogismo ipotetico, o transitività dell'implicazione	
$(A \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow$		
$(A \vee F) \Leftrightarrow (A \wedge V) \Leftrightarrow A$	leggi di assorbimento	
$F \Rightarrow B$	prima legge di Pseudo Scoto, o <i>ex falso sequitur quodlibet</i>	
$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$	seconda legge di Pseudo Scoto	
$(\neg A \Rightarrow F) \Leftrightarrow A$	dimostrazione per assurdo	
$((A \wedge \neg B) \Rightarrow F) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$	dimostrazione per assurdo, con ipotesi e tesi	
$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$	consequentia mirabilis	(2.20)

E2.21 Mostrate la validità della seguente tautologia [22C]

$$((\neg A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((\neg C \wedge B) \Rightarrow A)$$

indi usate l'esercizio 2.313 per trasformarla in un diagramma di Venn con tre insiemi.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22D']

E2.22 Mostrate che il connettivo  $\Rightarrow$  di implicazione non è né commutativo né associativo. <sup>†12</sup> Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2G9'] [2G8]

### §2.a.c Logica del primo ordine

Nella logica del primo ordine si aggiungono i connettivi  $\forall$ , che si legge “per ogni” e  $\exists$ , che si legge “esiste”. Dobbiamo dunque allargare la famiglia delle **formule ben formate**.

**Definizione 2.23.** Una formula è ben formata se soddisfa tutte le regole nella lista in 2.5 e questa regola aggiuntiva: “data una formula ben formata  $\phi$  dove la variabile  $x$  è libera, una formula della forma “ $\forall x, \phi$ ”, o “ $\exists x, \phi$ ” è una formula ben formata.” [00Q]

Diremo che una variabile  $x$  è **libera** in una formula ben formata se

- la formula è atomica e la variabile  $x$  appare in essa; oppure se
- la formula è della forma  $\neg \alpha$  e la variabile  $x$  è libera in  $\alpha$ ; oppure anche se
- la formula è della forma  $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \beta, \alpha \Leftrightarrow \beta$  (o altro connettivo logico introdotto in seguito) e la variabile  $x$  è libera in  $\alpha$  oppure in  $\beta$ .

<sup>†12</sup>Questo esercizio è stato scritto durante una discussione con Anton Mennucci.

Dunque nelle formule  $(\forall x, \phi)$  o  $(\exists x, \phi)$ , la variabile  $x$  non è più libera; usa dire che “la variabile è quantificata” o “legata”.

In ogni parte di una formula in cui una variabile è quantificata, questa variabile può essere sostituita con ogni altra variabile.

**Nota 2.24.** La variabile  $x$ , che sia quantificata in una parte di una formula, torna ad essere libera se viene riusata in un altro pezzo della formula; questo è sintatticamente lecito ma rende meno leggibile la formula, come in questo esempio che usa il linguaggio della teoria degli insiemi

[1X1]  
(Svolto il  
2022-10-11)

$$A \subseteq \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 4 \wedge (\forall x \in A, x \leq 10)$$

che andrebbe scritto come

$$A \subseteq \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 4 \wedge (\forall y \in A, y \leq 10)$$

rinominando la variabile nella parte in cui questa è quantificata.

**Nota 2.25.** Si assume come assioma che

[2DC]

$$\neg(\forall x, \phi) \Leftrightarrow (\exists x, \neg\phi) . \quad (2.26)$$

(Nella Sez. 2.1 in [13] anzi  $(\forall x, \phi)$  viene presentato come abbreviazione di  $\neg(\exists x, \neg\phi)$ ).

Notate che, in molti esempi, si suppone che le variabili quantificate siano elementi di un “insieme”.

**Definizione 2.27.** Date due variabili  $x, y$  scriveremo  $x \in y$  per dire che “ $x$  è un elemento dell’insieme  $y$ ”; usa anche dire che “ $x$  appartiene all’insieme  $y$ ”, o semplicemente che “ $x$  sta in  $y$ ”.

[1X2]

La formula  $(x \in y)$  è equivalente a  $(y \ni x)$ ; le negazioni sono  $(x \notin y) \doteq \neg(x \in y)$  e  $(y \not\ni x) \doteq \neg(y \ni x)$ .

La formula  $(x \in y)$  (come tutte le altre varianti) assume valore di verità/falsità e dunque può essere usata come atomo nella costruzione di una formula ben formata.

**Definizione 2.28.** Usa scrivere

[00R]

“ $\forall x \in A, P(x)$ ” per dire “per ogni  $x$  in  $A$  vale  $P(x)$ ”,

oppure

“ $\exists x \in A, P(x)$ ” per dire “esiste un  $x$  in  $A$  per cui vale  $P(x)$ ”;

(dove  $A$  è un insieme); per poter collegare queste scritture rigorosamente alle definizioni precedenti, decidiamo che le scritture precedenti sono abbreviazioni per

$$\forall x \in A, P(x) \doteq \forall x, x \in A \Rightarrow P(x) ,$$

$$\exists x \in A, P(x) \doteq \exists x, x \in A \wedge P(x) .$$

Notate che le formule a destra sono “formule ben formate”. Si veda anche l’esercizio 2.35.

Usiamo qui il termine “insieme” in maniera informale, si veda la nota 2.52.

**Nota 2.29.** Notate che “ $\forall x \in A, \varphi$ ” è vera se  $A$  è vuoto; questo è consistente con quanto discusso nell’esercizio 2.35. Questo però ha una conseguenza importante: l’implicazione

$$(\forall x \in A, \varphi) \Rightarrow (\exists x \in A, \varphi)$$

è sempre valida quando  $A$  è un insieme non-vuoto, ed è invece falsa quando  $A = \emptyset$ .

Si usa molto anche l’abbreviazione

$$\forall x, y, \dots \in A, P(x, y, z)$$

invece di

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \forall \dots, P(x, y, z) \quad .$$

Dato che un elemento di un insieme potrebbe non avere un valore di verità/falsità, arricchiamo il linguaggio aggiungendo le “proposizioni logiche”.

**Definizione 2.30.** Una **proposizione logica**  $\phi$  è un’asserzione che assume valore di verità o di falsità dipendentemente dal valore dato alle sue variabili libere, e solo da quello.

Un esempio di proposizione logica potrebbe essere: “ $n$  è un numero pari”. Possiamo usare le proposizioni logiche come atomi nella costruzione delle formule ben formate.

### Esercizi

E2.31 Siano  $X, Y$  insiemi. Siano  $\phi, \psi$  proposizioni logiche;  $x, a$  sono variabili libere in  $\phi$ , e  $y, b$  sono libere in  $\psi$ . Assumiamo inoltre che  $a, b$  possano essere solo vere o false, mentre  $x \in X, y \in Y$ . Considerate le seguenti formule. Quali sono ben formate? Quali variabili sono libere in esse?

$$\begin{aligned} & b \wedge (\forall x, \phi) \\ & (\exists y, \psi) \vee (\forall x, \phi) \\ & \forall x, \forall b, (\phi \wedge (\psi \vee b)) \\ & a \vee (\forall x, \forall a, \phi) \\ & (\exists x, \psi) \wedge (\forall x, \phi) \end{aligned}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '00W']

E2.32 Consideriamo una proposizione  $P(u, \ell)$  dipendente da due variabili libere  $u$  (che prende valori nell’insieme delle persone), e  $\ell$  (nell’insieme dei lavori), e che è così formulata: ‘La persona  $u$  sa fare il lavoro  $\ell$ ’.

Esprimete in Italiano le seguenti formule

$$\begin{aligned} & \exists u \exists \ell P(u, \ell) \quad , \quad \forall u \exists \ell P(u, \ell) \quad , \quad \exists \ell \forall u P(u, \ell) \quad , \\ & \forall \ell \exists u P(u, \ell) \quad , \quad \exists u \forall \ell P(u, \ell) \quad , \quad \forall u \forall \ell P(u, \ell) \quad . \end{aligned}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '00Y']

E2.33 Quali implicazioni vi sono fra le precedenti formule?

[00Z]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '010']

(Svolto il  
2022-10-11)

E2.34 Si verifichi che

[011]

$$\left( (\forall x, \varphi(x)) \wedge (\forall y, \psi(y)) \right) \iff \left( \forall x (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \right)$$

E2.35 Come già commentato in 2.28, dato  $A$  un insieme, e  $P(x)$  una proposizione logica dipendente da una variabile libera  $x$ , usa scrivere

[016]

$$\forall x \in A, P(x) \quad , \quad \exists x \in A, P(x)$$

però

$$\forall x \in A, P(x) \text{ riassume } \forall x, (x \in A) \Rightarrow P(x) \quad ,$$

$$\exists x \in A, P(x) \text{ riassume } \exists x, (x \in A) \wedge P(x) \quad ;$$

laddove le versioni “estese” sono formule ben formate.

Usando questa scrittura estesa dimostrate che le due proposizioni

$$\neg(\forall x \in A, P(x)) \quad , \quad \exists x \in A, (\neg P(x)) \quad .$$

sono equivalenti, nel senso che da una è possibile dimostrare l'altra (e viceversa). Nella dimostrazione usate solo le tautologie (elencate in 2.10) e in particolare l'equivalenza della formula “ $P \Rightarrow Q$ ” con “ $(\neg P) \vee Q$ ”<sup>†13</sup>, e infine l'equivalenza fra “ $\neg \exists x, Q$ ” e “ $\forall x, \neg Q$ ”<sup>†14</sup>.

Sostituendo poi  $P(x)$  con  $\neg P(x)$  e usando la tautologia della doppia negazione si ottiene infine che

$$\forall x \in A, (\neg P(x)) \quad , \quad \neg(\exists x \in A, P(x))$$

sono equivalenti.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '017']

E2.36 Dato  $A$  un insieme, e  $P(x)$  una proposizione dipendente da una variabile libera  $x$ , usa scrivere

[013]

$$\exists! x \in A, P(x)$$

quando vi è uno e un solo elemento  $x$  di  $A$  per cui  $P(x)$  è vera. Definite questa notazione con una formula ben formata. (Notate che avrete bisogno di usare il connettivo di uguaglianza, perché dovete poter esprimere l'idea di “unico”, che necessita di un metodo per poter dire quando due oggetti sono distinguibili e quando non lo sono).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '015']

## §2.b Teoria degli insiemi

[1YT]

### §2.b.a Teoria degli insiemi elementare

[24Z]

Come già spiegato nella Definizione 2.27, nella teoria degli insiemi si aggiunge il connettivo “ $\in$ ”; dati due insiemi  $z, y$  la formula  $x \in y$  si legge “ $x$  appartiene a  $y$ ” o più semplicemente “ $x$  è in  $y$ ”, e indica che  $x$  è un elemento di  $y$ .

È uso indicare gli insiemi usando come variabili lettere Italiane maiuscole.

**Definizione 2.37.** Si aggiunge anche il connettivo  $a = b$  fra insiemi, che è vero quando

$$\forall x, x \in a \iff x \in b .$$

[1Y8]  
(Svolto il  
2022-10)

Questo è l'**assioma di estensionalità**.

Questo dice che due insiemi  $a$  e  $b$  sono uguali quando hanno gli stessi elementi; cioè, esclude che un insieme possa avere qualche altra proprietà che lo contraddistingue <sup>†15</sup>.

[226]

**Definizione 2.38.** Per comodità viene usato il connettivo  $a \subseteq b$  per indicare che  $a$  è un sottoinsieme di  $b$ ; formalmente questo si definisce come

$$\forall x, x \in a \Rightarrow x \in b .$$

[227]

$b \supseteq a$  è equivalente a  $a \subseteq b$ .

Ovviamente  $a = b \iff ((a \subseteq b) \wedge (b \subseteq a))$ . Notate che  $a \subseteq a$ .

Si scrive usualmente  $x \notin y$  per  $\neg(x \in y)$ ,  $x \not\subseteq y$  per  $\neg(x \subseteq y)$  e così via.

**Nota 2.39.** Vi sono anche altri simboli usati. Alcuni testi usano  $a \subset b$  per indicare che  $a \subseteq b$  ma  $a \neq b$  (come negli appunti [3]); altri usano una scrittura più espressiva come  $a \subsetneq b$  per dire che  $a \subseteq b$  ma  $a \neq b$ . (Alcuni persino usano  $a \subset b$  al posto di  $a \subseteq b$ , purtroppo — come per esempio [14]).

[1W0]

Viene inoltre definita la costante  $\emptyset$  indicato anche come  $\{\}$  che è l'insieme vuoto, <sup>†16</sup> caratterizzato da

$$\forall x, \neg x \in \emptyset .$$

Si dimostra che l'insieme vuoto è unico.

Si introducono dunque alcune concetti fondamentali: unione, intersezione, differenza simmetrica, insieme potenza, prodotto cartesiano, relazioni, funzioni etc.

**Definizione 2.40.** Data  $I$  una famiglia non-vuota di indici e dati  $C_i$  insiemi (uno per ogni  $i \in I$ ), allora l'**unione**

[1Y2]

$$\bigcup_{i \in I} C_i$$

è un insieme, che contiene tutti (e soli) gli elementi di tutti gli insiemi  $C_i$ ; in formula <sup>†17</sup>

$$\bigcup_{i \in I} C_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \exists i \in I, x \in C_i\} .$$

Nel caso siano dati solo due insiemi  $C_1, C_2$ , usa scrivere  $C_1 \cup C_2$  per indicare l'unione; e similmente quando sono dati finiti insiemi.

**Definizione 2.41.** Data  $I$  una famiglia non-vuota di indici e dati  $C_i$  insiemi (uno per ogni  $i \in I$ ), definiamo l'**intersezione**

[1W1]

$$\bigcap_{i \in I} C_i$$

<sup>†13</sup>Tautologia in eqn. (2.12).

<sup>†14</sup>Già discussa in eqn.(2.26).

<sup>†15</sup>Si potrebbe immaginare una teoria degli insiemi in cui le parentesi possono essere "rosse" o "blu", e l'uguaglianza fra insiemi si ha quando gli elementi e i colori sono gli stessi. Nella teoria usuale le parentesi sono sempre nere.

<sup>†16</sup>Nella teoria assiomatica di Zermelo–Fraenkel l'esistenza di  $\emptyset$  è un assioma.

<sup>†17</sup>Questa è una versione più maneggevole dell'assioma ufficiale. La definizione ufficiale si trova in ZF:4.

che è l'insieme che contiene gli elementi che appartengono a tutti gli insiemi  $C_i$  (per tutti gli  $i \in I$ ).

Nel caso siano dati solo due insiemi  $C_1, C_2$ , usa scrivere  $C_1 \cap C_2$  per indicare l'intersezione, e si ha

$$C_1 \cap C_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in C_1 \cup C_2 : x \in C_1 \wedge x \in C_2\} \quad ;$$

e similmente quando sono dati finiti insiemi.

L'insieme potenza è definito come in ZF:5.

**Definizione 2.42.** Altri operatori fra insiemi sono:

[23S]

- la differenza

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A : x \notin B\} \quad ;$$

- se l'insieme  $A$  è chiaramente specificato dal contesto, e se  $B \subseteq A$  usa anche scrivere  $B^c \stackrel{\text{def}}{=} A \setminus B$ ; si dice che  $B^c$  è il complementare di  $B$  in  $A$ ;
- la differenza simmetrica

$$A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \in A \cup B : x \in A \iff x \notin B\} \quad ;$$

dove  $A, B$  sono insiemi.

### Esercizi

E2.43 Dimostrate che  $A = B$  se e solo se  $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$ . Soluzione nascosta:

[1W6]

[UNACCESSIBLE UUID '1W7']

(Proposto il 2022-10-11)

E2.44 Rappresentate le operazioni

[1W8]

- $\cup$  unione
- $\cap$  intersezione
- $\setminus$  differenza
- $\Delta$  differenza simmetrica

fra due insiemi usando diagrammi di Venn.

E2.45 Prerequisiti: 2.44. Usate i precedenti diagrammi di Venn per mostrare che in generale  $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$ .

[1W9]

E2.46 Mostrate che se  $X \subseteq Y$  e  $Y \subseteq Z$  allora  $X \subseteq Z$  Soluzione nascosta:

[1WB]

[UNACCESSIBLE UUID '1WD']

E2.47 Spiegate perché l'operazione di unione  $A \cup B$  fra due insiemi è commutativa, e mostrate che è associativa; similmente per la intersezione; infine mostrate che l'unione distribuisce rispetto all'intersezione, e anche che l'intersezione distribuisce rispetto all'unione. Soluzione nascosta:

[1W2]

[UNACCESSIBLE UUID '1W3']

E2.48 Considerate gli insiemi:

[1WF]

(Proposto il 2022-12)

- $P$  l'insieme dei professori,
- $S$  l'insieme degli scienziati,
- $F$  l'insieme dei filosofi,
- $M$  l'insieme dei matematici.

Per ognuna delle seguenti frasi, scrivete una formula che la rappresenti, usando gli insiemi soprascritti, l'insieme vuoto, le relazioni  $\subseteq$ ,  $=$ ,  $\neq$ , e le operazioni insiemistiche  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\setminus$ .

- non tutti i professori sono scienziati
- qualche matematico è filosofo;
- se un filosofo non è matematico allora è professore;
- tutti i filosofi sono scienziati o professori, ma non matematici;
- se  $c$  è un matematico che è anche scienziato, allora non è né filosofo né professore.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1WG']

E2.49 Sia  $U$  l'insieme degli esseri umani,  $A$  l'insieme degli animali e  $M$  l'insieme delle creature mortali; trasformate il seguente sillogismo in formule e dimostrate: [1Y4]

ogni uomo è un animale, ogni animale è mortale, dunque ogni uomo è mortale.

E2.50 Spiegate la formula  $\bigcup_{B \in \mathcal{P}(A)} B$  avendo a disposizione la definizione 2.40 dell'assioma dell'unione. Poi mostrate che  $A = \bigcup_{B \in \mathcal{P}(A)} B$ . [1WC]

Si veda anche 2.61 dove lo stesso risultato si ottiene partendo dall'assioma dell'unione come definito in ZF:4 nell'assiomatica di Zermelo–Fraenkel.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1WV']

E2.51 Sia  $I, C_i$  come in 2.40 e sia  $A$  un insieme; dimostrare che [24P]

$$\bigcup_{i \in I} C_i \subseteq A$$

se e solo se

$$\forall i \in I, C_i \subseteq A.$$

**Nota 2.52.** Si distingue fra una teoria informale degli insiemi e una teoria formale degli insiemi. <sup>†18</sup> [01J]

La teoria informale degli insiemi sfrutta tutte le nozioni precedentemente elencate, ma non indaga sui fondamenti, cioè sulle assiomatizzazione. Per questo approccio consigliamo il testo [10]; o [32] per una breve discussione.

La teoria formale degli insiemi più usata è la assiomatica di Zermelo–Fraenkel, che ricapiteremo nella prossima sezione. Si veda il Cap. 6 in [13] (per una breve introduzione può andare bene anche [31]).

Nella teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo–Fraenkel tutte le variabili rappresentano insiemi, dunque le variabili non hanno un significato di verità o falsità. Per questo, nelle definizioni 2.5 e 2.23 di formula ben formata si cambia il concetto di “atomo”. Un atomo è ora una formula della forma  $a \in b$  che ha valore di verità/falsità.

<sup>†18</sup>Si veda l'introduzione al Cap. 6 in [13] per una discussione che confronta questi due approcci.



Mentre nella teoria formale tutto gli elementi del linguaggio sono insiemi, nella pratica si tende a distinguere fra gli insiemi, e gli altri oggetti della Matematica (numeri, funzioni, etc etc); per questo nel seguito useremo in genere le lettere maiuscole per indicare gli insiemi, e le lettere minuscole per indicare altri oggetti.

**§2.b.b Assiomi di Zermelo–Fraenkel**

[241]

Vediamo ora brevemente gli assiomi della teoria degli insiemi di Zermelo–Fraenkel.

ZF:1 Assioma di estensionalità, già visto sopra in 2.37.

ZF:2 L'insieme vuoto  $\emptyset$  è un insieme. In formule:

[014]

$$\exists X : \forall Y \neg (Y \in X)$$

per il precedente assioma,  $X$  è unico, e viene denotato con  $\emptyset$

ZF:3 **Assioma della coppia.** Dati comunque due insiemi  $X$  e  $Y$  esiste un insieme  $Z$ , rappresentato come  $Z = \{X, Y\}$ , i cui elementi sono solo  $X$  e  $Y$ . In formula

[1Y3]

$$\forall X, Y \exists Z : \forall W (W \in Z) \iff (W = X) \vee (W = Y) .$$

Di nuovo l'insieme  $Z$  è unico per effetto dell'assioma di estensionalità 2.37.

ZF:4 L'**assioma dell'unione**<sup>†19</sup> dice che per ogni insieme  $A$  esiste un insieme  $B$  che contiene tutti gli elementi degli elementi di  $A$ ; in simboli,

[026]

$$\forall A \exists B, \forall x, (x \in B \iff (\exists y, y \in A \wedge x \in y)) .$$

Si mostra che questo è unico, per effetto dell'assioma di estensionalità 2.37; indichiamo questo insieme  $B$  con  $\bigcup A$  (per non confonderlo col simbolo già introdotto prima).

Per esempio se

$$A = \{\{1, 3, \{5, 2\}\}, \{7, 19\}\}$$

allora

$$\bigcup A = \{1, 3, \{5, 2\}, 7, 19\} .$$

Dati  $A_1, \dots, A_k$  insiemi, sia  $D = \{A_1, \dots, A_k\}$ <sup>†20</sup> definiamo

$$A_1 \cup A_2 \dots \cup A_k \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup D .$$

ZF:5 L'**assioma dell'insieme potenza** dice che per ogni insieme  $A$ , esiste un insieme  $\mathcal{P}(A)$  i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di  $A$ . Una formula abbreviata di definizione è

[1Y1]

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{B : B \subseteq A\} .$$

$\mathcal{P}(A)$  si chiama anche *insieme delle parti*.

<sup>†19</sup>Questa è la versione “ufficiale” di Zermelo–Fraenkel. Spesso però viene usata la versione semplificata 2.40

<sup>†20</sup>L'esistenza di questo insieme sarà dimostrata in 2.71

Nel linguaggio formale degli assiomi di Zermelo-Fraenkel, l'assioma si scrive:

$$\forall A, \exists Z, \forall y, y \in Z \iff (\forall z, z \in y \implies z \in A) \quad ;$$

questa formula comporta che l'insieme potenza  $Z$  è unico, dunque possiamo denotarlo con il simbolo  $\mathcal{P}(A)$  senza tema di equivoci.

Notate che

$$(\forall z, z \in y \implies z \in A)$$

si può abbreviare con  $y \subseteq A$  e dunque l'assioma può essere scritto come

$$\forall A, \exists Z, \forall y, y \in Z \iff (y \subseteq A) \quad ;$$

usando poi l'estensionalità, si ottiene che

$$Z = \{y : (y \subseteq A)\} \quad .$$

ZF:6 Assioma dell'infinito (si veda 2.203)

ZF:7 L'assioma di specificazione, che recita

[1Y0]

*Se  $A$  è un insieme, e  $P(x)$  è una proposizione logica, allora  $\{x \in A : P(x)\}$  è un insieme.*

Formalmente, ponendo  $B = \{x \in A : P(x)\}$ ,

$$\forall X, X \in B \iff X \in A \wedge P(x) \quad .$$

Questo assioma evita il paradosso di Russel: sia  $A$  l'insieme degli  $x$  tali che  $x \notin x$ , allora non si ha né  $A \in A$  né  $A \notin A$ .

ZF:8 Assioma di buona fondazione, o di regolarità (si veda 2.72)

ZF:9 Assioma di rimpiazzamento

(Abbiamo omesso le definizioni dell' "Assioma di rimpiazzamento"; si può trovare in Cap.1 Sez.16 in [3] oppure Cap. 1 in [14]).

Vi è un ulteriore assioma, l'Assioma della scelta: questo sarà discusso in Sez. §2.b.c.

**Nota 2.53.** Si indica usualmente con la sigla "ZF" la teoria basata sugli assiomi Zermelo-Fraenkel; si indica con "ZFC" la teoria data dagli assiomi di Zermelo-Fraenkel con l'aggiunta dell'assioma della scelta.

[2DX]

**Nota 2.54.** È di uso comune questa dicitura: "sia  $I$  un insieme non vuoto di indici, sia  $A_i$  una famiglia di insiemi indicizzata da  $i \in I$ "; questa, nella teoria assiomatica, andrebbe scritta come "sia  $I$  un insieme non vuoto, sia  $X$  un insieme, sia  $A : I \rightarrow \mathcal{P}(X)$  una funzione; scriveremo  $A_i$  al posto di  $A(i)$ ". (Con questa scrittura si ha che gli  $A_i$  sono tutti sottoinsiemi di  $X$ ).

[01M]

**Esercizi**

E2.55 La notazione in ZF:4 differisce da quella usuale, che è  $\bigcup_{i \in I} C_i$ , dove  $I$  è una famiglia di indici non-vuota e  $C_i$  sono insiemi; come visto in 2.40. [23W]

Come potete definire  $\bigcup_{i \in I} C_i$  usando l'assioma dell'unione presentato in ZF:4? (Sugg. rileggete la nota 2.54)

Alla fine dovrete ottenere

$$\forall x, x \in \bigcup_{i \in I} C_i \iff \exists i \in I, x \in C_i \quad . \quad (2.56)$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '027']

E2.57 Mostrate che la definizione di intersezione 2.41 è ben posta, usando gli assiomi Z-F. Alla fine mostrate anche che [23T]  
(Proposto il 2022-10-11)

$$\forall x, x \in \bigcap_{i \in I} C_i \iff (I \neq \emptyset \wedge \forall i \in I, x \in C_i) \quad . \quad (2.58) \quad \text{(Svolto il 2022-10-25)}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '23V']

E2.59 Prerequisiti: 2.57, ZF:4, ZF:7, 2.29. Sia dato un insieme  $A$  non vuoto; definite  $B$  come l'insieme che contiene tutti gli elementi che stanno in tutti gli elementi di  $A$ . Scrivete una formula ben formata che definisca  $B$ , mostrate che  $B$  è un insieme e mostrate che è unico; per simmetria con l'assioma ZF:4 lo indicheremo con [252]

$$B = \bigcap A \quad .$$

È legato alla usuale notazione dalla relazione

$$\bigcap A = \bigcap_{x \in A} x \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '254']

E2.60 Prerequisiti: 2.55, 2.57. Ora che avete correttamente definito l'unione 2.41 e l'intersezione 2.40 usando gli assiomi Z-F, dite quale valore assumono [247]  
(Svolto il 2022-10-25)

$$\bigcap_{i \in I} C_i$$

e

$$\bigcup_{i \in I} C_i$$

quando  $I$  è l'insieme vuoto. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '249']

E2.61 Prerequisiti: ZF:4. Usando la definizione di  $\bigcup$  presentata in ZF:4, mostrate che [028]  
 $A = \bigcup(\mathcal{P}(A))$ .

E2.62 Dati  $X$  insieme e  $I, C_i$  come in 2.41 e 2.40, mostrate che [248]

$$X \setminus \left( \bigcap_{i \in I} C_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i) \quad . \quad (2.63) \quad \text{(Svolto il 2022-10-25)}$$

Cosa succede quando  $I$  è l'insieme vuoto?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '24B']

E2.64 Se  $A$  è un insieme di  $n$  elementi ( $n \geq 0$  numero naturale) allora quanti elementi vi sono in  $\mathcal{P}(A)$ ? [1W4] (Proposto il 2022-12)

E2.65 Scrivete esplicitamente  $\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset)$ . Quanti elementi ha? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1WX']

E2.66 Siano dati  $a, b, x, y$ . [1Y9]

1. Mostrate che nell'ipotesi

$$\{a, b\} = \{x, y\}$$

si ha che

$$(a = b) \iff (x = y) \iff a = b = x = y \quad .$$

2. Deducete in particolare che se

$$\{a\} = \{x, y\}$$

allora  $a = x = y$ .

3. Mostrate poi che se ipotizziamo che i quattro elementi  $a, b, x, y$  non siano tutti uguali, allora si ha

$$\{a, b\} = \{x, y\}$$

se e solo se  $a = x \wedge b = y$  oppure  $a = y \wedge b = x$ .

Per mostrare quanto sopra siate più precisi possibile: usate l'assioma di estensionalità 2.37, l'assioma della coppia ZF:3 e le tautologie mostrate nella sezione precedente (o altre relazioni logiche elementari). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1YB']

E2.67 Prerequisiti: 2.66. La coppia ordinata viene definita come [01N]

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad ;$$

(Svolto il 2022-10-25)

(notate che l'assioma della coppia ZF:3 ci garantisce che questa è una buona definizione); mostrate che

$$(a, b) = (x, y) \iff (a = x \wedge b = y) \quad . \quad (2.68)$$

(Prima soluzione che non usa 2.66) *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1WZ'] )

(Seconda soluzione che usa 2.66) *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1YC'] )

E2.69 Prerequisiti: 2.66, 2.72. Immaginiamo una diversa definizione per la coppia ordinata, definita come [1YD]

$$\llbracket x, y \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} \{x, \{x, y\}\} \quad ;$$

mostrate che

$$\llbracket a, b \rrbracket = \llbracket x, y \rrbracket \iff (a = x \wedge b = y) \quad . \quad (2.70)$$

Per mostrarlo vi servirà 2.72. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1YF']

E2.71 Mostrate che, dati  $a_1, \dots, a_k$  insiemi, esiste un insieme che contiene tutti e soli questi elementi. Questo insieme viene solitamente indicato con  $\{a_1, \dots, a_k\}$ . [029] (Svolto il 2022-10-25)

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '02B']

E2.72 L'assioma di buona fondazione (detto anche assioma di regolarità) della teoria di Zermelo–Fraenkel dice che ogni insieme non vuoto  $X$  contiene un elemento  $y$  che è disgiunto da  $X$ ; in formula [01R] (Svolto il 2022-10-25)

$$\forall X, X \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y (y \in X) \wedge (X \cap y = \emptyset))$$

(ricordiamo che ogni oggetto nella teoria è un insieme, dunque  $y$  è un insieme). Usando questo assioma provate questi fatti.

- Non esiste un insieme  $x$  che sia elemento di se stesso cioè per cui  $x \in x$ .
- Più in generale non esiste una famiglia finita  $x_1, \dots, x_n$  per cui  $x_1 \in x_2 \in \dots \in x_n \in x_1$ .
- Inoltre non esiste una successione  $x_1, \dots, x_n, \dots$  di insiemi per cui  $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni x_4 \dots$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '01S']

E2.73 Prerequisiti:2.72. Mostrate che per ogni  $x$  esiste un  $y$  tale che  $y \notin x$  Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '01X'] [01W] (Svolto il 2022-10-25)

E2.74 Mostrate invece che l'assioma dell'infinito, e la conseguente costruzione dei numeri naturali vista in Sez. §2.h, comporta che esiste una successione  $x_1, \dots, x_n, \dots$  di insiemi per cui  $x_1 \in x_2 \in x_3 \dots$  Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '01Z'] [01Y]

E2.75 Prerequisiti:2.77. Dato  $A$  insieme non vuoto mostrate che esiste una bigezione  $f : A \rightarrow B$  fra  $A$  e un insieme  $B$  disgiunto da  $A$ . [020] (Svolto il 2022-10-25)

Più in generale sia  $I$  un insieme non vuoto di indici, sia  $A_i$  una famiglia di insiemi non vuoti indicizzata da  $i \in I$ ; <sup>†21</sup> mostrare che esistono bigezioni  $f_i : A_i \rightarrow B_i$ , dove gli insiemi  $B_i$  godono della proprietà  $\forall i \in I, \forall j \in I, B_i \cap A_j = \emptyset$  e se  $j \neq i$  anche  $B_i \cap B_j = \emptyset$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '021']

E2.76 Prerequisiti:ZF:5. [022]

Mostrate che  $X \subseteq Y$  se e solo se  $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1WW']

E2.77 Usando la definizione di coppia  $(a, b)$  come  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$  mostrate che, dati due insiemi  $x, y$ , per ogni  $a \in x, b \in y$  si ha [024]

$$(a, b) \in \mathcal{P}\mathcal{P}(x \cup y) .$$

Usate questo fatto e l'assioma di separazione per giustificare assiomaticamente la definizione del **prodotto cartesiano**  $x \times y$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '025']

**Nota 2.78.** Nell'esercizio 2.71 gli elementi sono identificati tramite le variabili  $a_1, \dots, a_k$  che avremmo potuto anche denominare con altre lettere come  $a, b, c, d, \dots$ . Se però pensiamo a  $a_1, \dots, a_k \dots$  come a valori di una funzione  $a_i = a(i)$ ,  $a : I \rightarrow X$  allora l'insieme  $\{a_1, \dots, a_k \dots\}$  esiste (per un qualsiasi insieme  $I$  di indici) perché è l'immagine della funzione  $\{a_1, \dots, a_k \dots\} = \{x \in X : \exists i \in I, x = a_i\}$ . [27F]

**§2.b.c Lemma di Zorn, Assioma della Scelta, Teorema di Zermelo**

[23R]

Vi sono tre enunciati fondamentali nella teoria degli insiemi, il Lemma Zorn, l'Assioma della Scelta, e il Teorema di Zermelo. Si dimostra, all'interno dell'assiomatica di Zermelo–Fraenkel, che questi sono equivalenti. Si veda in Cap. 1 in [3] per una presentazione basata sui principi sopra definiti. †22

Il primo esercizio ci presenta alcune fondamentali maniere equivalenti di esprimere l'Assioma della Scelta.

**Esercizi**

E2.79 *Prerequisiti:* 2.54, ZF:4, 2.75 . Sia  $I$  un insieme non vuoto di indici, sia  $A_i$  una famiglia di insiemi non vuoti indicizzata da  $i \in I$ . Ricordiamo che, per definizione, il prodotto cartesiano  $\prod_{i \in I} A_i$  è l'insieme delle funzioni  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$  tali che  $f(i) \in A_i$  per ogni  $i \in I$ .

[02H]

Mostrate che le seguenti sono formulazioni equivalenti dell'**assioma della scelta**.

- Il prodotto cartesiano di una famiglia non vuota di insiemi non vuoti è non vuoto.
- Data una famiglia  $A_i$  come sopra, tale che gli insiemi sono non vuoti, e a due a due disgiunti, esiste un sottoinsieme  $B$  di  $\bigcup_{i \in I} A_i$  tale che, per ogni  $i \in I$ ,  $B \cap A_i$  contenga un unico elemento.
- Sia  $S$  un insieme, allora esiste una funzione  $g : \mathcal{P}(S) \rightarrow S$  tale che  $g(A) \in A$  per ogni  $A \in \mathcal{P}(S)$  non vuoto.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '02J']

**Nota 2.80.** *Attenzione! Supponiamo come sopra che gli insiemi  $A_i$  siano non vuoti. Questo si scrive formalmente come  $\forall i \in I, \exists x \in A_i$ . Intuitivamente questo ci porta a dire che l'elemento  $x$  dipende da  $i$ , e dunque che  $x = x(i)$ . Questo passo, per quanto intuitivo, è esattamente l'assioma della scelta.*

[02K]

**Esercizi**

E2.81 Trovate  $I$  un insieme non vuoto di indici, e per ciascun  $i \in I$  un insieme  $A_i$  non vuoto, per i quali non esiste un sottoinsieme  $B$  di  $\bigcup_{i \in I} A_i$  tale che, per ogni  $i \in I$ ,  $B \cap A_i$  contenga un unico elemento. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2GG']

[2GF]

E2.82 *Prerequisiti:* 2.178. Consideriamo la teoria degli insiemi di Zermelo–Fraenkel e questo enunciato:

[2BZ]

*Dati  $A, B$  insiemi non vuoti per cui esista  $g : B \rightarrow A$  una funzione surgettiva, allora esiste una funzione iniettiva  $f : A \rightarrow B$  tale che  $g \circ f = Id_A$ .*

Dimostrate che questo enunciato implica l'Assioma della Scelta. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2C0']

E2.83 Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale. Sia  $B \subseteq V$ . Una **combinazione lineare finita**  $v$  di elementi di  $B$  è equivalentemente definita come

[02D]

†21 Cf. 2.54

†22 Questa teoria si trova in molti libri di Logica, come ad esempio [13, 14, 11], ma il linguaggio e i metodi lì usati potrebbero essere troppo avanzati rispetto al livello richiesto per questo testo.

- $v = \sum_{i=1}^n \ell_i b_i$  dove  $n = n(v) \in \mathbb{N}$ ,  $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{R}$  e  $b_1, \dots, b_n$  sono elementi di  $B$ ;
- $v = \sum_{b \in B} \lambda(b)b$  dove  $\lambda : B \rightarrow \mathbb{R}$  ma inoltre  $\lambda(b) \neq 0$  solo per un numero finito di  $b \in B$ .

Chiamiamo  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^B$  l'insieme delle funzioni  $\lambda$  (come sopra usate) che sono non nulle solo per un numero finito di argomenti;  $\Lambda$  è uno spazio vettoriale: per questo la seconda definizione è meno intuitiva ma è più facile da maneggiare.

Diremo che  $B$  **genera**  $V$  se ogni  $v \in V$  si scrive come combinazione lineare finita di elementi di  $B$ .

Diremo che i vettori di  $B$  sono **linearmente indipendenti** se  $0 = \sum_{b \in B} \lambda(b)b$  implica  $\lambda \equiv 0$ ; o equivalentemente che, dati  $n \geq 1$ ,  $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{R}$  e  $b_1, \dots, b_n \in B$  tutti diversi, la relazione  $\sum_{i=1}^n \ell_i b_i = 0$  implica  $\forall i \leq n, \ell_i = 0$ .

Diremo che  $B$  è una **base algebrica** (anche nota come **base di Hamel**) se valgono entrambe le proprietà.

Se  $B$  è una base allora la combinazione lineare che genera  $v$  è unica (cioè vi è un' unica funzione  $\lambda \in \Lambda$  per cui  $v = \sum_{b \in B} \lambda(b)b$ ).

Mostrate che ogni spazio vettoriale ha una *base algebrica*. Mostrate più in generale che per ogni  $A, G \subseteq V$ , con  $A$  famiglia di vettori linearmente indipendenti e  $G$  generatori, esiste una *base algebrica*  $B$  con  $A \subseteq B \subseteq G$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '02G']

La dimostrazione in generale necessita del Lemma di Zorn; anzi, questo enunciato è equivalente all' Assioma della Scelta; questo è stato dimostrato da A. Blass in [7]; si veda anche Part 1 §6 [22].

E2.84 Difficoltà:\* <sup>†23</sup> Considerate lo spazio quoziente

[O2M]

$$\mathbb{X} = \{a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\} / \sim$$

dove  $\{a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  sono tutte le successioni a valori naturali, e dove definiamo  $a \sim b$  sse  $a_k = b_k$  definitivamente in  $k$ .

Definiamo l'ordinamento

$$a \leq b \iff \exists n \text{ s.t. } \forall k \geq n, a_k \leq b_k$$

cioè  $a \leq b$  quando  $a_k \leq b_k$  definitivamente. Questa è un preordine e

$$a \sim b \iff (a \leq b \wedge b \leq a)$$

e dunque passa al quoziente dove diviene un ordine, si veda Prop. 2.191.

Sia ora  $a^k$  una successione crescente di successioni, cioè  $a^k \leq a^{k+1}$ ; notiamo che essa è limitata superiormente da  $b$  definito come

$$b_n = \sup_{h, k \leq n} a_h^k.$$

Possiamo dunque applicare il Lemma di Zorn a  $(\mathbb{X}, \leq)$  per dire che esistono massimali.

<sup>†23</sup>Originalmente pubblicato in <https://dida.sns.it/dida2/Members/mennucci/curiosa/>

Dati  $a, b$  definiamo

$$a \vee b = (a_n \vee b_n)_n$$

allora è facilmente verificato che  $a \leq a \vee b$ . Questo ci dice che l'ordinamento è *diretto*, si veda 2.112.

Concludiamo dunque che  $(\mathbb{X}, \leq)$  ha un unico massimo, per 2.120.

Questo però è falso, perché se si prende una qualsiasi successione  $a$ , la successione  $(a_n + 1)_n$  è più grande di  $a$ .

Qual è l'errore nel ragionamento precedente? Cosa si può dunque concludere riguardo a  $(\mathbb{X}, \leq)$ ?

Moltri altri esercizi necessitano del Lemma di Zorn, dell'Assioma della Scelta, o del Teorema di Zermelo; ne citiamo alcuni: 2.178, 2.261, 2.295, 2.296, 2.297, 2.300.

**Nota 2.85.** “L'assioma della scelta è ovviamente vero, il principio del buon ordinamento ovviamente falso, e che si può dire del lemma di Zorn?” – Jerry Bona<sup>†24</sup> [02c]

*Questa è una barzelletta<sup>†25</sup>: anche se i tre enunciati sono matematicamente equivalenti, molti matematici trovano che l'assioma della scelta sia intuitivo, il principio del buon ordinamento sia controintuitivo, e il lemma di Zorn sia troppo complesso per qualsiasi intuizione.*

---

<sup>†24</sup>Come citato in: [16].

<sup>†25</sup>Paragrafo citato da [50].



## §2.c Relazioni

[1YV]

**Definizione 2.86.** Una **relazione** fra elementi di due insiemi  $A, B$  è definita come un sottoinsieme  $R \subseteq A \times B$  del prodotto cartesiano. In genere si usa la notazione infissa  $aRb$  invece di scrivere  $(a, b) \in R$ .

[1WY]

**Definizione 2.87.** Una relazione  $R$  fra elementi di  $A$  è detta:

[23X]

- **riflessiva** se  $xRx$  per ogni  $x \in A$ ;
- **irriflessiva** o **anti-riflessiva** se  $\neg xRx$  per ogni  $x \in A$ ;
- **simmetrica** se  $xRy$  implica  $yRx$  per ogni  $x, y \in A$ ;
- **antisimmetrica** se  $aRb$  e  $bRa$  implicano  $a = b$ , per ogni  $a, b \in A$ ;
- **tricotomica** se per ogni  $x, y \in A$  vale esattamente una fra  $xRy$ ,  $yRx$  e  $x = y$ ;
- **transitiva** se  $xRy$  e  $yRz$  implicano  $xRz$ , per ogni  $x, y, z \in A$ .

Una relazione  $R$  fra elementi di  $A$  e elementi di  $B$  è detta:

- **iniettiva** se  $xRy$  e  $zRy$  implicano  $x = z$ , per ogni  $x, z \in A, y \in B$ ;
- **funzionale** se  $xRy$  e  $xRz$  implicano  $y = z$ , per ogni  $x \in A, y, z \in B$ ; una tale relazione è anche detta una “funzione parziale” (si vedano anche §2.e, 2.182);
- **totale** (a sinistra) se per ogni  $x \in A$  esiste un  $y \in B$  tale che  $xRy$ ;
- **surgettiva** (cioè “totale a destra”) se per ogni  $y \in B$  esiste un  $x \in A$  tale che  $xRy$ .

**Definizione 2.88.** Una **relazione di equivalenza** è una relazione fra elementi di  $A$  che gode delle proprietà: riflessiva, simmetrica, transitiva.

[1W5]

Le relazioni di equivalenza vengono in genere indicate con i simboli “ $\sim$ ”, “ $\approx$ ”, “ $\simeq$ ”, “ $\cong$ ”, “ $\approx$ ” etc.

**Definizione 2.89.** Una **relazione d’ordine** (o **ordinamento**) è una relazione fra elementi di  $A$  che gode delle proprietà: riflessiva, antisimmetrica, transitiva.

[1Y5]

Una relazione d’ordine è **totale** se tutti gli elementi sono **comparabili**, cioè se per ogni  $a, b \in A$  si ha  $aRb \vee bRa$ .

(Quando una relazione d’ordine non è totale, si dice che è **parziale**).

In genere si usano simboli come “ $\leq$ ” o “ $\subseteq$ ” o “ $\preceq$ ” o simili.

**Nota 2.90.** Abbiamo sopra ricalcato le definizioni in [3]; in altri testi una relazione fra elementi di  $A$  che gode delle proprietà: riflessiva, antisimmetrica, transitiva è direttamente chiamata **ordine parziale**. (cf Example 2.1.1 in [13] dove inoltre gli ordinamenti totali sono detti **linear order**). Per questa ragione aggiungeremo “(parziale)” quando vorremo indicare che l’ordinamento che stiamo discutendo potrebbe essere parziale.

[24W]

Per le relazioni d’ordine rimandiamo alla sezione §2.d

**Nota 2.91.** È uso scrivere  $a \geq b$  come sinonimo di  $b \leq a$ . Se  $a \leq b \wedge a \neq b$  scriveremo  $a < b$ ; similmente se  $a \geq b \wedge a \neq b$  scriveremo  $a > b$ . Attenzione che se la relazione non è totale, non è detto che  $\neg(a \leq b)$  sia equivalente a  $a > b$ .

[1Y7]

Vedete a questo proposito l’esercizio 2.100.

**Definizione 2.92.** Un ordinamento totale <sup>†26</sup> su un insieme  $X$  è detto un buon ordinamento se ogni sottoinsieme di  $X$  non-vuoto ha minimo. [1X0]

**Esercizi**

E2.93 Prerequisiti: 2.87. Per ogni insieme  $A$  e relazione  $R$  fra elementi di  $A$ , dire se è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e/o transitiva; se è una relazione d'ordine, dire se è totale. [1WH] (Proposto il 2022-12)

- In  $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $nRm$  sse il massimo comun divisore fra  $n$  e  $m$  è 1
- In  $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $nRm$  se e solo se  $n$  divide  $m$
- In  $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $nRm$  se e solo se  $2n$  divide  $m$
- In  $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $aRb$  se e solo se  $a \subseteq b$ .

E2.94 Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione, sia  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $B$ : dimostrate che la relazione  $R$  fra elementi di  $A$  data da [1WK]

$$xRy \iff f(x) \sim f(y)$$

è una relazione di equivalenza.

E2.95 Prerequisiti: 2.87, 2.89. [224]

Date due relazioni  $a \leq b$  e  $a < b$  per  $a, b \in A$ , mostrate che sono equivalenti:

- $a \leq b$  è una relazione d'ordine (possibilmente parziale) e identifichiamo

$$a < b = (a \leq b \wedge a \neq b) \quad ;$$

- $a < b$  è una relazione irreflessiva e transitiva e  $\forall x, y \in A$  al più una condizione fra  $x < y$ ,  $x = y$ ,  $y < x$  è vera; e identifichiamo

$$a \leq b = (a < b \vee a = b) \quad .$$

Questa relazione  $a < b$  è chiamata **ordinamento (parziale) stretto**.

E2.96 Prerequisiti: 2.87, 2.89, 2.95. Date due relazioni  $a \leq b$  e  $a < b$  per  $a, b \in A$ , mostrate che sono equivalenti: [24K]

- $a \leq b$  è una relazione d'ordine totale e

$$a < b = (a \leq b \wedge a \neq b) \quad ,$$

- $a < b$  è una relazione irreflessiva, tricotomica e transitiva e

$$a \leq b = (a < b \vee a = b) \quad .$$

Questa relazione  $a < b$  è chiamata **ordinamento totale stretto**.

E2.97 Consideriamo  $A = \mathbb{R}^2$  e consideriamo la relazione [1YH]

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x' \in \mathbb{Z} \wedge y - y' \in \mathbb{Z})$$

fra elementi di  $\mathbb{R}^2$  :

- mostrate che è una relazione di equivalenza;
- rappresentate graficamente le classi di equivalenza;
- descrivete l'insieme  $A / \sim$ .

<sup>†26</sup>In realtà la condizione di *buon ordinamento* per un ordinamento implica che è totale; lo lasciamo come esercizio 2.104.

## §2.d Ordinamenti

[1YY]

Sia  $(X, \leq)$  un insieme non vuoto e ordinato (cf definizione 2.89)

**Definizione 2.98.** Dati  $x, y \in X$  ricordiamo che  $x < y$  significa  $x \leq y \wedge x \neq y$ .

[229]

- Quando si ha che  $x \leq y$  oppure  $y \leq x$  diremo che i due elementi sono “comparabili”. Viceversa se non si ha né  $x \leq y$  né  $y \leq x$  diremo che i due elementi sono “incomparabili”.
- Un elemento  $m \in X$  si dice massimale se non esiste alcun elemento  $z \in X$  tale che  $m < z$ .
- Un elemento  $m \in X$  si dice minimale se non esiste alcun elemento  $z \in X$  tale che  $z < m$ .
- Un elemento  $m \in X$  si dice massimo se, per ogni elemento  $z \in X$ , si ha  $z \leq m$ .
- Un elemento  $m \in X$  si dice minimo se, per ogni elemento  $z \in X$ , si ha  $m \leq z$ .

Invertendo la relazione d'ordine, le definizioni di minimo/minimale divengono le definizioni di massimo/massimale (e viceversa).

### Esercizi

E2.99 Dato un insieme ordinato, mostrate che il massimo, se esiste, è unico.

[1WJ]

E2.100 Mostrate che per ogni due  $x, y \in X$  si ha uno di questi casi mutualmente esclusivi

[067]

(Svolto il 2022-10-13)

- $x = y$ ,
- $x < y$ ,
- $x > y$ ,
- $x, y$  sono incomparabili.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '068']

E2.101 Mostrate che se  $x < y \wedge y \leq z$  oppure  $x \leq y \wedge y < z$  allora  $x < z$ .

[29D]

E2.102 Mostrate che  $m \in X$  è massimale se e solo se “per ogni  $z \in X$  si ha che  $z \leq m$  oppure  $z, m$  sono incomparabili”.

[069]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '06B']

E2.103 Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione, sia  $\leq$  una relazione d'ordine su  $B$ ; consideriamo la relazione  $R$  fra elementi di  $A$  data da

[1WM]

$$xRy \iff f(x) \leq f(y) \quad ;$$

è una relazione d'ordine? E se assumiamo inoltre che  $f$  sia iniettiva?

E2.104 Mostrare che se ogni sottoinsieme non-vuoto ammette minimo, allora l'ordinamento è totale.

[1WN]

E2.105 Consideriamo  $A = \mathbb{R}^2$  e consideriamo la relazione [1YJ]

$$(x, y) \leq (x', y') \iff (x \leq x' \wedge y \leq y')$$

- mostrate che è una relazione di ordine; è parziale o totale?
- Preso  $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , consideriamolo come insieme ordinato con l'ordinamento  $\leq$ : vi sono massimi? minimi? massimali? minimali?

E2.106 Sia  $(X, \leq)$  un insieme non vuoto finito e ordinato allora ammette massimali e minimali. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '06D'] [06C] (Proposto il 2022-12)

E2.107 Si costruisca un ordinamento  $\leq$  su  $\mathbb{N}$  con questa proprietà: per ogni  $n \in \mathbb{N}$  [06F]

- l'insieme  $\{k \in \mathbb{N}, k \neq n, k \leq n\}$  degli elementi che precedono  $n$  ha esattamente due massimali,
- l'insieme  $\{k \in \mathbb{N}, k \neq n, n \leq k\}$  degli elementi che seguono  $n$  ha esattamente due minimali.

E2.108 Sia  $X$  insieme non vuoto e  $R \subseteq X^2$  una relazione d'ordine, allora esiste una relazione di ordine totale  $T$  che estende  $R$  (cioè  $R \subseteq T$ , considerando le relazioni come sottoinsiemi di  $X^2$ ). [06J] (Svolto il 2022-12)

E2.109 *Prerequisiti:* 3.7, 2.79. Sia  $X$  ordinato (parzialmente). Mostrate che sono equivalenti [263] (Svolto il 2022-10-13)

1. in ogni sottoinsieme  $A \subseteq X$  non-vuoto esiste almeno un elemento minimale;
2. non esistono funzioni  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  strettamente decrescenti.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '07Y']

Si veda anche la Proposizione 2.191.

### §2.d.a Ordinamento diretto e filtrante [2FJ]

**Definizione 2.110.** Sia  $(X, \leq)$  un insieme (parzialmente) ordinato, diremo che è **filtrante**<sup>†27</sup> se [06M] (Svolto il 2022-11-24)

$$\forall x, y \in X \exists z \in X, x < z \wedge y < z \quad . \quad (2.111)$$

Gli insiemi  $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$  con i loro usuali ordinamenti sono filtranti.

**Definizione 2.112.** Un **insieme diretto** è un insieme (parzialmente) ordinato  $(X, \leq)$  per cui [06N]

$$\forall x, y \in X \exists z \in X, x \leq z \wedge y \leq z \quad . \quad (2.113)$$

Ovviamente un ordinamento filtrante è anche diretto.

**Nota 2.114.** Abbiamo aggiunto la proprietà antisimmetrica alla usuale definizione di "Insieme Diretto", si veda [15] (o altre referenze in [34]). [0NB]

Questa scelta semplifica il trattamento (in particolare, ci permette di usare concetti già visti per insiemi ordinati, quali massimo o massimale) e allo stesso tempo, per quanto spiegato in 6.57, non cambia l'utilità della teoria sviluppata in questa sezione e in Sezione §6.d.

<sup>†27</sup>Come definito in Definizione 4.2.1 degli appunti [3].

**Definizione 2.115.** Dato un insieme diretto  $(X, \leq_X)$  un suo sottoinsieme  $Y \subseteq X$  si dice **cofinale** se [06P]

$$\forall x \in X \exists y \in Y, y \geq_X x \quad (2.116)$$

Più in generale, un altro insieme diretto  $(Z, \leq_Z)$  si dice **cofinale** in  $X$  se esiste una mappa  $i : Z \rightarrow X$  monotona debolmente crescente tale che  $i(Z)$  è cofinale in  $X$ , cioè

$$(\forall z_1, z_2 \in Z, z_1 \leq_Z z_2 \Rightarrow i(z_1) \leq_X i(z_2)) \wedge (\forall x \in X \exists z \in Z, i(z) \geq_X x) \quad (2.117)$$

(Questo secondo caso generalizza il precedente, decidendo che  $i : Y \rightarrow X$  è l'identità e  $\leq_Y$  è la restrizione di  $\leq_X$  a  $Y$ .)

**Definizione 2.118.** Se  $X$  è filtrante, “un intorno di  $\infty$  in  $X$ ” è un sottoinsieme  $U \subseteq X$  tale che [231]

$$\exists k \in X \forall j \in X, j \geq k \Rightarrow j \in U.$$

**Esercizi**

E2.119 Sia  $(X, \leq)$  un insieme ordinato filtrante, si mostri che è un insieme infinito. [06Q]  
 Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '06R'] (Proposto il 2022-11)

E2.120 Sia  $(X, \leq)$  un insieme diretto: si mostri che se esiste un elemento massimale in  $X$  allora è il massimo. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '06T'] [06S]  
 (Svolto il 2022-10-27)

E2.121 Prerequisiti: 2.110, 2.120. Sia  $(X, \leq)$  un insieme diretto. Si mostri che sono equivalenti queste proprietà: [06V]  
 (Svolto il 2022-11-24)

- $(X, \leq)$  soddisfa la proprietà filtrante (2.111),
- $(X, \leq)$  non ha massimo,
- $(X, \leq)$  non ha massimali.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '06W']

E2.122 Prerequisiti: 2.115. Sia  $(X, \leq)$  un insieme diretto, sia  $Y \subseteq X$  cofinale: si mostri che  $(Y, \leq|_Y)$  è un insieme diretto. [06X]  
 Similmente se  $(X, \leq)$  è filtrante, si mostri che  $(Y, \leq|_Y)$  è filtrante.

E2.123 Prerequisiti: 2.118. Dati  $U_1, U_2 \subseteq J$  due intorni di  $\infty$  si mostri che l'intersezione  $U_1 \cap U_2$  è un intorno di  $\infty$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '236'] [23Z]

E2.124 Prerequisiti: 2.115, 2.118. Se  $(X, \leq)$  un insieme filtrante,  $Y \subseteq X$  è cofinale, e  $U \subseteq X$  è un intorno di  $\infty$  in  $X$ , si mostri che  $U \cap Y$  è un intorno di  $\infty$  in  $Y$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '235'] [234]

Un insieme diretto  $(X, \leq)$  è un ambiente a cui si può facilmente generalizzare la nozione già vista 3.56.

**Definizione 2.125.** Sia  $P(x)$  una proposizione logica che dipende da una variabile libera  $x \in X$ . Diremo che [06Y]  
 (Svolto il 2022-10-27)

$P(x)$ vale definitivamente per $x \in X$ se	$\exists y \in X, \forall x \in X, x \geq y$ vale $P(x)$ ;
$P(x)$ vale frequentemente per $x \in X$ se	$\forall y \in X, \exists x \in X, x \geq y$ per cui $P(x)$ .

**Esercizi**

E2.126 La proprietà 3.60 si riformula in questo modo.

[070]

Mostrate che « $P(x)$  vale frequentemente in  $x \in X$ » se e solo se l'insieme

(Proposto il  
2022-10-27)

$$Y = \{x \in X : P(x)\}$$

è cofinale in  $X$ .

E2.127 Prerequisiti: 2.125, 2.123. Mostrate che « $P(x)$  vale definitivamente in  $x \in X$ » se e solo se l'insieme

[233]

$$U = \{x \in X : P(x)\}$$

è un intorno di  $\infty$  in  $X$ .

E2.128 Si verifichi per esercizio che le proprietà 3.58, 3.59, 3.61 e 3.62 viste in Sez. §3.g valgono anche in questo caso 2.125 più generale.

[06Z]

E2.129 Supponiamo che l'insieme  $X$  abbia associato una relazione  $R$  che sia riflessiva e transitiva e per cui

[2B2]

$$\forall x, y \in X \exists z \in X, xRz, yRz \quad . \quad (2.130)$$

(come visto in (2.113))

Questa coppia  $(X, R)$  è un "Insieme Diretto" secondo la definizione usuale (cfr. [15] o altre referenze in [34]).

Mostrate che esiste un'altra relazione  $\leq$  tale che

- $\leq$  è un ordine parziale che soddisfa (2.113);
- $R$  estende  $\leq$  cioè

$$\forall x, y \in X x \leq y \Rightarrow xRy \quad ;$$

- inoltre  $(X, \leq)$  è cofinale in  $(X, R)$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2GM']

Altri esercizi sull'argomento sono 5.12, 7.15, e in Sezione §6.d.

**§2.d.b Ordinamento lessicografico**

[2FH]

**Definizione 2.131.** Dati due insiemi ordinati  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$ , posto  $Z = X \times Y$ , definiamo l'**ordinamento lessicografico**  $\leq_Z$  su  $Z$  come segue; siano  $z_1 = (x_1, y_1) \in Z$  e  $z_2 = (x_2, y_2) \in Z$ , allora:

[071]

- nel caso  $x_1 \neq x_2$ , allora  $z_1 \leq_Z z_2$  se e solo se  $x_1 \leq_X x_2$ ;
- nel caso  $x_1 = x_2$ , allora  $z_1 \leq_Z z_2$  se e solo se  $y_1 \leq_Y y_2$ .

Questo si estende al prodotto di più insiemi: dati due vettori, si considerano i primi elementi, se sono diversi si usa il primo ordinamento, se sono uguali si passa ai secondi elementi, ecc.

**Esercizi**

E2.132 Si verifichi che  $\leq_Z$  è un ordinamento. [1WP]

E2.133 Se  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$  sono ordinamenti totali, si mostri che  $(Z, \leq_Z)$  è un ordinamento totale. [072]

E2.134 Se  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$  sono buoni ordinamenti, si mostri che  $(Z, \leq_Z)$  è un buon ordinamento. [073]

E2.135 Sia  $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  ordinato con l'ordinamento lessicografico. Si costruisca una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '075'] [074]

E2.136 Consideriamo  $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$  ordinato con l'ordinamento lessicografico. Si mostri che non esiste una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '077'] [076]

**§2.d.c Ordinamento totale, sup e inf**

[2FM]

Sia  $\leq$  un ordinamento totale su  $X$  insieme non vuoto.

**Definizione 2.137.** Sia  $A \subseteq X$ . I **maggioranti** di  $A$  sono [22R]

$$M_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : \forall a \in A, a \leq x\} .$$

Un insieme  $A$  è **superiormente limitato** quando esiste un  $x \in X$  tale che  $\forall a \in A, a \leq x$ , cioè esattamente quando  $M_A \neq \emptyset$ .

Se  $M_A$  ha minimo  $s$ ,  $s$  è l'**estremo superiore** di  $A$ , e scriveremo  $s = \sup A$ .

Invertendo la relazione d'ordine, otteniamo la definizione **maggioranti, inferiormente limitato, estremo inferiore**.

**Lemma 2.138.** Sia  $A \subseteq X$  non vuoto. Ricordiamo queste proprietà dell'estremo superiore. [22S]

1. Se  $A$  ha massimo  $m$  allora  $m = \sup A$ .
2. Sia  $s \in X$ . Si ha  $s = \sup A$  se e solo se
  - per ogni  $x \in A$  si ha  $x \leq s$ .
  - per ogni  $x \in X$  con  $x < s$  esiste  $y \in A$  con  $x < y$ .

Quest'ultima proprietà è di larghissimo uso nell'analisi!

La dimostrazione è lasciata come (utile) esercizio. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '22T']

**Esercizi**

E2.139 Sia  $B$  un insieme non vuoto che è limitato dal basso, sia  $L$  l'insieme dei minoranti di  $B$ ; notiamo che  $L$  è superiormente limitato, e supponiamo che esista  $\alpha = \sup L$ : allora  $\alpha \in L$  e  $\alpha = \inf B$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '079'] [078] (Proposto il 2022-10-13)

E2.140 **Prerequisiti:** 2.139. Mostrate che se per l'ordinamento totale di  $X$  esistono i "sup" allora esistono anche gli "inf"; e viceversa. Precisamente, mostrate che sono equivalenti: [07B] (Proposto il 2022-10-13)

- Ogni insieme non vuoto inferiormente limitato in  $X$  ammette estremo inferiore;
- ogni insieme non vuoto superiormente limitato in  $X$  ammette estremo superiore.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '207']

### §2.d.d Ordinamento totale, intervalli

[2DW]

Sia  $\leq$  un ordinamento totale su  $X$  insieme non vuoto.

**Definizione 2.141.** Un insieme  $I \subseteq X$  è un **intervallo** se per ogni  $x, z \in I$  e ogni  $y \in X$  con  $x < y < z$  si ha  $y \in I$ .

[07C]

Notate che l'insieme vuoto è un intervallo.

**Definizione 2.142.** Dati  $x, z \in X$  si definiscono i seguenti intervalli standard

[07D]

$$\begin{aligned} (x, z) &= \{y \in X : x < y < z\} \\ (x, z] &= \{y \in X : x < y \leq z\} \\ (x, \infty) &= \{y \in X : x < y\} \\ [x, z) &= \{y \in X : x \leq y < z\} \\ [x, z] &= \{y \in X : x \leq y \leq z\} \\ [x, \infty) &= \{y \in X : x \leq y\} \\ (-\infty, z) &= \{y \in X : y < z\} \\ (-\infty, z] &= \{y \in X : y \leq z\} \\ (-\infty, \infty) &= X. \end{aligned}$$

Notate che vi sono 9 casi, combinazioni di tre per l'estremo destro e tre per l'estremo sinistro. Intendiamo che  $\infty, -\infty$  sono simboli e non elementi di  $X$ ; per questo motivo se  $X$  ha massimo  $m$ , allora gli intervalli si scrivono preferibilmente come  $(x, \infty) = (x, m]$  e  $[x, \infty) = [x, m]$ ; similmente se ha un minimo.

[24Y]

### Esercizi

E2.143 Prerequisiti: 2.141, 2.142, 2.59.

[07F]

Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia non vuota di intervalli.

Mostrate che la intersezione  $\bigcap \mathcal{F}$  di tutti gli intervalli è un intervallo.

Supponiamo che l'intersezione  $\bigcap \mathcal{F}$  sia non vuota, mostrate che la unione  $\bigcup \mathcal{F}$  è un intervallo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '07G']

E2.144 Prerequisiti: 2.141, 2.142.

[07H]

Si trovi un esempio di insieme  $X$  con ordinamento totale, in cui vi è un intervallo  $I$  che non ricade in nessuna delle categorie viste in 2.142.

(Svolto il 2022-10-13)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '07J']

E2.145 Prerequisiti: 2.141, 2.142, 2.143.

[07K]

Sia  $A \subseteq X$  un insieme non vuoto; sia  $I$  il più piccolo intervallo che contiene  $A$ ; questo è definito come l'intersezione di tutti gli intervalli che contengono  $A$  (e l'intersezione

(Proposto il 2022-10-13)



è un intervallo, per 2.143). Sia  $M_A$  la famiglia dei maggioranti di  $A$ ,  $M_I$  di  $I$ ; si mostri che  $M_A = M_I$ . In particolare  $A$  è superiormente limitato se e solo  $I$  è superiormente limitato; se inoltre  $A$  ha estremo superiore, si avrà  $\sup A = \sup I$ . (Similmente per minoranti e estremi inferiori). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '07M']

E2.146 Prerequisiti: 2.141, 2.142, 2.143, 2.145.

[07N]

Sia  $X$  un insieme totalmente ordinato. Mostrate che le due seguenti sono equivalenti.

- Ogni  $A \subseteq X$  non vuoto limitato dall'alto e dal basso ammette estremo superiore e inferiore.
- Ogni intervallo  $I \subseteq X$  non vuoto ricade in una delle categorie viste in 2.142.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '07P']

E2.147 Prerequisiti: 2.141, 2.142, 2.143. Difficoltà: \*.

[206]

All'inizio della sezione abbiamo assunto che l'ordinamento  $\leq$  su  $X$  sia totale. Le definizioni di *intervallo* in 2.141 e in 2.142 si possono però dare anche per un ordinamento che non sia (necessariamente) totale. Cosa succede nell'esercizio 2.143 quando l'ordinamento non è totale? Quale risultato è vero, quale è falso, e nel caso che controesempio possiamo dare?

### §2.d.e Tipi di ordine

**Definizione 2.148.** *Dati due insiemi non vuoti ordinati  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$ , diremo che “hanno lo stesso tipo d'ordine”, o più brevemente che sono “equiordinati”<sup>†28</sup>, se esiste una funzione bigettiva monotona strettamente crescente  $f : X \rightarrow Y$ , la cui inversa  $f^{-1}$  è strettamente crescente. La funzione  $f$  è detta “isomorfismo d'ordine”, o “isotonia”.*

[07V]

**Nota 2.149.** *Notate che se  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$  sono equiordinati allora  $X$  e  $Y$  sono equipotenti; però dato un insieme infinito  $X$ , esistono su di esso ordinamenti di diverso tipo — anche se consideriamo solo i buoni ordinamenti. (Si veda ad esempio l'esercizio 2.254)*

[21R]

**Nota 2.150.** *Notate che, se due insiemi sono equiordinati, allora godono delle stesse proprietà: se uno è totalmente ordinato, lo è anche l'altro; se uno è bene ordinato, lo è anche l'altro; etc etc.... Si veda 2.152.*

[21V]

### Esercizi

E2.151 Mostrate che la relazione “avere lo stesso tipo d'ordine” è una relazione d'equivalenza. Dato un insieme  $X$ , consideriamo tutti i possibili ordinamenti su  $X$ , la relazione definisce dunque classi di equivalenza, e ogni classe è (per l'appunto) un “tipo d'ordine” su  $X$ .

[220]

E2.152 Dati due insiemi non vuoti ordinati  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$ , sia  $f : X \rightarrow Y$  come da definizione 2.148.

[22P]

(Proposto il 2023-01-17)

- Se  $A \subseteq X$  e  $m = \max A$  allora  $f(m) = \max f(A)$ ; similmente per i minimi;

<sup>†28</sup>La dicitura “equiordinati” non è standard.

- $(X, \leq_X)$  è totalmente ordinato se e solo se  $(Y, \leq_Y)$  lo è;
- $(X, \leq_X)$  è bene ordinato se e solo se  $(Y, \leq_Y)$  lo è.
- Supponiamo che  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$  siano bene ordinati; siano  $S_X$  e rispettivamente  $S_Y$  le funzioni “successore” 2.241, allora si ha che  $x$  non è il massimo di  $X$  se e solo se  $f(x)$  non è il massimo di  $Y$ , e in questo caso  $y = S_X(x)$  se e solo se  $f(y) = S_Y(f(x))$ .

E2.153 Dati due insiemi non vuoti totalmente ordinati  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$ , supponiamo che esista una funzione bigettiva monotona strettamente crescente  $f : X \rightarrow Y$ : si mostri che allora la sua inversa  $f^{-1}$  è strettamente crescente, e conseguentemente  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$  sono equiordinati. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '21T'] [21P]

E2.154 Trovate un semplice esempio di due insiemi non vuoti (parzialmente) ordinati  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$ , per cui esiste una funzione bigettiva monotona strettamente crescente  $f : X \rightarrow Y$ , la cui inversa  $f^{-1}$  non è strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '21S'] [21Q]

### §2.d.f Concatenazione

**Definizione 2.155.** Dati due insiemi ordinati  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$ , con  $X, Y$  disgiunti, la concatenazione di  $X$  con  $Y$  si ottiene definendo  $Z = X \cup Y$  e dotandolo dell'ordinamento  $\leq_Z$  dato da: [21W]

- se  $z_1, z_2 \in X$  allora  $z_1 \leq_Z z_2$  se e solo se  $z_1 \leq_X z_2$ ;
- se  $z_1, z_2 \in Y$  allora  $z_1 \leq_Z z_2$  se e solo se  $z_1 \leq_Y z_2$ ;
- se  $z_1 \in X$  e  $z_2 \in Y$  allora si ha sempre  $z_1 \leq_Z z_2$ .

Questa operazione è alle volte indicata con la notazione  $Z = X \# Y$ .

Se gli insiemi non sono disgiunti, possiamo sostituirli con insiemi disgiunti definiti da  $\tilde{X} = \{0\} \times X$  e  $\tilde{Y} = \{1\} \times Y$ , poi potremo “ricopiare” i rispettivi ordinamenti, e infine potremo eseguire la concatenazione di  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$ .

### Esercizi

E2.156 Sia  $k \in \mathbb{N}$  e sia  $I = \{0, \dots, k\}$  con l'usuale ordinamento di  $\mathbb{N}$ : si mostri che la concatenazione di  $I$  con  $\mathbb{N}$  ha lo stesso tipo d'ordine di  $\mathbb{N}$ ; mentre invece la concatenazione di  $\mathbb{N}$  con  $I$  non ha lo stesso tipo d'ordine. [21X]

E2.157 Prerequisiti: 2.131, 2.148. Siano  $(X_1, \leq_1), (X_2, \leq_2)$  due insiemi disgiunti e ordinati (parzialmente) e con lo stesso tipo d'ordine. Sia  $I = \{1, 2\}$  con l'usuale ordinamento; sia  $Z = I \times X_1$  dotato dell'ordinamento lessicografico; sia  $W$  la concatenazione di  $X_1$  con  $X_2$ : mostrate che  $Z$  e  $W$  hanno lo stesso tipo d'ordine. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '221'] [21Y]

E2.158 Siano  $X_1, X_2$  due insiemi disgiunti e bene ordinati. Sia  $W$  la concatenazione di  $X_1$  con  $X_2$ : mostrate che è bene ordinato. [21Z]

## §2.e Funzioni

[1YR]

La definizione di *funzione* si può riportare alla teoria degli insiemi in questo modo.

**Definizione 2.159.** *Dati due insiemi  $A, B$ , una funzione  $f : A \rightarrow B$  è una terna*

[1Y6]

$$A, B, F$$

(dove  $A$  viene detto dominio e  $B$  codominio) e  $F$  è una relazione  $F \subseteq A \times B$  tale che

$$\forall x \in A \exists ! y \in B, xFy \quad ;$$

cioè gode delle proprietà di essere funzionale e totale (definite in 2.87).

Essendo l'elemento  $y$  unico, possiamo usare la scrittura  $y = f(x)$  per dire appunto che  $y$  è l'unico elemento in relazione  $xFy$  con  $x$ .

L'insieme  $F$  viene anche detto grafico della funzione.

**Definizione 2.160.** *Dati insiemi non vuoti  $I, A$ , una successione con indici in  $I$  e  $a$  valori in  $A$  è una funzione  $a : I \rightarrow A$ ; si usa la notazione  $(a_n)_{n \in I}$ . Per indicare il codominio, si usa anche la notazione  $(a_n)_{n \in I} \subseteq A$ . In questo testo si avrà spesso  $I = \mathbb{N}$ , e in questo caso scriveremo semplicemente  $(a_n)$ .*

[16G]

Nella pratica, la definizione di funzione si scrive sempre come  $f : A \rightarrow B$ ; per questo il grafico viene definito come

$$F = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \quad .$$

**Nota 2.161.** *Sia  $A$  insieme non vuoto, siano  $f : A \rightarrow \{0, 1\}$  e  $g : A \rightarrow \{1\}$  entrambe date da  $f(x) = g(x) = 1$  per ogni  $x \in A$ .*

[08X]

Siano  $F, G$  rispettivamente i grafici: notate che  $F = G$  (!) Diremo che  $f = g$  oppure no? Si sceglie il no, altrimenti il concetto di “surgettivo” non avrebbe senso.

Per questo nella definizione abbiamo deciso che la funzione è la terna “dominio”, “codominio”, “relazione”.

### Esercizi

E2.162 *Mostrate che la composizione di due funzioni iniettive è una funzione iniettiva.*

[1WQ]

E2.163 *Mostrate che la composizione di due funzioni surgettive è una funzione surgettiva.*

[1WR]

E2.164 *Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una assegnata funzione e  $I$  la sua immagine, dimostrate che esiste  $A \subseteq \mathbb{N}$  tale che  $f|_A$  è iniettiva e  $f(A) = I$ . (Sugg. può essere utile sapere che l'usuale ordinamento di  $\mathbb{N}$  è un buon ordinamento cf 2.235 e 3.28).*

[1WS]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1WT']

Nota: il risultato è vero per qualunque funzione  $f : A \rightarrow B$ , ma la dimostrazione richiede l'assioma della scelta.

E2.165 *Siano  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow J$  data da  $f(x) = \sin(x)$ . Scegliendo  $I = \mathbb{R}$  o  $I = [0, \pi/2]$  oppure  $I = [-\pi/2, \pi/2]$ , e scegliendo  $J = \mathbb{R}$  o  $J = [-1, 1]$ , dite per quali scelte  $f$  è surgettiva, e per quali è iniettiva.*

[08Y]

(Proposto il 2022-12)

(Questo esercizio serve a farvi riflettere sulla differenza fra “formula” e “funzione”).

E2.166 Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $f : A \rightarrow B$  definita dalla formula  $f(x) = x^2$ ; dite se, per le seguenti scelte di  $A, B$ , la funzione  $f$  è iniettiva e/o surgettiva. [1X3]

1.  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$
2.  $A = \mathbb{R}, B = [0, \infty)$
3.  $A = [0, \infty), B = \mathbb{R}$
4.  $A = [0, \infty), B = [0, \infty)$

Se la funzione è bigettiva, come si chiama comunemente la sua inversa?

(Questo esercizio serve a farvi riflettere sulla differenza fra “formula” e “funzione”).

E2.167 Date  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definite da  $f(n) = n^2 - 1$  e  $g(n) = (n + 1)^2$ , scrivete esplicitamente  $f \circ g$  e  $g \circ f$ , dite se coincidono o sono funzioni diverse. [1X4]

E2.168 Trovate un esempio di  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  per cui si ha  $f \circ g \equiv g \circ f$ , ma né  $f$  né  $g$  sono bigettive. [1X5]

E2.169 Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bigettiva, sia  $F \subseteq \mathbb{R}^2$  il suo grafico; sia  $f^{-1}$  l'inversa di  $f$  e sia  $G$  il suo grafico; mostrate che  $G$  è il simmetrico di  $F$  rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. [1X6]

E2.170 Siano  $D, C$  insiemi non vuoti e  $f : D \rightarrow C$  una funzione. Siano  $I$  una famiglia non vuota di indici,  $B_i \subseteq C$  per  $i \in I$ . Dato  $B \subseteq C$  ricordiamo che la **controimmagine** di  $B$  è [091]

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D, f(x) \in B\} ,$$

Dato  $B \subseteq C$  sia  $B^c = \{x \in C, x \notin B\}$  il complementare. Mostrate queste proprietà della controimmagine.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad (2.171)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad (2.172)$$

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c . \quad (2.173)$$

E2.174 Siano  $D, C$  insiemi non vuoti e  $f : D \rightarrow C$  una funzione. Siano  $I$  una famiglia non vuota di indici,  $A_i \subseteq D$ , per  $i \in I$ . Dato  $A \subseteq D$  ricordiamo che la **immagine** di  $A$  è il sottoinsieme  $f(A)$  di  $C$  dato da [092]

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x), x \in A\} .$$

Mostrate queste proprietà della immagine.

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i) .$$

Mostrate che la funzione è iniettiva se e solo se

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \quad (2.175)$$

è un'uguaglianza per ogni scelta di  $A_1, A_2 \subseteq D$ .

E2.176 Siano  $D, C$  insiemi non vuoti e  $f : D \rightarrow C$  una funzione. Dato  $U \subseteq C$  mostrate che [250]

$$f(f^{-1}(U)) \subseteq U;$$

se  $f$  è surgettiva mostrate che si ha uguaglianza; trovate un esempio dove non si ha uguaglianza.

E2.177 Siano  $D, C$  insiemi non vuoti e  $f : D \rightarrow C$  una funzione. Dato  $A \subseteq D$  mostrate che [251]

$$f^{-1}(f(A)) \supseteq A;$$

se  $f$  è iniettiva mostrate che si ha uguaglianza; trovate un esempio dove non si ha uguaglianza.

E2.178 Siano  $A, B$  insiemi non vuoti. [28X]

- Supponiamo che  $f : A \rightarrow B$  sia una funzione iniettiva, allora esiste una funzione surgettiva  $g : B \rightarrow A$  tale che  $g \circ f = \text{Id}_A$  (la funzione identità). (Una tale  $g$  è chiamata *inversa sinistra* di  $f$ ).
- Supponiamo che  $g : B \rightarrow A$  sia una funzione surgettiva, allora esiste una funzione iniettiva  $f : A \rightarrow B$  tale che  $g \circ f = \text{Id}_A$ . (Una tale  $f$  è chiamata *inversa destra* di  $g$ ).

La dimostrazione della seconda asserzione richiede l'Assioma della Scelta (si veda 2.82).

Viceversa.

- Se  $f : A \rightarrow B$  ha una *inversa sinistra*, allora è iniettiva.
- Se  $g : B \rightarrow A$  ha una *inversa destra* allora è surgettiva.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2BY']

E2.179 Sia  $A$  un insieme e sia  $g : A \rightarrow A$  iniettiva. Definiamo la relazione  $x \sim y$  che è vera quando si ha un  $n \geq 0$  per cui  $x = g^n(y)$  oppure  $x = g^n(y)$ ; dove [093]

$$g^n = \overbrace{g \circ \dots \circ g}^n$$

è la  $n$ -esima iterata della composizione. (Decidiamo che  $g^0$  è la identità). Moststrate che  $x \sim y$  è una relazione di equivalenza. Studiate le classi di equivalenza. Sia  $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} g^n(A)$  l'intersezione delle immagine ripetute. Mostrate che ogni classe è interamente contenuta in  $U$  o ne è esterna.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '094']

E2.180 Mostrate che esiste una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(f(x)) = -x$ . Esiste una funzione continua per cui  $f(f(x)) = -x$ ? (Sugg. mostrate che per ogni tale  $f$  si ha  $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '096'] [095]

E2.181 Mostrate che esiste una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tale che  $f(f(x)) = \sin(x)$ . Esiste una funzione continua? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '098'] [097]

E2.182 Siano  $D, C$  insiemi non vuoti. Una **funzione parziale** da  $D$  in  $C$  è una funzione  $\varphi : B \rightarrow C$  dove  $B \subseteq D$ . (La definizione di “funzione” è in 2.159).

[01P]  
(Svolto il  
2022-11-15)

Può far comodo pensare alla funzione parziale come a una relazione  $\Phi \subseteq D \times C$  tale che, se  $(x, a), (x, b) \in \Phi$  allora  $a = b$  (si veda 2.87). Le due nozioni sono equivalenti in questo senso: data  $\Phi$  costruiamo il dominio di  $\varphi$ , che chiameremo  $B$ , con la proiezione di  $\Phi$  sul primo fattore cioè  $B = \{x \in D : \exists c \in C, (x, c) \in \Phi\}$ , e definiamo  $\varphi(x) = c$  come l'unico elemento  $c \in C$  tale che  $(x, c) \in \Phi$ ; viceversa  $\Phi$  è il grafico di  $\varphi$ .

Le funzioni parziali, viste come relazioni  $\Phi$ , sono naturalmente ordinate per inclusione; equivalentemente  $\varphi \leq \psi$  se  $\varphi : B \rightarrow C$  e  $\psi : E \rightarrow C$  e  $B \subseteq E \subseteq D$  e  $\varphi = \psi|_B$ .

Sia ora  $U$  una **catena**, cioè una famiglia di funzioni parziali che è totalmente ordinata secondo l'ordinamento precedentemente dato; vedendo ogni funzione parziale come relazione, sia  $\Psi$  l'unione di tutte le relazioni in  $U$ ; mostrate che  $\Psi$  è il grafico di una funzione parziale  $\psi : E \rightarrow C$ , il cui dominio  $E$  è l'unione di tutti i domini delle funzioni in  $U$ , e la cui immagine  $I$  è l'unione di tutte le immagini delle funzioni in  $U$ .

Se inoltre tutte le funzioni in  $U$  sono iniettive, mostrate che  $\psi$  è iniettiva.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '01Q']

## §2.f Funzioni elementari

### Esercizi

E2.183 Siano  $n, m, k$  interi positivi. Si dimostri che il numero  $(n + \sqrt{m})^k + (n - \sqrt{m})^k$  è intero.

[09K]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '09H']

E2.184 Sia  $K$  un intero positivo,  $N$  un intero, sia  $I = \{N, N+1, \dots, N+K\}$  la successione degli interi da  $N$  a  $N+K$ . Per ogni  $n \in I$  fissiamo un valore intero  $a_n$ . Sia  $p$  l'unico polinomio di grado  $K$  tale che  $p(n) = a_n$  per ogni  $n \in I$ .

[09J]

- Si mostri che  $p$  ha coefficienti razionali.
- Si mostri che  $p(x)$  è intero per ogni  $x$  intero.
- Si trovi un esempio di polinomio  $p$  che assume valori interi per  $x$  intero, ma che non ha tutti coefficienti interi.
- Cosa succede se  $I$  contiene  $K+1$  interi ma non consecutivi? È ancora vero che, definito  $p(x)$  come sopra,  $p$  assume solo valori interi sugli interi?

E2.185 Sia  $p(x)$  un polinomio a coefficienti reali di grado  $n$ , si mostri che esiste  $c > 0$  tale che per ogni  $x$  si abbia  $|p(x)| \leq c(1 + |x|^n)$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '09M']

[09K]

E2.186 Si dimostri che, per  $n \geq 2$ ,

[211]

(Proposto il  
2022-12)

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \log(n)$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '212']

§2.g Passaggio al quoziente

[125]

**Definizione 2.187.** Sia  $A$  un insieme e  $\sim$  una relazione di equivalenza. Si indica con

[23M]

$$A/\sim$$

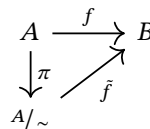
lo spazio quoziente, cioè l'insieme di tutte le classi di equivalenza; la **proiezione canonica** è la mappa  $\pi : A \rightarrow A/\sim$  che associa ad ogni  $x \in A$  la classe  $[x] \in A/\sim$ .

[20Q]

- Supponiamo di avere una funzione  $f : A \rightarrow C$ ; diremo che questa è **invariante** (o anche “**compatibile con  $\sim$** ”) se

$$\forall x, y \in A, \quad x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y) \quad . \quad (2.188)$$

Questo comporta che  $f$  è costante su ogni classe di equivalenza; dunque  $f$  **passa al quoziente**, cioè è ben definita una funzione  $\tilde{f} : A/\sim \rightarrow B$  tale che  $\tilde{f}([x]) = f(x)$  per ogni  $x \in A$ ; cioè  $\tilde{f} \circ \pi \equiv f$ .



- Similmente ci comportiamo se  $f$  è una funzione a più argomenti  $f : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow C$ , e su uno o più di questi insiemi  $A_i$  sono presenti relazioni di equivalenza: in questo caso possiamo far passare ai quozienti le variabili associate. Ad esempio nel caso che vi sia una relazione di equivalenza  $\sim$  su  $A_1$ , richiederemo che

$$\forall x, y \in A_1, \forall a_2 \in A_2 \dots \forall a_n \in A_n \dots \quad x \sim y \Rightarrow f(x, a_2, \dots, a_n) = f(y, a_2, \dots, a_n)$$

e allora potremo *passare al quoziente* e definire la funzione  $\tilde{f} : A_1/\sim \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow C$  in modo che

$$\tilde{f}(\pi(x), a_2, \dots, a_n) = f(x, a_2, \dots, a_n) \quad .$$

- Un simile ragionamento può essere fatto per le relazioni  $R \in A \times B$ ; formalmente possiamo ricondurci al caso precedente pensando a  $R$  come a una funzione che ha dominio  $A \times B$  e codominio l'insieme {"vero", "falso"}; per essere più espliciti, diremo che  $R$  è invariante rispetto alla relazione  $\sim$  su  $A$  se

$$\forall x, y \in A, \forall b \in B \quad x \sim y \Rightarrow (xRb \Leftrightarrow yRb) \quad ;$$

e in questo caso possiamo definire la relazione  $\tilde{R}$  “*proiettata al quoziente*” fra  $A/\sim$  e  $B$ .

- In certi casi invece una funzione *passa al quoziente* contemporaneamente al dominio e al codominio; vediamo il caso di una funzione di due argomenti, che sarà usato in seguito. Supponiamo di avere una funzione  $f : A \times A \rightarrow A$ ; diremo che questa è **invariante** se

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow \pi \times \pi & & \downarrow \pi \\ A/\sim \times A/\sim & \xrightarrow{\tilde{f}} & A/\sim \end{array}$$

$$\forall x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in A, \quad (x \sim \tilde{x} \wedge y \sim \tilde{y}) \Rightarrow f(x, y) \sim f(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad ; \quad (2.189)$$

allora  $f$  **passa al quoziente**, cioè è ben definita una funzione

$$\tilde{f} : A/\sim \times A/\sim \rightarrow A/\sim$$

tale che

$$\forall x, y \in A \quad \tilde{f}([x], [y]) = [f(x, y)] \quad .$$

**Proposizione 2.190.**

[126]

- Supponiamo che la funzione  $f : A \times A \rightarrow A$  sia invariante per la relazione d'equivalenza  $\sim$  in tutte le sue variabili, nel senso definito in (2.189) sia  $\tilde{f}$  la proiezione al quoziente

$$\tilde{f} : A/\sim \times A/\sim \rightarrow A/\sim \quad .$$

Se  $f$  è commutativa (risp. associativa) allora  $\tilde{f}$  è commutativa (risp. associativa).

- Se  $R$  è una relazione in  $A \times A$  invariante per  $\sim$ , e  $\tilde{R}$  è riflessiva (risp simmetrica, antisimmetrica, transitiva) allora  $\tilde{\tilde{R}}$  è riflessiva (risp simmetrica, antisimmetrica, transitiva).
- Supponiamo che  $(A, \leq_A)$  e  $(B, \leq_B)$  siano ordinati e sia  $f : A \rightarrow B$  monotona; supponiamo inoltre che l'ordinamento  $\leq_A$  sia invariante rispetto a una relazione di equivalenza  $\sim$  su  $A$ , e sia  $\tilde{f} : A/\sim \rightarrow B$  la proiezione al quoziente: allora  $\tilde{f}$  è monotona.

**Proposizione 2.191.** (Replaces 06G) (Replaces 06H) Consideriamo  $R$  una relazione in  $A \times A$  transitiva e riflessiva: una tale relazione è detta un **preordine** [28]; definiamo  $x \sim y \iff (xRy \wedge yRx)$  allora  $\sim$  è una relazione di equivalenza,  $R$  è invariante per  $\sim$ , e  $\tilde{R}$  (definita come in 2.190) è una relazione d'ordine.

[127]

- Dimostrazione.*
1.  $\sim$  è chiaramente riflessiva e simmetrica; è transitiva perché se  $x \sim y, y \sim z$  allora  $xRy \wedge yRx \wedge yRz \wedge zRy$  ma essendo  $R$  transitiva si ottiene  $xRz \wedge zRx$  cioè  $x \sim z$
  2. Siano  $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in X$  tali che  $x \sim \tilde{x}, y \sim \tilde{y}$  allora si ha  $xR\tilde{x} \wedge \tilde{x}Rx \wedge yR\tilde{y} \wedge \tilde{y}Ry$  se aggiungiamo  $xRy$  per transitività otteniamo  $\tilde{x}R\tilde{y}$ ; e simmetricamente.
  3. Vediamo infine che  $\tilde{R}$  è una relazione d'ordine su  $Y$ . Usando la (buona) definizione " $[x]\tilde{R}[y] \iff xRy$ " deduciamo che  $\tilde{R}$  è riflessiva e transitiva (come del resto asserito nella proposizione precedente).  $\tilde{R}$  è anche antisimmetrica perché se per  $z, w \in A/\sim$  si ha  $z\tilde{R}w \wedge w\tilde{R}z$  allora presi  $x \in z, y \in w$  si ha  $xRy \wedge yRx$  che vuol dire  $x \sim y$  e dunque  $z = w$ .

□



**Esercizi**

E2.192 Siano  $\mathbb{Z}$  i numeri interi relativi dotati delle usuali operazioni. Sia  $p \geq 1$  intero fissato. Consideriamo la relazione di equivalenza [128]

$$n \sim m \iff p|(n - m)$$

cioè sono equivalenti quando  $n - m$  è divisibile per  $p$ .

Mostrate che vi sono  $p$  classi di equivalenza  $[0], [1], \dots, [p - 1]$  Si indica lo spazio quoziente con  $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$  o più brevemente  $\mathbb{Z}_p$ .

Mostrate che le usuali operazioni di somma e prodotto in  $\mathbb{Z}$  sono invariati (nel senso definito in (2.189)) dunque passano al quoziente.

**§2.h Numeri naturali in ZF** [246]

In questa sezione costruiremo un modello dei numeri naturali all'interno della teoria ZF degli insiemi; questo modello soddisfa gli assiomi di Peano 3.3 e ha un ordinamento che soddisfa 3.25, dunque questo modello gode di tutte le proprietà elencate in Sez. §3; per questo motivo in questa sezione approfondiremo solo le proprietà specifiche di questo modello.

**§2.h.a Successore**

**Definizione 2.193.** Dato  $x$  si definisce il **successore** come [24X]

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \cup \{x\} \quad . \quad (2.194)$$

Spesso scriveremo  $Sx$  invece di  $S(x)$  per semplicità.

Diciamo che un insieme  $A$  è **S-saturo** se  $\emptyset \in A$  e se per ogni  $x \in A$  si ha  $S(x) \in A$ . †29

**Esercizi**

E2.195 Notate che  $z \in S(x)$  se e solo se  $z \in x \vee z = x$ ; [24V]

E2.196 Prerequisiti: 2.72, 2.195. Dimostrate che  $x \in S(x)$  e  $x \not\subseteq S(x)$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '24N'] [24M]

E2.197 Prerequisiti: 2.72, (2.194), 2.195. Siano  $x, y$  elementi (qualunque, non necessariamente numeri naturali), tali che [239]

$$x \subseteq y \subseteq S(x) \quad (2.198)$$

si mostri che allora

$$x = y \vee y = S(x) \quad ;$$

dove le due condizioni precedenti sono mutualmente esclusive, e (nell'ipotesi (2.198) precedente) la seconda vale se e solo se  $x \in y$ ; riassumendo

$$(2.198) \Rightarrow (x = y \iff y \neq S(x) \iff x \notin y) \quad .$$

Notate l'analogia con 2.243.

E2.199 Si mostri che la intersezione di insiemi S-saturi è un insieme S-saturo. [245]

E2.200 Prerequisiti: 2.72, (2.194), 2.195.<sup>†30</sup> Mostrate che [1YM]

$$x = y \iff S(x) = S(y) .$$

In particolare questo dimostra che, se  $A$  è un insieme S-saturo, allora è ben definita la funzione  $S : A \rightarrow A$ , il cui grafico è la relazione

$$\{(x, y) \in A^2 : y = S(x)\} ;$$

inoltre  $S$  è iniettiva.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1YN']

E2.201 Trovate un esempio di  $x, y$  tali che  $x \in y \wedge x \subseteq y$  ma  $S(x) \notin S(y)$  [24Q]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '24R']

E2.202 Mostrate che se  $x \in y \wedge x \subseteq y$  allora  $S(x) \subseteq y$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '24T'] [24S]

### §2.h.b Numeri naturali in ZF

**Definizione 2.203.** *L'assioma dell'infinito garantisce che esiste un insieme  $A$  che è S-saturo.* [243]

Usando l'assioma dell'infinito 2.203 si può mostrare la esistenza dell'insieme dei numeri naturali.

**Teorema 2.204.**  $\mathbb{N}$  è il più piccolo insieme S-saturo. [244]

*Dimostrazione.* Dato un insieme  $A$  che sia S-saturo, si definisce  $\mathbb{N}_A$  come l'intersezione di tutti i sottoinsiemi S-saturi di  $A$ . Per 2.199,  $\mathbb{N}_A$  è S-saturo. Dati due insieme  $A, B$  che siano S-saturi, si mostra che  $\mathbb{N}_A = \mathbb{N}_B$ : si indica dunque con  $\mathbb{N}$  questo insieme. In particolare, dato un insieme  $A$  che sia S-saturo, si ha  $\mathbb{N} \subseteq A$ .  $\square$

**Esempio 2.205.** *In questo modello il primo numero naturale è 0 ed è identificato con  $\emptyset$ . Poi* [291]

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\emptyset\}, \\ 2 &= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ 3 &= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

**Nota 2.206.** *Vale questo risultato* [25C]

$$\forall y \in \mathbb{N}, y \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}, S(x) = y$$

questo può essere dimostrato per induzione, come in 3.2, o mostrando che se

$$\exists y \in \mathbb{N}, y \neq \emptyset \wedge \forall x \in \mathbb{N}, S(x) \neq y$$

<sup>†29</sup>In [14] un tale insieme viene definito "inductive".

<sup>†30</sup>Proposizione 1.7.4 punto 5 in [3].

allora  $\mathbb{N} \setminus \{y\}$  sarebbe un insieme  $S$ -saturato più piccolo di  $\mathbb{N}$ , una contraddizione. In particolare da 2.200 si ottiene che la funzione successore

$$S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

è bigettiva.

Se  $n \neq 0$  chiameremo  $S^{-1}(n)$  il **predecessore** di  $n$ .

Possiamo anche dimostrare direttamente il principio di induzione.

**Teorema 2.207** (Principio di induzione). *Sia  $A \supseteq \mathbb{N}$  e  $P(n)$  una proposizione logica che possa essere valutata per  $n \in A$ . Supponiamo siano soddisfatte le due seguenti ipotesi:* [23B]

- $P(n)$  è vera per  $n = 0$  e
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(S(n))$ ;

allora  $P$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

La prima ipotesi è nota come “base dell’induzione” e la seconda come “passo induttivo”

*Dimostrazione.* Sia  $U = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$  sappiamo che  $0 \in U$  e che  $\forall x, x \in U \Rightarrow S(x) \in U$ , così  $U$  è  $S$ -saturato e  $U \subseteq \mathbb{N}$  si conclude  $U = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Teorema 2.208.** *Consideriamo la relazione d’ordine  $\subseteq$  su  $\mathbb{N}$ ; allora* [24D]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \subseteq Sy \wedge x \neq Sy) \iff (x \subseteq y) \quad . \quad (2.209)$$

Questo sarà dimostrato nell’Esercizio 2.218.

Per dimostrare il teorema precedente si possono usare gli esercizi nella prossima sezione.

**Nota 2.210.** *Questo modello di  $\mathbb{N}$  soddisfa gli Assiomi di Peano; inoltre la relazione d’ordine soddisfa i principi richiesti in Ipotesi 3.25; dunque questo modello di  $\mathbb{N}$  gode di tutte le proprietà presentate in Sez. §3: le diverse versioni del principio di induzione;  $(\mathbb{N}, \subseteq)$  è bene ordinato; le definizioni per ricorsione; l’aritmetica; ecc.* [26K]

Quando vorremo confrontare questo modello con altri modelli, lo indicheremo con  $\mathbb{N}_{ZF}$ .

Le proprietà dell’insieme ordinato  $\mathbb{N}, \subseteq$  sono dunque queste.

**Proposizione 2.211.** *Questo modello di  $\mathbb{N}$  è un insieme bene ordinato dall’ordinamento* [26J]

$$n \leq m \iff n \subseteq m \quad .$$

Inoltre in questo modello si ha

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \in m \iff (n \subseteq m \wedge n \neq m) \quad . \quad (2.212)$$

dunque, definendo (come usuale)

$$n < m \doteq (n \subseteq m \wedge n \neq m)$$

possiamo scrivere

$$n \in m \iff n < m \quad .$$

Questo è dimostrato negli esercizi successivi, e in particolare in 2.220.

Per approfondimenti si veda negli appunti del corso (Cap. 1 Sez. 7 in [3]); o anche in [14],[13].

**§2.h.c Insiemi transitivi**

**Definizione 2.213.** Un insieme  $A$  si dice **transitivo** se valgono queste condizioni equivalenti: [24Z]

•

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \subseteq A \quad ,$$

cioè ogni elemento di  $A$  è anche un sottoinsieme di  $A$ ;

•

$$\forall x, \forall y, x \in y \wedge y \in A \Rightarrow x \in A \quad .$$

**Esempio 2.214.** Esempi di insiemi transitivi sono: [290]

$$\begin{aligned} \{\} &= 0 \\ \{\{\}\} &= 1, \\ \{\{\}, \{\{\}\}\} &= 2, \\ \{\{\}, \{\{\}, \{\{\{\}\}\}\} & \\ \{\{\}, \{\{\}, \{\{\{\}\}\}, \{\{\{\{\}\}\}\} & \\ &\dots \\ \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\} &= 3 \\ \{\{\}, \{\{\}, \{\{\{\}\}\}, \{\{\{\{\}\}\}\} & \\ &\dots \end{aligned}$$

Confrontando con 2.205 notate che vi sono insiemi transitivi che non sono numeri naturali.

**Esercizi**

E2.215 Se ogni elemento di  $A$  è un insieme transitivo, allora  $x \in y$  è una relazione transitiva in  $A$ . (Notate che questo vale anche quando  $A$  non è un insieme transitivo). [25J]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '25K']

E2.216 Dimostrate che per ogni  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m$  è un insieme transitivo. [257]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '258']

E2.217 Prerequisiti: 2.213, 2.202, 2.216. [26N]

$\forall n, k \in \mathbb{N}$  se  $n \in k$  allora  $S_n \subseteq k$ .

(Sugg: si può dimostrare senza induzione, usate il fatto che ciascun  $n \in \mathbb{N}$  è un insieme transitivo).

E2.218 Prerequisiti: 2.217, 2.72. Per concludere il Teorema 2.208 dobbiamo dimostrare (2.209), cioè [26P]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \subseteq S_y \wedge x \neq S_y) \iff (x \subseteq y) \quad . \quad (2.209)$$

Dimostrate che se  $X$  è un insieme in cui ogni elemento è transitivo allora

$$\forall x, y \in X, (x \subseteq Sy \wedge x \neq Sy) \iff (x \subseteq y) \quad . \quad (2.219)$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '26Q']

Gli esercizi precedenti dimostrano il Teorema 2.208, dopodiché dai risultati in Sez. §3 otteniamo che  $(\mathbb{N}, \subseteq)$  è bene ordinato.

A seguire altri interessanti esercizi.

### Esercizi

E2.220 Sappiamo da 2.210 che la relazione  $n \subseteq m$  è totale in  $\mathbb{N}$ . Dimostrate che [269]

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \in m \iff (n \subseteq m \wedge n \neq m) \quad . \quad (2.212)$$

Per 2.96 questo implica

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \subseteq m \iff (n \in m \vee n = m) \quad .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '26B']

E2.221 Mostrate questa affermazione [265]

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \in k \quad .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '266']

E2.222 Prerequisiti: 2.208, 2.211. Dimostrate che [25D]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x \subseteq y \wedge x \neq y \Rightarrow Sx \subseteq y \quad .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '279']

E2.223 Fissato  $N \in \mathbb{N}$ , consideriamo la relazione d'ordine  $n \subseteq m$  per  $n, m \in N$ . Dato che  $N \subseteq \mathbb{N}$  è bene ordinato, allora la Proposizione 2.211 implica che  $(N, \subseteq)$  è bene ordinato; cionondimeno provate a dimostrare direttamente per induzione che  $n \subseteq m$  è un buon ordinamento in  $N$ . [25W]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '25X']

E2.224 Dimostrate che [25Z]

$$\bigcup \mathbb{N} = \mathbb{N} \quad .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '260']

### §2.h.d Ordinali

Sfruttando i risultati precedenti, possiamo dare qualche cenno della teoria degli ordinali.

**Definizione 2.225.** Un *ordinale* (secondo Von Neumann) è un insieme transitivo  $A$  tale che ogni suo elemento è un insieme transitivo.

**Esercizi**

E2.226 Prerequisiti: 2.72, 2.95. Se  $A$  è un insieme dove  $\in$  è transitiva, definiamo [25Q]

$$x \leq y \doteq x \in y \vee x = y$$

si mostri che  $x \leq y$  è una relazione d'ordine in  $A$  (possibilmente parziale).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '25S']

E2.227 Dimostrate che l'intersezione di insiemi transitivi è un insieme transitivo. [25B]

E2.228 Dimostrate che l'intersezione di ordinali è un ordinale. [25N]

E2.229 Dimostrate che se  $X$  è un ordinale e  $A \in X$  allora  $A$  è un ordinale. [25M]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '25P']

E2.230 Usate l'assioma di buona fondazione 2.72 per mostrare che se  $A$  è transitivo e  $A \neq \emptyset$  allora  $\emptyset \in A$ . [25G]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '25H']

E2.231 Dimostrare che  $\mathbb{N}$  è un insieme transitivo. (Sugg.: usare l'induzione). [25E]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '256']

Questo e 2.216 ci dicono che  $\mathbb{N}$  è un ordinale.

E2.232 Sia  $X$  un ordinale e [26S]

$$P_x = \{z \in X, z \in x\}$$

mostrate che

$$\forall x, y \in X, P_x = P_y \Rightarrow x = y \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '26T']

(Notate la somiglianza con 3.30).

E2.233 Prerequisiti: 2.226, 2.72, 2.109, 2.240, 2.232. [26V]

Sia  $X$  un ordinale, definiamo

$$x \leq y \doteq x \in y \vee x = y$$

sappiamo da 2.226 che  $x \leq y$  è una relazione d'ordine in  $X$  (possibilmente parziale). Si mostri che  $x \leq y$  è un buon ordinamento.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '26W']

**Nota 2.234.** Consideriamo di nuovo la proposizione 2.211 che afferma che  $\mathbb{N}_{ZF}$  è ben ordinato dalla relazione  $\subseteq$ . [275]

Sappiamo da 2.231 e 2.216 che  $\mathbb{N}_{ZF}$  è un ordinale; potremmo essere tentati di vedere la proposizione 2.211 come corollario del risultato precedente 2.233.

Questo purtroppo non è un modo ben posto per dimostrare questo risultato, a causa di questa cascata di dipendenze:

- la dimostrazione di 2.233 si basa sul risultato 2.109
- il risultato 2.109 a sua volta necessita di una definizione per ricorrenza di una funzione: questo è il Teorema 3.7

- la dimostrazione del Teorema 3.7 usa il fatto che il principio di induzione vale in  $\mathbb{N}$ .

Quindi dobbiamo prima dimostrare le proprietà di  $\mathbb{N}_{ZF}$  in modo indipendente della teoria degli ordinali, e quindi dimostrare i risultati in Sec. §3, e quindi alla fine possiamo dimostrare il risultato 2.233, che afferma che ogni ordinale è ben ordinato dalla relazione  $\subseteq$ .

## §2.i Buoni ordinamenti

[1YQ]

### Definizione 2.235.

[07R]

Un ordinamento totale  $\leq$  su un insieme  $X$  è un **buon ordinamento** se ogni sottoinsieme non vuoto di  $X$  ha un minimo.

In particolare  $X$  ha un minimo che indicheremo con  $0_X$ .

La teoria dei buoni ordinamenti è molto legata alla teoria degli ordinali, di cui abbiamo dato pochi cenni in Sez. §2.h.d. Ci limitiamo a dire che ogni ordinale è il rappresentante standard di un tipo di buon ordinamento. Usando la teoria standard degli ordinali (dovuta a Von Neumann) molti degli esercizi successivi si possono riformulare e semplificare.

[22Z]

**Nota 2.236.** Ricordiamo che l'estremo superiore  $\sup A$  di  $A \subseteq X$  è (per definizione) il minimo dei maggioranti (quando questo minimo esiste).

[07S]

Se  $X$  è bene ordinato si ha esistenza dell'estremo superiore  $\sup A$  per ogni  $A \subseteq X$  che sia superiormente limitato.<sup>†31</sup> (Se  $A$  non è superiormente limitato possiamo convenzionalmente decidere che  $\sup A = \infty$ ).

(Svolto il 2023-01-17)

### Esercizi

E2.237 Se  $(X, \leq)$  è un insieme bene ordinato e  $Y \subseteq X$  è un sottoinsieme, allora  $Y$  con (la restrizione de) l'ordinamento  $\leq$  è un insieme bene ordinato.

[07W]

E2.238 Prerequisiti: 3.7. Sia  $X$  un insieme totalmente ordinato. Mostrate che sono equivalenti:

[07X]

1.  $X$  è bene ordinato;
2. non esistono funzioni  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  strettamente decrescenti.

(Svolto il 2023-01-17)  
(Proposto il 2022-12)

(È un caso particolare di 2.109)

E2.239 Prerequisiti: 2.155, 2.131, 2.148, 2.238. Difficoltà: \*. Note: Esercizio 3 del compito del 29 Gennaio 2021.

[22F]

Sia dato  $(X, \leq_X)$  dove  $X$  un insieme infinito e  $\leq_X$  è un buon ordinamento.

(Svolto il 2022-10-13 in parte)

- Se  $X$  non ha massimo, allora esiste  $(Y, \leq_Y)$  tale che posto  $Z = Y \times \mathbb{N}$  con  $\leq_Z$  l'ordinamento lessicografico, allora  $(X, \leq_X)$  e  $(Z, \leq_Z)$  hanno lo stesso tipo d'ordine.

<sup>†31</sup>“Superiormente limitato” vuol dire che esiste  $w \in X$  tale che  $x \leq w$  per ogni  $x \in A$ . Ciò equivale a dire che l'insiemi dei maggioranti di  $A$  è non vuoto!

- Se invece  $X$  ha massimo, allora esistono  $(Y, \leq_Y)$  e  $k \in \mathbb{N}$  tale che, posto  $Z$  essere la concatenazione di  $Y \times \mathbb{N}$  e di  $\{0, \dots, k\}$  (dove  $Y \times \mathbb{N}$  ha l'ordinamento lessicografico, come sopra), allora  $(X, \leq_X)$  e  $(Z, \leq_Z)$  hanno lo stesso tipo d'ordine.
- Mostrate che, nei casi precedenti,  $Y$  è bene ordinato.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22G']

E2.240 Difficoltà:\*. Sia dato l'insieme (parzialmente) ordinato  $(X, \leq)$ ; definiamo

$$P_x \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in X : w < x\} .$$

[ODQ]

(Proposto il 2022-12)

supponiamo che  $(X, \leq)$  soddisfi questi due requisiti:

- $$\forall x, y \in X, P_x = P_y \Rightarrow x = y$$
- ogni insieme non-vuoto  $A \subseteq X$  contiene almeno un elemento minimale, cioè

$$\exists a \in A, \forall b \in A \neg(b < a) ;$$

allora  $(X, \leq)$  è bene ordinato.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '26R']

### §2.i.a Successore

**Definizione 2.241.** Sia  $X$  un insieme non vuoto bene ordinato. Supponiamo che  $x \in X$  non sia il massimo, allora l'insieme dei maggioranti  $\{y \in X : y > x\}$  non è vuoto, definiamo dunque l'elemento successore  $S(x)$  di  $x$  come

[120]

$$S(x) = \min\{y \in X : y > x\} .$$

### Esercizi

E2.242 Prerequisiti: 2.241.

[121]

Supponiamo che  $X$  non abbia massimo; sia  $S$  definito come in 2.241; si dimostri che è una funzione iniettiva

(Proposto il 2023-01-17)

$$S : X \rightarrow X ,$$

e che  $S(x) \neq 0_X$ , per ogni  $x$  (cioè,  $0_X$  non è successore di nessun elemento).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '223']

Notiamo che in generale  $S$  non sarà surgettiva come funzione  $S : X \rightarrow X \setminus \{0_X\}$ : vi potrebbero essere altri elementi  $y \in S, y \neq 0_X$  che non sono successori di alcun elemento. Se però, dato  $y \in X$ , esiste  $x \in X$  per cui  $y = S(x)$ , diremo che  $x$  è il **predecessore** di  $y$ .

E2.243 Prerequisiti: 2.241, 2.242. Se  $x \leq y \leq S(x)$  allora  $y = x \vee y = S(x)$ .

[22H]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22J']

(Il senso di questo risultato è che  $S(x)$  è l'immediato successore di  $x$ , non ci sta niente in mezzo...).



### §2.i.b Segmenti e buoni ordinamenti

Nel seguito  $(X, \leq_X)$  sarà un insieme ben ordinato.

**Definizione 2.244.** Un sottoinsieme non vuoto  $S \subseteq X$  è un **segmento iniziale** se  $\forall x \in S, \forall y \in X, y < x \Rightarrow y \in S$ . [07T]

#### Esercizi

E2.245 Mostrate che l'unione di segmenti iniziali è un segmento iniziale. [07Z]

E2.246 Se  $S \subseteq X$  è un segmento iniziale e  $S \neq X$ , mostrate che esiste ed è unico  $s \in X \setminus S$  (detto *l'elemento successivo* a  $S$ ) che estende  $S$ , tale cioè che  $S \cup \{s\}$  è un segmento iniziale. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '081'] (Si noti che vi sono analogie con il concetto di "successore" visto in 2.241...potremmo dire che  $s$  è il successore del segmento  $S$ ). [080] (Svolto il 2023-01-17)

E2.247 *Prerequisiti:* 2.141, 2.142, 2.146. Sia  $X$  un insieme bene ordinato. Mostrate che se  $I \subseteq X$  è un intervallo allora  $I = [a, b)$  oppure  $I = [a, b]$  oppure  $I = [a, \infty)$  con  $a, b \in X$ . (Il viceversa è ovviamente vero). [082] (Svolto il 2023-01-17)

In particolare un segmento iniziale è  $[0_X, b)$  o  $[0_X, b]$  oppure tutto  $X$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '083']

E2.248 Siano  $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$  insiemi non vuoti totalmente ordinati. Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione bigettiva strettamente crescente. Allora per ogni  $S \subseteq X$  segmento iniziale si ha che  $f(S)$  è un segmento iniziale di  $Y$ ; e viceversa. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '085'] [084]

E2.249 *Prerequisiti:* 2.238, 3.7, 2.148. [086]

Sia  $(X, \leq_X)$  un insieme non vuoto bene ordinato. Mostrate che se  $S \subseteq X$  è un segmento iniziale e  $(X, \leq_X)$  e  $(S, \leq_X)$  sono equiordinati dalla mappa  $f : S \rightarrow X$  allora  $X = S$  e  $f$  è l'identità.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '087'] [UNACCESSIBLE UUID '088']

(Notate la differenza con la teoria delle cardinalità: un insieme infinito è in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria, cf 2.292 e 2.295. Inoltre se due insiemi hanno la stessa cardinalità allora vi sono molte bigezioni fra essi.)

E2.250 Date un esempio di un insieme totalmente ordinato  $(X, \leq_X)$  che ha minimo, e di un segmento iniziale  $S$  tali che  $(X, \leq_X)$  e  $(S, \leq_X)$  sono equiordinati. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08B'] [089] (Svolto il 2023-01-17)

E2.251 *Prerequisiti:* 2.249. Siano  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$  bene ordinati; supponiamo che esista  $f : X \rightarrow T$  funzione bigettiva monotona strettamente crescente, dove  $T$  un segmento iniziale di  $Y$ ; allora  $f$  è unica (e unico è  $T$ ). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08D'] [08C] (Proposto il 2022-12)

E2.252 *Prerequisiti:* 2.182, 2.245, 2.248, 2.246, 2.251. [08F]

Siano dati due insiemi non vuoti bene ordinati  $(X, \leq_X)$  e  $(Y, \leq_Y)$ . Mostrate che

1. esiste un segmento iniziale  $S$  di  $X$  e una funzione bigettiva monotona strettamente crescente  $g : S \rightarrow Y$ ; oppure <sup>†32</sup>

<sup>†32</sup>Le due condizioni possono anche valere entrambe, nel qual caso  $X, Y$  hanno lo stesso tipo di ordine.

## §2.j Cardinalità

2. esiste un segmento iniziale  $T$  di  $Y$  e una funzione bigettiva monotona strettamente crescente  $g : X \rightarrow T$ .

Nel primo caso scriveremo che  $(Y, \leq_Y) \leq (X, \leq_X)$ , nel secondo che  $(X, \leq_X) \leq (Y, \leq_Y)$ . (Notate che nel primo caso si ha  $|Y| \leq |X|$  e nel secondo  $|X| \leq |Y|$ ). Per l'esercizio precedente la mappa  $g$  e il relativo segmento sono uniche.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08G']

- E2.253 Prerequisiti: 2.252. Mostrate che se  $(X, \leq_X) \leq (Y, \leq_Y)$  e anche  $(Y, \leq_Y) \leq (X, \leq_X)$ , allora sono *equiordinati*. [08H]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08J']

La relazione  $\leq$  è dunque una relazione di ordine totale fra tipi di buoni ordinamenti.

### §2.i.c Esempi

#### Esercizi

- E2.254 Prerequisiti: 2.134. Il tipo di buon ordinamento di  $\mathbb{N}$  è chiamato  $\omega$ . Dato  $k \geq 2$  naturale,  $\mathbb{N}^k$  dotato dell'ordinamento lessicografico è un insieme bene ordinato (per 2.134), e il suo tipo di buon ordinamento è chiamato  $\omega^k$ . Mostrate che  $\omega^k \leq \omega^h$  per  $h > k$ , e che  $\omega^k, \omega^h$  non hanno lo stesso tipo d'ordine. [08K]

- E2.255 Difficoltà:\* Costruite un buon ordinamento su un insieme numerabile  $X$  tale che  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  dove  $S_n$  sono segmenti iniziali, ciascuno con tipo di ordinamento  $\omega^n$ . L'ordinamento così costruito su  $X$  si indica con  $\omega^\omega$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08N'] [08M]

- E2.256 Difficoltà:\* Costruite una mappa crescente fra  $\omega^\omega$  e  $\mathbb{R}$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08Q'] [08P]

## §2.j Cardinalità

Per comodità useremo il simbolo  $|A|$  per indicare la cardinalità dell'insieme  $A$ . Questo simbolo si usa come segue. Dati due insiemi  $A, B$ , scriveremo  $|A| = |B|$  se gli insiemi sono **equipotenti** (o anche **equinumerosi**), cioè se esiste una funzione bigettiva fra  $A$  e  $B$ ; scriveremo  $|A| \leq |B|$  se esiste una funzione iniettiva da  $A$  a  $B$ . Scriveremo anche  $|A| < |B|$  se esiste una funzione iniettiva da  $A$  a  $B$ , ma non una bigezione. Se assumiamo vero l'assioma della scelta allora per ogni coppia di insiemi si ha sempre  $|A| \leq |B|$  oppure  $|B| \leq |A|$  (si veda 2.276). [22B]

**Proposizione 2.257.** *Se ora fissiamo una famiglia  $\mathcal{F}$  di insiemi di interesse, definiamo innanzitutto la relazione  $A \sim B \iff |A| = |B|$ ; si mostra che questa è una relazione di equivalenza; dunque si ottiene che  $|A| \leq |B|$  è un ordinamento totale in  $\mathcal{F}/\sim$ .* [129]

*Dimostrazione.* Questo deriva dalla Proposizione 2.191, in quanto la relazione

$$ARB \iff |A| \leq |B|$$

è riflessiva e transitiva, e per il Teorema di Cantor–Bernstein

$$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \iff A \sim B \quad .$$

□

Nel seguito, sia  $E_0 = \emptyset$  oppure  $E_n = \{1, \dots, n\}$  se  $n \geq 1$ .

**Lemma 2.258.** *Se  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n < m$  allora  $|E_n| < |E_m|$ . Per la dimostrazione si può vedere il Lemma 1.12.1 degli appunti [3].* [2GK]

**Definizione 2.259.** *Per definizione <sup>†33</sup> “un insieme  $A$  è **finito** e ha cardinalità  $n$ ” se è equipotente a un insieme  $E_n$  (per una scelta di  $n \in \mathbb{N}$ ; vi è al più un  $n$  per cui questo può avvenire, per via del il Lemma precedente). Dunque quando l’insieme è finito,  $|A|$  si identifica con il numero (naturale) dei suoi elementi, scriveremo  $|A| = n$ . Se un insieme non è finito, allora è **infinito**.* [1B1]

Notiamo che la mappa nulla  $f : \emptyset \rightarrow \emptyset$  è una bigezione; e  $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$ . Il risultato seguente è fondamentale.

**Esercizio 2.260.** *Dimostrate che  $\mathbb{N}$  è infinito, e che  $|\mathbb{N}| > n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2GJ'] [2GH]

Ricordiamo il Teorema 1.12.2 degli appunti [3], per comodità.

**Teorema 2.261.** *Se  $A$  è infinito, allora  $|A| \geq |\mathbb{N}|$ . In particolare,  $|A| > n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .* [02S]

**Definizione 2.262.** *Un insieme  $A$  equipotente a  $\mathbb{N}$  si dice **numerabile**; <sup>†34</sup> un tale insieme è infinito (per il risultato 2.260 sopra riportato). Diremo che un insieme  $A$  ha cardinalità **al più numerabile** se è finito o numerabile.* [2DD]

### §2.j.a Insiemi finiti

#### Esercizi

E2.263 Sia  $A$  un insieme finito, e  $B \subseteq A$ , mostrate che  $B$  è finito. [02T]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '02V']

E2.264 Supponiamo di avere un numero finito  $m \geq 1$  di insiemi  $A_1, \dots, A_m$  tutti finiti. Mostrate che  $\bigcup_{j=1}^m A_j$  è un insieme finito. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '02X'] [02W]

E2.265 Ricordiamo che  $A^B$  è l’insieme di tutte le funzioni  $f : B \rightarrow A$ . Se  $A, B$  sono insiemi finiti nonvuoti mostrate che  $|A^B| = |A|^{|B|}$ . Cosa succede se uno, o entrambi, sono vuoti? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '02Z'] [02Y]

E2.266 Se  $A, B$  sono insiemi finiti nonvuoti, calcolate la cardinalità dell’insieme delle funzioni  $f : B \rightarrow A$  iniettive; e la cardinalità di quelle surgettive. Cosa succede se uno, o entrambi, dei due insiemi  $A, B$  sono vuoti? [22K]

### §2.j.b Confronto

#### Esercizi

E2.267 Prerequisiti: 2.178. Supponiamo che  $A$  non sia vuoto. Si ha  $|A| \leq |B|$  se e solo se esiste una funzione surgettiva  $f : B \rightarrow A$ . (L’implicazione “se” necessita dell’assioma della scelta; si veda anche 2.82). [030]

E2.268 Mostrate che se  $|A_1| \leq |A_2|$  e  $|B_1| \leq |B_2|$  allora  $|A_1 \times B_1| \leq |A_2 \times B_2|$ . [031]

E2.269 Mostrate che se  $|A_1| \leq |A_2|$  e  $|B_1| \leq |B_2|$  allora  $|A_1^{B_1}| \leq |A_2^{B_2}|$  *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '033'] [032]

E2.270 Mostrate che  $|(A^B)^C| = |A^{(B \times C)}|$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '035'] [034]

E2.271 Sia  $I$  una famiglia di indici e  $B_i, A_i$  insiemi, per  $i \in I$ , con  $|A_i| \leq |B_i|$ ; supponiamo che gli insiemi  $B_i$  siano a due a due disgiunti; si mostri allora che [036]

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \leq \left| \bigcup_{i \in I} B_i \right| .$$

(Svolto il 2022-10-27)  
(Svolto il 2023-01-24)

(Secondo voi è possibile dimostrare questo risultato senza usare l'assioma della scelta, almeno nel caso in cui  $I$  è numerabile?) *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '037']

E2.272 Sia  $C$  un insieme,  $I$  una famiglia di indici e siano  $B_i$  insiemi per  $i \in I$ ; supponiamo che gli insiemi  $B_i$  siano a due a due disgiunti; sia  $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} B_i$  per comodità; si mostri allora che [038]

$$\forall i, |B_i| \leq |C| \Rightarrow |\mathcal{B}| \leq |I \times C| \quad (2.273)$$

$$\forall i, |B_i| \geq |C| \Rightarrow |\mathcal{B}| \geq |I \times C| . \quad (2.274)$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '039']

E2.275 Sia  $C$  un insieme,  $I$  una famiglia di indici e siano  $B_i$  insiemi per  $i \in I$  con  $|B_i| = |C|$ ; si mostri allora che [03C]

$$|\mathcal{B}| = |C^I|$$

dove  $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} B_i$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '03D']

E2.276 *Prerequisiti:* 2.182. Mostrate che le cardinalità sono sempre confrontabili, cioè che dati due insiemi  $A, B$  si ha sempre o  $|A| \leq |B|$  o  $|B| \leq |A|$ . (Usate il lemma di Zorn e la costruzione spiegata nell'esercizio 2.182). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '03G'] [03F] (Proposto il 2022-12)

Questo enunciato è equivalente all' Assioma della Scelta, si veda [22].

### §2.j.c Cardinalità numerabile

**Definizione 2.277.** Ricordiamo che un insieme è “numerabile” se ha la stessa cardinalità di  $\mathbb{N}$ . [2DF]

Se  $A$  è numerabile, esiste  $a : \mathbb{N} \rightarrow A$  bigettiva; scrivendo  $a_n$  invece di  $a(n)$ , diremo dunque che  $A = \{a_0, a_1, a_2 \dots\}$  è una **enumerazione**.

#### Esercizi

E2.278 Trovato un polinomio  $p(x, y)$  che, visto come funzione  $p : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  sia bigettivo. Se ne ricava, iterando, che esiste un polinomio  $q_k$  in  $k$  variabili bigettivo  $q_k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ . Dunque  $\mathbb{N}^k$  è numerabile. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '03J'] [UNACCESSIBLE UUID '03K'] [03H]

<sup>†33</sup>Questa è la definizione presentato nel corso. Esistono anche altre definizioni di “insieme finito” [17]. Vedete ad esempio l'esercizio 2.295

<sup>†34</sup>Attenzione, in Inglese il termine *countable* si usa per insiemi finiti o numerabili; per indicare un insieme numerabile si deve dire **countably infinite**.

E2.279 Mostrate che gli insiemi  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  sono numerabili. [03M]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '03N']

E2.280 Prerequisiti: 2.271, 2.278. [03P]

Siano  $A_0, A_1 \dots A_n \dots$  insiemi al più numerabili, per  $n \in \mathbb{N}$ .

Si mostri che  $B = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$  è al più numerabile.

Notate che  $B$  è numerabile se ad esempio vi è almeno un  $n$  per cui  $A_n$  è numerabile.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '03Q']

E2.281 Indichiamo con  $\mathcal{P}(A)$  l'insieme dei sottoinsiemi  $B \subseteq A$  che sono insiemi finiti. [03R]  
Questo è detto colloquialmente l'insieme delle parti finite.

Si mostri che  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  è numerabile.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '03S']

Questo risultato vale in generale, si veda 2.303.

### §2.j.d Cardinalità del continuo

**Definizione 2.282.** Diremo che un insieme ha cardinalità del continuo se ha la stessa cardinalità di  $\mathbb{R}$ . [03V]

**Nota 2.283.** Cantor dimostrò che  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ . Successivamente Cantor formulò (nel 1878) l'ipotesi del continuo CH: per ogni insieme infinito  $E \subseteq \mathbb{R}$ , si ha che  $|E| = |\mathbb{R}|$  oppure  $|E| = |\mathbb{N}|$ . Per molti anni i matematici provarono a dimostrare CH (o la sua negazione). Ci vollero decenni per capire che questo non è possibile. Oggi sappiamo che, assumendo che la teoria ZF sia consistente, allora né CH né la negazione di CH possono essere dimostrati come teoremi in ZF (anche usando l'Assioma della scelta). La seconda parte dell'asserzione fu dimostrata da Gödel in 1939. La prima parte da Cohen nel 1963. Si veda nel Cap. 6 in [13]. [2F2]

### Esercizi

E2.284 Spiegate come potreste costruire esplicitamente una bigezione fra  $[0, 1)$  e  $[0, 1)^2$ . [03X]

E2.285 Mostrate con costruzioni esplicite che i seguenti insiemi hanno cardinalità del continuo: [03Y]

$$[0, 1], [0, 1), (0, 1), (0, \infty).$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '03Z']

(Proposto il 2022-10-13)  
(Svolto il 2022-10-27)

E2.286 Prerequisiti: 2.293, 2.270, 2.269. [040]

Mostrate che i seguenti insiemi hanno cardinalità del continuo.

$$\mathbb{R}^n, \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '041'] [UNACCESSIBLE UUID '042']

E2.287 Prerequisiti: 2.271, 2.286. Siano  $A_t$  insiemi con cardinalità minore o uguale al continuo, per  $t \in \mathbb{R}$ . Si mostri che  $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t$  ha cardinalità del continuo. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '044'] [043]

E2.288 Sia  $\mathcal{A}$  l'insieme dei sottoinsiemi  $B \subseteq \mathbb{R}$  che sono insiemi finiti o numerabili; si mostri che  $\mathcal{A}$  ha cardinalità del continuo. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '046'] [045]

**§2.j.e In generale**

Aggiungiamo alcuni esercizi di carattere più generale.

**Esercizi**

E2.289 Mostrate che  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '049'] [048]

E2.290 Considerate l'insieme  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  delle funzioni  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ; e il sottoinsieme  $\mathcal{A}$  delle  $f$  che possono essere definite usando un algoritmo, scritto in un linguaggio di programmazione a piacere, supponendo inoltre che il computer che lo esegue abbia una memoria potenzialmente illimitata, e tale che per ogni scelta  $n \in \mathbb{N}$  in input l'algoritmo deve terminare e restituire  $f(n)$ . Confrontate le cardinalità di  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  e di  $\mathcal{A}$ . [04B]

E2.291 Calcolate la cardinalità dell'insieme  $\mathcal{F}$  delle funzioni  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  debolmente decrescenti. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '04F'] [04D]  
(Proposto il 2022-12)

E2.292 *Prerequisiti:* 3.7. [04G]

Un insieme  $A$  è detto *Dedekind-infinito* se è in bigezione con una sua parte propria cioè se esiste  $B \subset A, B \neq A$  e  $h : A \rightarrow B$  bigezione. Mostrate che un insieme  $A$  è *Dedekind-infinito* se e solo se esiste una funzione iniettiva  $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ . (Questo risultato non necessita dell'assioma della scelta).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '04H']

E2.293 *Prerequisiti:* 2.261. Se  $A$  è infinito e  $B$  è finito o numerabile mostrate che  $|A| = |A \cup B|$  usando l'esistenza di una funzione  $g : \mathbb{N} \rightarrow A$  iniettiva. [04J]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '04K']

E2.294 *Prerequisiti:* 2.264, 2.293. Similmente se  $A$  è infinito e  $B$  è finito mostrate che  $|A| = |A \setminus B|$  usando il fatto che per ogni insieme infinito  $X$  esiste una funzione  $g : \mathbb{N} \rightarrow X$  iniettiva. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '22N'] [22M]

E2.295 *Prerequisiti:* 2.261, 2.292. Mostrate che un insieme  $A$  è *Dedekind-infinito* se e solo se è infinito (secondo la definizione vista all'inizio del capitolo). [04M]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '04N']

Nota: secondo [11], la precedente equivalenza non può essere dimostrata usando solo gli assiomi di ZF (Zermelo–Fraenkel senza l'assioma della scelta); la precedente equivalenza può essere dimostrata usando gli assiomi di ZFC (Zermelo–Fraenkel con l'assioma della scelta); ma la sua validità in ZF è più debole dell'assioma della scelta.

E2.296 *Prerequisiti:* 2.293, 2.182. *Difficoltà:* \*. [04P]  
(Proposto il 2022-12)

Sia  $X$  infinito. Mostrate che  $X$  si partiziona in due insiemi  $X_1, X_2$  che hanno la stessa cardinalità di  $X$ . (*Sugg. considerate sottoinsiemi di  $X$  su cui la proprietà vale, usate Zorn*) *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '04Q']

E2.297 *Prerequisiti:* 2.296, 2.278, 2.239. *Difficoltà:* \*. [04R]  
(Svolto il 2022-10-13 in parte)

Sia  $A$  infinito. Mostrate che  $|D \times A| = |A|$  per ogni insieme nonvuoto  $D$  finito o numerabile. †<sup>35</sup>

---

†<sup>35</sup>Equivalentemente, mostrate che esiste una partizione  $U$  di  $A$  tale che ogni parte  $B \in U$  ha cardinalità  $|B| = |A|$ , e la famiglia  $U$  delle parti ha cardinalità  $|U| = |D|$ .

(Una possibile soluzione usa [2.296](#)) *Soluzione nascosta:* [\[UNACCESSIBLE UUID '04S'\]](#)

(Un'altra possibile soluzione usa il teorema di Zermelo, [2.239](#) e [2.278](#); in questo caso [2.296](#) diviene un corollario di questo risultato.) *Soluzione nascosta:* [\[UNACCESSIBLE UUID '04T'\]](#)

E2.298 Siano  $A, B$  infiniti. Mostrate che  $|A \cup B| = \max\{|A|, |B|\}$ . *Soluzione nascosta:* [\[04V\]](#)  
[\[UNACCESSIBLE UUID '04W'\]](#) (Svolto il 2022-10-27)

E2.299 Mostrate che se  $A$  è un insieme infinito, e si decompone nell'unione disgiunta di due insiemi  $A_1, A_2$  con  $|A_1| \leq |A_2|$  allora  $|A| = |A_2|$ . *Soluzione nascosta:* [\[04X\]](#)  
[\[UNACCESSIBLE UUID '04Y'\]](#)

E2.300 Prerequisiti: [2.182](#), [2.297](#). Difficoltà: \*\*. *Soluzione nascosta:* [\[04Z\]](#)  
Siano  $A, B$  infiniti. Mostrate che  $|A^2| = |A|$ . (Proposto il 2022-10-13)  
Usate questo risultato per mostrare che se  $A, B$  sono non vuoti e almeno uno è infinito allora  $|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$ . (Svolto il 2022-11-15)

*Soluzione nascosta:* [\[UNACCESSIBLE UUID '050'\]](#)

Si veda inoltre la nota [2.301](#).

**Nota 2.301.** *Note storiche.* [\[27H\]](#)

- La proposizione “ $|A^2| = |A|$  vale per ogni insieme infinito” è equivalente all'assioma della scelta. Questo fu dimostrato da Tarski [\[24\]](#) nel 1928; *l'articolo è online e scaricabile e contiene altre sorprendenti equivalenze. Si veda anche [\[22\]](#) Parte 1 Sezione 7 pagina 140 asserzione CN6.*

- Jan Mycielski [\[19\]](#) riporta: «Tarski told me the following story. He tried to publish his theorem (stated above) in the *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* but Fréchet and Lebesgue refused to present it. Fréchet wrote that an implication between two well known propositions is not a new result. Lebesgue wrote that an implication between two false propositions is of no interest. And Tarski said that after this misadventure he never tried to publish in the *Comptes Rendus*».

*Questo aneddoto ci mostra quanto (prima dei lavori di Godel e Cohen [\[6\]](#)), anche i matematici più importanti non capissero l'importanza dell'assioma della scelta.*

## Esercizi

E2.302 Prerequisiti: [2.300](#). Sia  $A$  infinito. Sia  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$ . Mostrate che  $|A^n| = |A|$ . *Soluzione nascosta:* [\[051\]](#)  
[\[UNACCESSIBLE UUID '052'\]](#)

E2.303 Prerequisiti: [2.271](#), [2.302](#), [2.300](#). Sia  $A$  infinito. Si mostri che l'insieme delle parti finite  $\mathcal{P}(A)$  ha la stessa cardinalità di  $A$ . *Soluzione nascosta:* [\[053\]](#)  
[\[UNACCESSIBLE UUID '054'\]](#) (Proposto il 2022-12)

E2.304 Prerequisiti: [2.272](#), [2.300](#). Sia  $X$  un insieme infinito, sia  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ , siano  $U = X / \sim$  le classi di equivalenza. *Soluzione nascosta:* [\[055\]](#)  
(Svolto il 2023-01-24)

- Supponiamo che ogni classe sia finita, mostrate che  $|U| = |X|$ .
- Supponiamo che  $U$  sia infinito e ogni classe abbia cardinalità al più  $|U|$ , allora  $|U| = |X|$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '056']

E2.305 Prerequisiti: 2.83, 2.303, 2.304. Difficoltà: \*\*. [057]

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale. Siano  $A, B$  due basi di Hamel (si veda 2.83). Si mostri che  $|A| = |B|$ . (Questo risultato è noto come “Teorema della dimensione”)

Più in generale, siano  $L, G \subseteq V$ , dimostrate che, se i vettori in  $L$  sono linearmente indipendenti e se  $G$  genera  $V$ , allora  $|L| \leq |G|$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '058']

Altri esercizi interessanti sono 9.98, 9.7.

### §2.j.f Potenza

Ricordiamo che  $A^B$  è l'insieme di tutte le funzioni  $f : B \rightarrow A$ . Scriveremo  $|2^A|$  per indicare la cardinalità dell'insieme delle parti di  $A$ .

#### Esercizi

E2.306 Prerequisiti: 2.300. Siano  $A, B$  insiemi non vuoti e tali che  $A$  è infinito e  $2 \leq |B| \leq |A|$  allora  $|B^A| = |2^A|$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '05K'] (Proposto il 2022-12) [05J]

E2.307 Siano  $A, B$  insiemi non vuoti, supponiamo che esista un insieme  $C$  tale che  $|B| = |2^C|$  allora  $|B^A| = \max\{|B|, |2^A|\}$ . [05M]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '05N']

In generale nel caso in cui  $|B| > |A|$  lo studio della cardinalità di  $|B^A|$  è molto complesso (anche in casi apparentemente semplici come  $A = \mathbb{N}$ ).

### §2.k Operazioni su insiemi [1YX]

#### Esercizi

E2.308 Sia  $X$  un insieme non vuoto, e  $A \subseteq X$ . Indicheremo con  $A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$  il complementare di  $A$  in  $X$ . [05R]

Definiamo la funzione caratteristica  $\mathbb{1}_A : X \rightarrow \mathbb{Z}$  come

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Si dimostri che

$$\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A, \quad \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

E2.309 Consideriamo ora invece la funzione caratteristica definita come prima, ma considerata come  $\mathbb{1}_A : X \rightarrow \mathbb{Z}_2$  cioè a valori nel gruppo delle classi resto  $\mathbb{Z}_2$  (più correttamente indicato come  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ). [05S]

In questo caso le precedenti si possono scrivere come

$$\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_A + 1, \quad \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B.$$



Ricordiamo la definizione della differenza simmetrica  $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ , si mostri che questa si scrive come

$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B .$$

Con queste regole di calcolo si mostri che

$$A\Delta B = B\Delta A , (A\Delta B)^c = A\Delta(B^c) = (A^c)\Delta B , A\Delta B = C \iff A = B\Delta C$$

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C) , A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(A^c \cap C)$$

E2.310 Siano  $A, B, C$  insiemi, allora

[05T]

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) , \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) . \end{aligned}$$

Dunque l'operazione di prodotto cartesiano è distributiva sull'unione e la intersezione.

E2.311 Se  $A, B, C$  sono insiemi non vuoti e

[05V]

$$(A \times B) \cup (B \times A) = (C \times C)$$

allora  $A = B = C$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '05W']

E2.312 Dati quattro insiemi  $X, Y, A, B$  con  $A \subset X, B \subset Y$ , scrivete

[05X]

$$(X \times Y) \setminus (A \times B)$$

come unione di tre insiemi a due a due disgiunti, ciascuno un prodotto cartesiano.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '05Y']

E2.313 Vogliamo riscrivere le tautologie viste in 2.10 sotto forma di relazioni insiemistiche.

[05Z]

Sia  $X$  un insieme e siano  $\alpha, \beta, \gamma \subseteq X$  sottoinsiemi. Sia  $x \in X$ . Se definiamo  $A = (x \in \alpha)$ ,  $B = (x \in \beta)$ ,  $C = (x \in \gamma)$  nelle tautologie, potremo poi riscrivere la tautologia come una formula fra insiemi  $\alpha, \beta, \gamma, X, \emptyset$ , che usi i connettivi  $=, \cap, \cup$  e il complementare.

Sorprendentemente, la riscrittura può essere effettuata algebricamente e in maniera puramente sintattica. Scegliete una tautologia vista in 2.10. Nel seguito  $\varphi, \psi$  indicano sottoparti della tautologia che sono formule ben formate.

- Sostituite  $((\varphi) \Rightarrow (\psi))$  con  $((\neg(\varphi)) \vee (\psi))$  (otterrete un'altra tautologia).
- Poi sostituite sintatticamente  $\neg(\varphi)$  con  $(\varphi)^c$ ,  $\vee$  con  $\cup$  e  $\wedge$  con  $\cap$ ; sostituite  $A$  con  $\alpha$ ,  $B$  con  $\beta$ ,  $C$  con  $\gamma$ ,  $V$  con  $X$  e  $F$  con  $\emptyset$ .
- Infine, se la formula contiene almeno un " $\iff$ ", trasformateli tutti in " $=$ "; altrimenti aggiungete " $= X$ " alla fine.

Verificate che questo “algoritmo” funziona davvero!

E2.314 Sia  $X$  un insieme. Siano  $I, J$  famiglie non vuote di indici, e per ogni  $i \in I$  sia  $J_i \subseteq J$  una famiglia non vuota di indici. Per ogni  $i \in I, j \in J_i$  sia  $A_{i,j} \subseteq X$ . Si mostri che [060]

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} A_{i,j} = \bigcup_{\beta \in B} \bigcap_{i \in I} A_{i,\beta(i)}$$

dove  $B = \prod_{i \in I} J_i$  e ricordiamo che ogni  $\beta \in B$  è una funzione  $\beta : I \rightarrow J$  per cui per ogni  $i$  si ha  $\beta(i) \in J_i$ . Formulate poi una simile regola scambiando il ruolo intersezione e unione (usate i complementari degli insiemi  $A_{i,j}$  e le regole di de Morgan).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '061']

### §2.k.a Limsup e liminf di insiemi

**Definizione 2.315.** Dati  $A_1, A_2 \dots$  insiemi, per  $n \in \mathbb{N}$ , definiamo [122]

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad (2.316)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad (2.317)$$

$$(2.318)$$

(Svolto il 2022-11-29)

Supponiamo che  $A_n \subseteq X$  per ogni  $n$ . (Possiamo porre  $X = \bigcup_n A_n$ ).

### Esercizi

E2.319 Ricordiamo che [063]

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$$

è il complementare di  $A$  in  $X$  (come già definito in 2.42).. Mostrate che

$$(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n^c) .$$

E2.320 Prerequisiti: 3.56. Mostrate che [064]

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ frequentemente in } n\} , \quad (2.321)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ definitivamente in } n\} . \quad (2.322)$$

(“Frequentemente” e “definitivamente” sono discussi in Sez. §3.g).

E2.323 Prerequisiti: 2.320, 3.61. Dati  $A_1, A_2 \dots$  e  $B_1, B_2 \dots$  insiemi, per  $n \in \mathbb{N}$ , dite se vi è una relazione (di uguaglianza o di contenimento) fra [065]

$$(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \cap (\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n) \stackrel{?}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) , \quad (2.324)$$

$$(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \cup (\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n) \stackrel{?}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) . \quad (2.325)$$

Se non si ha uguaglianza, mostrate un esempio. Usate poi 2.319 per stabilire simili regole per il  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '066']

## §2.1 Combinatoria

### Esercizi

E2.326 Siano dati  $n, k$  naturali con  $k \geq 1$ . Quante diverse scelte di vettori  $(j_1, \dots, j_k)$  di numeri naturali vi sono per cui  $j_1 + \dots + j_k = n$ ? Quante diverse scelte di vettori  $(j_1, \dots, j_k)$  di numeri naturali positivi vi sono per cui  $j_1 + \dots + j_k = n$ ? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '09P'] [09N]

E2.327 Siano  $n, m$  interi positivi e siano  $I = \{1, \dots, n\}, J = \{1, \dots, m\}$ . [09Q]

- Quante sono le funzioni  $f : I \rightarrow J$ ?
- Quante sono le funzioni  $f : I \rightarrow J$  iniettive?
- Quante sono le funzioni  $f : I \rightarrow J$  strettamente crescenti?
- Quante sono le funzioni  $f : I \rightarrow J$  debolmente crescenti?

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '09R']

Si veda anche l'esercizio 2.265.

### §3 Numeri naturali

[1X9]

Vogliamo propriamente definire l'insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

dei numeri naturali.

Un possibile modello, come mostrato in Sez. §2.h, è ottenuto appoggiandosi alla teoria di Zermelo–Fraenkel.

Qui invece presentiamo gli assiomi di Peano, espressi usando la *versione intuitiva* della teoria degli insiemi.

**Definizione 3.1** (Assiomi di Peano).

[1XB]

(Svolto il  
2022-11-03)

(N1) Esiste un numero  $0 \in \mathbb{N}$ .

(N2) Esiste una funzione  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (chiamata "successore"), tale che <sup>†36</sup>

(N3)  $S(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{N}$  e

(N4)  $S$  è iniettiva, cioè  $x \neq y$  implica  $S(x) \neq S(y)$ .

(N5) Se  $U$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  tale che:  $0 \in U$  e  $\forall x, x \in U \Rightarrow S(x) \in U$ , allora  $U = \mathbb{N}$ .

Spesso scriveremo  $Sn$  invece di  $S(n)$  per semplicità.

Dai precedenti seguono subito due importanti proprietà. Uno è il principio di induzione, si veda 3.4. L'altro è lasciato per esercizio.

**Esercizio 3.2.** *Mostrate che ogni  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \neq 0$  è successore di un altro  $k \in \mathbb{N}$ , dimostrando per induzione su  $n$  questa proposizione*

[1YP]

$$P(n) \stackrel{\text{def}}{=} (n = 0) \vee (\exists k \in \mathbb{N}, S(k) = n) \quad .$$

Questo dimostra che la funzione successore

$$S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

è bigettiva.

Se  $n \neq 0$  chiameremo  $S^{-1}(n)$  il **predecessore** di  $n$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22Q']

(Parte di questo risultato vale più in generale, si veda in 2.242)

L'idea è che la funzione successore codifica gli usuali numeri secondo lo schema

$$1 = S(0), \quad 2 = S(1), \quad 3 = S(2) \dots$$

e (avendo definito l'addizione) si avrà che  $S(n) = n + 1$ .

**Esercizio 3.3.** *Prerequisiti: 3.3. Togliendo a turno uno degli assiomi (N1)–(N5), descrivete un insieme che soddisfa gli altri ma non è isomorfo ai naturali.*

[1XD]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22V']

### §3.a Induzione

[27J]

**Proposizione 3.4** (Principio di induzione). *Sia  $A \supseteq \mathbb{N}$  e  $P(n)$  una proposizione logica che possa essere valutata per  $n \in A$ . Supponiamo siano soddisfatte le due seguenti ipotesi:*

[1XC]

- $P(n)$  è vera per  $n = 0$  e
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(S(n))$ ;

allora  $P$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $U = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$  sappiamo che  $0 \in U$  e che  $\forall x, x \in U \Rightarrow P(S(x)) \in U$ , allora da (N5) si conclude  $U = \mathbb{N}$ .  $\square$

La verifica di  $P(0)$  è detta “base dell’induzione”, mentre la verifica  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(S(n))$  è detta “passo induttivo” (in cui  $P(n)$  viene presa come ipotesi, e viene detta “ipotesi induttiva”).

#### Esercizi

E3.5 Dimostrate che  $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq S(n)$ .

[1XF]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1XJ']

E3.6 Dimostrate<sup>†37</sup> per induzione le seguenti asserzioni:

[1XG]

1.  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ;
2.  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ;
3.  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ;
4.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ ;
5.  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ ;
6.  $n! \geq 2^{n-1}$ ;
7. Se  $x > -1$  è un numero reale e  $n \in \mathbb{N}$  allora  $(1+x)^n \geq 1+nx$  (disuguaglianza di Bernoulli).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1XK']

### §3.b Definizione per ricorrenza

[274]

#### Teorema 3.7.

[08Z]

*Sia  $A$  un insieme non vuoto; sia  $a \in A$  fissato, siano date funzioni  $g_n : A \rightarrow A$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora esiste ed è unica la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  tale che*

- $f(0) = a$ , e

<sup>†36</sup>Stiamo usando la stessa parola *successore* usata per la definizione 2.241 per gli insiemi bene ordinati, e in 2.193 nella teoria di Zermelo-Fraenkel: vedremo che infatti le definizioni sono compatibili.

<sup>†37</sup>Nei successivi esercizi diamo per buona la conoscenza delle operazioni tipiche dei numeri naturali, e della loro relazione d’ordine.

- per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $f(S(n)) = g_n(f(n))$ .

Si dice che la funzione  $f$  è **definita per ricorrenza** dalle due precedenti condizioni.

*Dimostrazione.* Traccia della dimostrazione. Notate che la dimostrazione usa solo gli assiomi di Peano e il principio di induzione. Dato  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq 0$  ricordiamo che  $S^{-1}(m)$  è il predecessore, si veda 3.2 (usando l'aritmetica potremmo scrivere [090]

$$S^{-1}(m) = m - 1, \quad S(k) = k + 1$$

ma questo teorema è usato nel definire l'aritmetica...) Data una qualunque  $R \subseteq \mathbb{N} \times A$  definiamo la proiezione sulla prima componente

$$\pi(R) = \{n \in \mathbb{N}, \exists x \in A, (n, x) \in R\}.$$

Consideriamo la famiglia  $\mathcal{F}$  delle relazioni  $R \subseteq \mathbb{N} \times A$  che soddisfano

$$(0, a) \in R \quad (*)$$

$$\forall n \geq 0, \forall y \in A, (n, y) \in R \Rightarrow (S(n), g_n(y)) \in R \quad (**)$$

Mostriamo che sotto queste condizioni  $\pi(R) = \mathbb{N}$ ; sappiamo che  $0 \in \pi(R)$ ; se  $m \in \pi(R)$ , allora esiste  $x \in A$  per cui  $(m, x) \in R$  ma allora da \*\* segue che  $(S(m), g_m(x)) \in R$ , e otteniamo  $S(m) \in \pi(R)$ .

La famiglia  $\mathcal{F}$  è non vuota perché  $\mathbb{N} \times A \in \mathcal{F}$ . Sia poi  $T$  l'intersezione di tutte le relazioni in  $\mathcal{F}$ .  $T$  è dunque la minima relazione in  $\mathcal{F}$ .

Si può verificare che  $T$  soddisfa le precedenti proprietà \* e \*\*. In particolare  $\pi(T) = \mathbb{N}$ .

Dobbiamo ora mostrare che  $T$  è il grafico di una funzione (che è la funzione  $f$  desiderata), cioè che per ogni  $n$  esiste un unico  $x \in A$  per cui  $(n, x) \in T$ .

Sia  $A_n = \{x \in A, (n, x) \in T\}$ ; scriviamo  $|A_n|$  per indicare il numero di elementi in  $A_n$ ; siccome  $\pi(T) = \mathbb{N}$  allora  $|A_n| \geq 1$  per ogni  $n$ . Mostriamo che  $|A_n| = 1$  per ogni  $n$ . Lo dimostreremo per induzione. Sia

$$P(n) \doteq |A_n| = 1 \quad .$$

Verifichiamo il passo induttivo.

Supponiamo per assurdo che  $|A_m| = 1$  ma  $|A_{Sm}| \geq 2$ ; moralmente in  $m$  il grafico della  $f$  "biforca" e la funzione diventa "multivoca". Definiamo per comodità  $w = g_m(x), k = Sm$ ; potremmo togliere alcuni elementi a  $T$  (quelli che non hanno un "predecessore" secondo la relazione \*\*) definendo

$$\tilde{T} = T \setminus \{(k, y) : y \in A, y \neq w\}$$

si mostra che  $\tilde{T}$  soddisfa \* e \*\*, ma  $\tilde{T}$  sarebbe più piccola di  $T$ , contro la minimalità di  $T$ . Per provare che  $P(0)$ , si definisce  $k = 0, w = a$  e si procede allo stesso modo.

Il precedente ragionamento mostra anche che la funzione è unica, perché se il grafico  $G$  di una qualsiasi funzione soddisfacente a \* e \*\* deve contenere  $T$ , allora  $T = G$ .  $\square$

Più in generale date  $g_n : A^{n+1} \rightarrow A$ , si mostra che esiste ed è unica la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  tale che  $f(0) = a$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $f(S(n)) = g_n(f(0), f(1), \dots, f(n))$ .

**Esercizi**

E3.8 Prerequisiti: 3.7. Adattate l'esercizio 3.7 per definire la *successione di Fibonacci*, che soddisfa alla regola [1X7]

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

per  $n \geq 2$ .

*Sugg. Non dovete riscrivere tutta la dimostrazione di 3.7, piuttosto scegliete  $A = \mathbb{N}^2$  e scegliete  $g$  con astuzia.*

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1X8']

E3.9 Definite l'intervallo di numeri naturali [294]

$$I_n = \{0, \dots, n\}$$

usando una definizione ricorsiva (senza fare uso di una relazione d'ordine)

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '295']

**§3.c Aritmetica** [0NN]

Definiremo l'operazione di addizione fra numeri naturali, formalmente

$$\cdot + \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad , \quad (h, k) \mapsto h + k \quad .$$

**Definizione 3.10.** *Fissato il parametro  $h \in \mathbb{N}$  cominciamo col definire l'operazione  $h + \cdot$  che sarà una funzione  $f_h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  data da  $f_h(n) = h + n$ ; per la definizione ricorsiva vorremo esprimere le regole* [292]

- $h + 0 = h$  ,
- $\forall n \in \mathbb{N}, h + S(n) = S(h + n)$  .

A questo scopo, poniamo  $A = \mathbb{N}$ , e  $g(n, a) = S(a)$ , riscriviamo le precedenti come regole ricorsive per  $f_h$

- $f_h(0) = h$  ,
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_h(S(n)) = g(n, f_h(n)) = S(f_h(n))$  .

questo definisce ricorsivamente  $f_h$ . Considerando poi il parametro  $h$  come una variabile, abbiamo costruito l'operazione di addizione, e definiamo l'operazione “+” fra naturali come  $h + n = f_h(n)$ .

Questa operazione è commutativa e associativa, come mostrato sotto.

Notiamo che  $h + 0 = f_h(0) = h$  (base della ricorsione); inoltre  $0 + n = f_0(n) = n$  (si mostra facilmente per induzione).

Per dimostrare che è commutativa, mostriamo innanzitutto che

**Lemma 3.11.**  $\forall n, h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(n) = S(f_h(n))$

[27N]  
(Svolto il  
2022-11-03)

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $S(f_h(n)) = f_h(S(n))$  per definizione ricorsiva; consideriamo

$$P(n) \doteq \forall h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(n) = S(f_h(n)) \quad ;$$

$P(0)$  è la proposizione

$$\forall h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(0) = S(f_h(0)) = S(h)$$

che è vera perché è il valore iniziale della definizione ricorsiva di  $f_{S(h)}$  e di  $f_h$ ; per il passo induttivo assumiamo che  $P(n)$  sia vera e studiamo  $P(S(n))$  al cui interno possiamo dire

$$\begin{aligned} f_{S(h)}(S(n)) &\stackrel{(1)}{=} S(f_{S(h)}(n)) \stackrel{(2)}{=} \\ &SS(f_h(n)) \stackrel{(3)}{=} S(f_h(S(n))) \end{aligned}$$

dove in (1) abbiamo usato la definizione ricorsiva di  $f_h$  con  $S(h)$  invece di  $h$ , in (2) abbiamo usato la ipotesi induttiva, e in (3) la definizione ricorsiva di  $f_h$ ; e questo completa il passo induttivo.

(Notate come nel primo passaggio è importante che nella definizione di  $P(n)$  vi sia  $\forall h \in \mathbb{N}, \dots$ ).  $\square$

**Proposizione 3.12.** *(Replaces 27Y) L'addizione è commutativa.*

[27P]

*Dimostrazione.* Per il lemma possiamo scrivere

$$S(h) + n = S(h + n) = h + S(n) \tag{3.13}$$

intuitivamente la formula è simmetrica e dunque anche la definizione di addizione deve avere una simmetria. Precisamente, sia  $\tilde{f}_n(h) \stackrel{\text{def}}{=} f_h(n)$  allora  $\tilde{f}_n(0) = n$  (come già notato) e per il lemma 3.11  $\tilde{f}_n(S(h)) = S(\tilde{f}_n(h))$  ma allora  $\tilde{f}$  soddisfa la stessa relazione ricorsiva di  $f$  e dunque sono identiche, così  $\tilde{f}_n(n) = f_n(h)$ . (L'idea è che se avessimo definito la addizione ricorsivamente partendo da sinistro invece che da destra, avremmo raggiunto lo stesso risultato).  $\square$

A questo punto possiamo dare un nome a  $1 = S(0)$  e notare che  $S(n) = n + 1$ . Dunque da ora in poi potremmo fare a meno del simbolo  $S$ .

Con simili procedure si dimostra che l'addizione è associativa.

**Proposizione 3.14.** *L'addizione è associativa.*

[27Q]

*Dimostrazione.* Consideriamo

$$P(h) \doteq \forall n, m \in \mathbb{N}, (n + m) + h = n + (m + h) \quad ;$$

ovviamente  $P(0)$  è vera, inoltre  $P(Sh)$  si dimostra (omettendo “ $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ”) così

$$\begin{aligned} (n + m) + Sh &= S(n + m) + h = (Sn + m) + h \stackrel{P(n)}{=} \\ &= Sn + (m + h) = n + S(m + h) = n + (m + Sh) \quad \square \end{aligned}$$

Analogamente si definisce la moltiplicazione.

**Definizione 3.15.** *Si fissa il parametro  $m$ , e si definisce ricorsivamente  $(m \times \cdot)$  tramite*

[28V]

- $m \times 0 = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, m \times (n + 1) = m \times n + m$ ;

(Svolto il  
2022-11-03)

poi si possono dimostrare le note proprietà (commutatività, associatività, distributività).



**Esercizi**

E3.16 Riscrivete alcune nozioni viste prima, quale il principio di induzione, e la definizione dell'addizione, usando  $n + 1$  invece di  $S(n)$ . [27R]

E3.17 Mostrate che la funzione  $f_h(n) = (h + n)$  è iniettiva. *Soluzione nascosta:* [27S]  
 [UNACCESSIBLE UUID '27T'] (Svolto il 2022-11-03)

E3.18 Dimostrate la *proprietà di eliminazione*: se  $n + h = m + h$  allora  $n = m$ . [27V]  
*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '286']

E3.19 Si ha  $n + m = 0$  se e solo se  $n = 0 \wedge m = 0$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '285'] [27W]  
 (Svolto il 2022-11-03)

E3.20 Si ha  $n \times m = 0$  se e solo se  $n = 0 \vee m = 0$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '284'] [27X]  
 (Svolto il 2022-11-03)

E3.21 Dimostrate che la moltiplicazione è commutativa. Sugg. dimostrate per induzione in  $n$  [28T]

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, (m + 1) \times n = m \times n + n \quad ,$$

dopodiché ragionate come in Prop. 3.12. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '28W']

E3.22 Dimostrate che l'addizione distribuisce rispetto alla moltiplicazione. Sugg. dimostrate per induzione in  $h$  [28I]

$$\forall m, n, h \in \mathbb{N}, m \times (n + h) = m \times n + m \times h \quad .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '28Y']

E3.23 Prerequisiti: 3.22. Dimostrate che la moltiplicazione è associativa. Sugg. dimostrate per induzione in  $n$  [27Z]

$$\forall m, n, h \in \mathbb{N}, (m \times n) \times h = m \times (n \times h) \quad .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '28X']

E3.24 Dati  $n \neq 0$  e  $h \in \mathbb{N}$  scrivete una definizione ricorsiva dell'elevamento a potenza  $n^h$ ; indi dimostrate che  $n^{h+k} = n^h n^k$  e  $(n^h)^k = n^{(hk)}$ . [28O]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2DG']

Nel seguito scriveremo semplicemente  $nm$  invece di  $n \times m$ .

**§3.d Ordinamento** [27K]

**Ipotesi 3.25.** Studieremo una relazione d'ordine (possibilmente parziale)  $\leq$  su  $\mathbb{N}$  tale che [26H]

$$\forall x \in \mathbb{N}, (0 \leq x) \quad , \tag{3.26}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x < Sy) \iff (x \leq y) \quad ; \tag{3.27}$$

dove (come al solito)

$$x < y \doteq (x \leq y) \wedge (x \neq y) \quad .$$

**Teorema 3.28.** *Vi è una unica relazione d'ordine  $\leq$  su  $\mathbb{N}$  tale che (3.27),(3.26) in 3.25 valgano, e questo è un buon ordinamento.* [26Y]

Questo teorema sarà dimostrato in seguito: unicità in 3.29, buon ordinamento in 3.53. L'esistenza di una tale relazione deriva dal modello Z-F, come visto in precedenza e ricapitolato in Sezione §3.e; oppure l'ordinamento si può definire usando l'aritmetica, come mostrato in Sezione §3.d.a.

### Esercizi

E3.29 Supponiamo che  $\leq$  sia una relazione di ordine (possibilmente parziale) su  $\mathbb{N}$  soddisfacente (3.27),(3.26) in 3.25 allora  $\leq$  è unico. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '270']

E3.30 Sia [271]

$$P_x = \{z \in \mathbb{N}, z < x\}$$

mostrate che

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, P_x = P_y \Rightarrow x = y$$

usando le proprietà nell'Ipotesi 3.25.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '272']

(Notate la somiglianza con 2.232).

E3.31 Impostando  $n = x = y$  in (3.27) otteniamo che  $n < Sn$ . [276]

E3.32 Prerequisiti: 3.31, 3.25. Usando le proprietà in 3.25 e assumendo che  $\leq$  sia una relazione d'ordine totale (come effettivamente dimostreremo), mostrate che [277]

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (n < m) \Rightarrow (Sn < Sm) \quad .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '278']

E3.33 Se  $\leq$  è un ordinamento totale su  $\mathbb{N}$  allora sono equivalenti [26X]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \leq y \leq Sx) \Rightarrow (x = y \vee y = Sx) \quad , \quad (3.34)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x < Sy) \iff (x \leq y) \quad ; \quad (\text{come in (3.27)})$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x < y) \iff (Sx \leq y) \quad . \quad (3.35)$$

Notate l'analogia con 2.197

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '296']

### §3.d.a Ordinamento dall'aritmetica [287]

Avendo già definito l'aritmetica, una definizione comoda di ordinamento è come segue.

**Definizione 3.36.** *Dati  $n, m \in \mathbb{N}$ , si dirà che  $n \leq m$  se esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $n + k = m$*  [288]

Mostreteremo che  $\leq$  è una relazione di ordine totale, che è un buon ordinamento. Vediamo innanzitutto alcune proprietà elementari ma fondamentali.

**Lemma 3.37.** Siano  $n, m, k \in \mathbb{N}$ .

[289]

1. Per ogni  $n$  si ha  $0 \leq n$
2.  $n \leq m$  se e solo se  $n < S(m)$ .

Notate che questi due punti soddisfano (3.27),(3.26) in 3.25

3. Per ogni  $n$  si ha  $n < S(n)$
4.  $n < m$  se e solo se  $S(n) \leq m$ .
5. Se  $n \leq m \leq S(n)$  allora  $m = n$  oppure  $m = S(n)$ .

Le dimostrazioni sono lasciate per esercizio 3.42. (Una volta dimostrato che la relazione è totale, allora per 3.33 le ultime due sono equivalenti).

**Proposizione 3.38.**  $\leq$  è una relazione di ordine.

[28B]

*Dimostrazione.* Proprietà riflessiva:  $n + 0 = n$ . Proprietà antisimmetrica: se  $n + k = m$  e  $m + h = n$  allora  $n + k + h = n$  dunque per eliminazione 3.18  $h + k = 0$ , e per 3.19  $h = k = 0$  così  $n = m$ . Proprietà transitiva: se  $n + k = m$  e  $m + h = p$  allora  $n + k + h = p$ .  $\square$

Dunque questa relazione “ $\leq$ ” definita in 3.36 soddisfa la regola 3.25; mostreremo che ogni tale ordinamento è un buon ordinamento; qui presentiamo comunque una dimostrazione per questo caso particolare.

[298]

**Proposizione 3.39.**  $\leq$  è una relazione di ordine totale.

[28Z]

*Dimostrazione.* Si considera la proposizione

$$P(n) \doteq \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m \vee m \leq n$$

Si ha che  $P(0)$  è vera. Diamo per vera  $P(n)$ ; prendiamo un  $m$ ;

- se  $m \leq n$  allora  $m \leq S(n)$  per il lemma (punto 2), così  $P(Sn)$  vale;
- se  $\neg m \leq n$  ma  $P(n)$  vale, allora  $n \leq m$ , ma non potendo essere  $n = m$ , si ottiene  $n < m$ , che comporta  $S(n) \leq m$  per il lemma (punto 4);

in ogni caso  $P(S(n))$  è dimostrata partendo da  $P(n)$ .  $\square$

**Proposizione 3.40.**  $\leq$  è un buon ordinamento.

[297]

*Dimostrazione.* Traccia della dimostrazione. Per il Lemma 3.37 (punto (2)) sappiamo che questo ordinamento soddisfa il principio forte di induzione 3.49; così possiamo provare (come in Esercizio 3.52) che ogni sottoinsieme non vuoto ha un elemento minimale; ma sappiamo che l’ordinamento è totale, dunque l’elemento minimale è il minimo.  $\square$

**Definizione 3.41** (Sottrazione). Se  $m \geq n$ , esiste ed è unico  $h$  tale che  $m = n + h$  (l’unicità segue da 3.18); indicheremo questo  $h$  come  $m - n$ .

[28C]

**Esercizi**

E3.42 Mostrate le proprietà in 3.37. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '28F'] [28D]

E3.43 Mostrate che se  $n \leq m$  allora  $m - n \leq m$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '28H'] [28G]

E3.44 Mostrate che se  $n \neq 0$  allora  $n \times m \geq m$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '28P'] [28N]

E3.45 Argomenti: Divisione con resto. [28J]

Dimostrate che, dati  $d, n \in \mathbb{N}, d \geq 1$  esistono e sono unici due numeri  $q, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < d$  per cui  $n = q \times d + r$  (dove  $n$  è il “dividendo”  $d$  è il “divisore”,  $q$  è il “quoziente” e  $r$  è il “resto”) Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '28K']

E3.46 (Replaces 282) [28M]

Sia  $h \neq 0$ , dimostrate che se  $n \times h = m \times h$  allora  $n = m$ . (Sugg. usate la sottrazione)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '28S']

In particolare la mappa  $n \mapsto n \times h$  è iniettiva.

**§3.d.b Ordinamento e aritmetica** [28Q]

L'ordinamento è compatibile con l'aritmetica.

**Proposizione 3.47.** [28R]

- (Compatibilità di addizione e ordinamento) Si ha  $n \leq m$  se e solo se  $n+k \leq m+k$ .
- (Compatibilità di moltiplicazione e ordinamento) Quando  $k \neq 0$  si ha  $n \leq m$  se e solo se  $n \times k \leq m \times k$ .

In particolare (ricordando 3.46) la mappa  $n \mapsto n \times h$  è strettamente crescente (e dunque iniettiva).

*Dimostrazione.* Useremo alcune proprietà lasciate per esercizio.

- Se  $n \leq m$ , per definizione  $m = n + h$ , allora  $n + k \leq m + k$  in quanto  $m + k = n + h + k$  (notate che stiamo usando l'associatività). Se  $n + k \leq m + k$  sia allora  $j$  l'unico naturale tale che  $n + k + j = m + k$  ma allora  $n + j = m$  per eliminazione 3.18.
- Se  $n \leq m$  allora  $m = n + h$  dunque  $m \times k = n \times k + h \times k$  così  $n \times k \leq m \times k$ . Viceversa sia  $k \neq 0$  e sia  $n \times k \leq m \times k$  cioè  $n \times k + j = m \times k$ : dividiamo  $j$  per  $k$  usando la divisione con resto 3.45, scriviamo  $j = q \times k + r$  dunque per associatività  $(n + q) \times k + r = m \times k$ , ma per unicità della divisione con resto  $r = 0$ : infine raccogliendo  $(n + q) \times k = m \times k$  e usando 3.46 concludiamo che  $(n + q) = m$ .

□

### §3.e Compatibilità Z-F e Peano

[26F]

Torniamo ora al modello  $\mathbb{N}_{ZF}$  di  $\mathbb{N}$  costruito appoggiandosi alla teoria di Zermelo–Fraenkel, visto in Sez. §2.h. Vogliamo vedere che questo modello soddisfa gli assiomi di Peano.

Ricordiamo che, dato  $x$  (qualunque, non necessariamente numero naturale) si definisce il successore come

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \cup \{x\} .$$

È facile vedere che **N1** e **N3** sono vere. La proprietà **N5** segue dal fatto che  $\mathbb{N}_{ZF}$  è il più piccolo insieme S-saturo. **N2** e **N4** derivano da 2.200.

Abbiamo inoltre visto nel Teorema 2.208 che la relazione  $\subseteq$  soddisfa i requisiti delle Ipotesi 3.25.

### §3.f Induzione generalizzata, buon ordinamento

[27M]

**Proposizione 3.48** (Induzione generalizzata). *Sia  $N \in \mathbb{N}$ , sia  $P(n)$  una proposizione logica vera per  $n = N$  e tale che*

[1XR]

$$\forall n \geq N, P(n) \Rightarrow P(S(n)) ,$$

allora  $P$  è vera per ogni  $n \geq N$ .

Presentiamo adesso il principio di induzione forte.

**Proposizione 3.49** (Induzione forte). *Assumiamo che un ordinamento (parziale) associato a  $\mathbb{N}$  soddisfi 3.25. Sia  $P(n)$  una proposizione logica vera per  $n = 0$  e tale che*

[1XS]

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left( (\forall k \leq n, P(k)) \Rightarrow P(Sn) \right) \tag{3.50}$$

allora  $P$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Questo principio è apparentemente più forte di quello usuale; ma vedremo che è in effetti equivalente.

Anche questo risultato si può generalizzare richiedendo che  $P(N)$  sia vera, e scrivendo l'ipotesi induttiva nella forma " $\forall k, N \leq k \leq n, P(k)$ ": si otterrà che  $P(n)$  è vera per  $n \geq N$ .

Si noti che il principio di buon ordinamento è in un qualche senso equivalente al principio di induzione; si veda 3.55.

### Esercizi

E3.51 Prerequisiti:3.25,3.4.Difficoltà:\*

[1XN]

Usate il principio di induzione 3.4 per dimostrare il principio di induzione forte 3.49

Attenzione: usate le proprietà nell'Ipotesi 3.25, ma non assumete che  $\leq$  sia un ordinamento totale: infatti useremo questo risultato per dimostrarlo.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1XQ']

E3.52 Prerequisiti:3.25,3.49.Difficoltà:\*

[1XP]

Assumiamo che un ordinamento (parziale)  $\leq$  associato a  $\mathbb{N}$  soddisfi 3.25. Usate il principio di induzione forte 3.49 per mostrare che ogni  $A \subseteq \mathbb{N}$  non vuoto ha un elemento minimale, cioè

$$\exists a \in A , \forall b \in A , \neg(b < a) .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1XZ']

E3.53 Prerequisiti: 3.30, 3.52, 2.240. Usate i prerequisiti per mostrare che  $(\mathbb{N}, \leq)$  è ben ordinato. [273]

E3.54 Prerequisiti: 3.49. Usate l'induzione forte per dimostrare che ogni  $n \geq 2$  si fattorizza nel prodotto di numeri primi. [1XT]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1XV']

E3.55 Difficoltà:\*. Sia  $A$  un insieme bene ordinato <sup>†38</sup> dall'ordinamento  $\leq$ ; sia  $m = \min A$ ; allora per proposizioni  $P(a)$  con  $a \in A$  si può usare un metodo di dimostrazione, detto *induzione transfinita*, in cui [1XY]

- si richiede che  $P(m)$  sia vera, e
- si dimostra il “passo induttivo”

$$\forall n \in \mathbb{N} \left( (\forall k < n, P(k)) \Rightarrow P(n) \right)$$

Si dimostri che se la proposizione  $P$  soddisfa le due precedenti, allora  $\forall x \in A, P(x)$ .

Si dimostri inoltre che se  $A = \mathbb{N}$  allora il “passo induttivo” è equivalente al passo induttivo della induzione forte (definita in 3.49).

Altri esercizi che usano l'induzione sono: 8.9

### §3.g Frequentemente, definitivamente [26G]

Siano  $\mathbb{N}$  i numeri naturali.

**Definizione 3.56** (frequentemente, definitivamente). Sia  $P(n)$  una proposizione logica che dipende da una variabile libera  $n \in \mathbb{N}$ . Diremo che [018]  
(Svolto il 2022-10-27)

$P(n)$ vale definitivamente in $n$ se	$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$ vale $P(n)$ ;
$P(n)$ vale frequentemente in $n$ se	$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$ per cui $P(n)$ vale.

Questa definizione è equivalente alla definizione 5.14 per variabile reale  $x \rightarrow \infty$ ; si può ulteriormente generalizzare, come visto in 2.125.

**Nota 3.57.** In Inglese si può tradurre frequentemente come frequently e definitivamente come eventually; ma questi termini non sono molto usati. <sup>†39</sup> [23Q]

#### Esercizi

E3.58 Notate che « $P(n)$  vale definitivamente in  $n$ » implica « $P(n)$  vale frequentemente in  $n$ ». [019]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '01B']

E3.59 Notate che «(non  $P(n)$ ) vale frequentemente in  $n$ » se e solo se «non ( $P(n)$  vale definitivamente in  $n$ )». [01C]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '01D']

E3.60 Notate che « $P(n)$  vale frequentemente in  $n$ » se e solo se « $P(n)$  vale per un numero infinito di  $n$ ». [01F]

(Questa equivalenza non è vera in un qualunque insieme ordinato. Si veda invece 2.126 per la corretta formulazione).

E3.61 Siano ora  $P(n)$ ,  $Q(n)$  due proposizioni.

[01G]  
(Svolto il  
2022-10-27// in par-  
te)

- Dite quali implicazioni vi sono fra
  - “ $(P(n) \wedge Q(n))$  vale definitivamente” e
  - “ $P(n)$  vale definitivamente e  $Q(n)$  vale definitivamente”.
- Similmente per le proposizioni
  - “ $(P(n) \vee Q(n))$  vale definitivamente” e
  - “ $P(n)$  vale definitivamente oppure  $Q(n)$  vale definitivamente”.

Formulate inoltre simili risultati per la nozione di “frequentemente”.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '01H']

E3.62 Siano  $P(n)$ ,  $Q(n)$  due proposizioni. Se “ $P(n)$  vale definitivamente e  $Q(n)$  vale frequentemente” allora “ $(P(n) \wedge Q(n))$  vale frequentemente”. [29G]

<sup>†38</sup>Come definito in 2.235.

<sup>†39</sup>Con alcune importanti eccezioni, come ad esempio [15]

## §4 Gruppi, Anelli, Campi

[12D]

Vediamo brevemente queste definizioni.

**Definizione 4.1.** Un **gruppo** è un insieme  $G$  munito di una operazione binaria  $*$ , che ad ogni coppia  $a, b \in G$  associa un elemento  $a * b \in G$ , rispettando le seguenti proprietà

[12F]

(Svolto il 2022-11-15)

1. *proprietà associativa*: dati  $a, b, c \in G$  vale  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .
2. *esistenza dell'elemento neutro*: un elemento indicato con  $e$  tale che  $a * e = e * a = a$ .
3. *Esistenza dell'inverso*: ad ogni elemento  $a \in G$  è associato un elemento **inverso**  $a'$ , tale che  $a * a' = a' * a = e$ . L'inverso dell'elemento  $a$  è spesso indicato con  $a^{-1}$  (o  $-a$  se il gruppo è commutativo).<sup>†40</sup>

Un gruppo si dice **commutativo** (o abeliano) se vale anche  $a * b = b * a$  per ogni coppia  $a, b \in G$ .

**Definizione 4.2.** Un **anello** è un insieme  $A$  dotato di due operazioni binarie

[12G]

(Svolto il 2022-11-15)

- $+$  (detta somma o addizione) e
- $\cdot$  (detta "moltiplicazione", indicata anche con il simbolo  $\times$  o  $*$ , e spesso omesso),

tale che

- $A$  con  $+$  è un gruppo commutativo (in genere l'elemento neutro si indica con 0);
- l'operazione  $\cdot$  ha elemento neutro (in genere l'elemento neutro si indica con 1) ed è associativa;
- la moltiplicazione distribuisce sull'addizione, sia a sinistra

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in A$$

sia a destra

$$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a) \quad \forall a, b, c \in A$$

Un anello si dice **commutativo** se la moltiplicazione è commutativa. (Nel qual caso si equivalgono le distributività a destra o a sinistra).

Si assume in genere che  $0 \neq 1$  (altrimenti l'insieme  $\{0\}$  sarebbe un anello).

Esempi di anelli commutativi sono: gli interi  $\mathbb{Z}$ , i polinomi  $A[x]$  con coefficienti scelti in un anello commutativo  $A$ .

Un esempio di anello non commutativo molto usato è dato dalle matrici  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , con la loro usuale operazione di addizione e moltiplicazione.

**Definizione 4.3.** Un **campo**  $F$  è un anello per cui la moltiplicazione è commutativa, e ogni elemento  $x \in F$  con  $x \neq 0$  ha un inverso  $x^{-1}$  per la moltiplicazione.

[12H]

(Svolto il 2022-11-15)

(Così  $F \setminus \{0\}$  è un gruppo commutativo per la moltiplicazione, si veda 4.13).

Esempi di campi sono: i numeri razionali  $\mathbb{Q}$ , i numeri reali  $\mathbb{R}$  e i numeri complessi  $\mathbb{C}$ .



**Nota 4.4.** In genere<sup>†41</sup> si usano le scritte a sinistra al posto delle scritte a destra (dove  $x, y, z$  sono nel campo e  $n$  è intero positivo)

[20R]  
(Svolto il  
2022-11-15)

$x - y$	$x + (-y)$
$\frac{x}{y}$	$x \cdot y^{-1}$
$x + y + z$	$(x + y) + z$
$xyz$	$(x \cdot y) \cdot z$
$nx$	$\underbrace{x + \dots + x}_{n \text{ volte}}$
$x^n$	$\underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}}$
$x^{-n}$	$(x^{-1})^n$

Precisamente,  $nx$  significa “sommare  $x$  a se stesso  $n$  volte”; l’operazione  $n \mapsto n \cdot x$  si può definire ricorsivamente ponendo  $0 \cdot x = 0$  e  $(n + 1) \cdot x = n \cdot x + x$ . Similmente  $x^n$  significa “moltiplicare  $x$  per se stesso  $n$  volte”: si veda l’esercizio 4.21.

**Nota 4.5.** Il teorema di Hurwitz [47] asserisce che se  $V$  è un campo ed è anche uno spazio vettoriale reale con un prodotto scalare, allora  $V = \mathbb{R}$  oppure  $V = \mathbb{C}$ .

[12W]

**Definizione 4.6.** Un **anello ordinato**  $F$  è un anello con una relazione d’ordine totale  $\leq$  per la quale, per ogni  $x, y, z \in F$ ,

[12J]

- $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ ;
- $x, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$ .

Per via di 4.13, se  $F$  è un campo, nella seconda ipotesi potremmo equivalentemente scrivere  $x, y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$ . (Riguardo alla seconda ipotesi si veda anche 4.14) Per approfondimenti si vedano le referenze in [40]. Assumeremo che in un anello ordinato la moltiplicazione sia commutativa.

Esempi di campi ordinati sono: i numeri razionali  $\mathbb{Q}$  i numeri reali  $\mathbb{R}$ . I numeri complessi  $\mathbb{C}$  non ammettono un ordinamento che soddisfi le proprietà sopra viste (esercizio 4.19).

**Definizione 4.7.** Un campo ordinato  $F$  è **archimedeo** se  $\forall x, y \in F$  con  $x > 0, y > 0$  esiste un  $n \in \mathbb{N}$  per cui  $nx > y$ . (Si veda 4.4 per la definizione di  $nx$ ).

[12K]

†42

### Esercizi

E4.8 L’elemento neutro di un gruppo è unico. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID] [12M]  
'12N']

E4.9 In un gruppo, l’inverso di un elemento è unico. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID] [12P]  
UUID '12Q']

E4.10 Fissato un elemento  $g \in G$  in un gruppo, le mappe  $L_g : G \rightarrow G$  e  $R_g : G \rightarrow G$  [29C]

†40 La notazione  $a^{-1}$  è giustificato dal fatto che l’elemento inverso è unico: cf 4.9.

†41 Tratto dal 1.13 in [23]

†42 Parti dei seguenti esercizi sono tratti da Cap. 2 Sez. 7 in [3], oppure Cap. 1 in [23],

---

$$L_g(h) = g * h, R_g(h) = h * g$$

di moltiplicazione a destra e a sinistra sono biezioni.

E4.11 Provate<sup>†43</sup> che in un gruppo: [12R]

1. Se  $x + y = x + z$  allora  $y = z$ .
2. Se  $x + y = x$  allora  $y = 0$ .
3. Se  $x + y = 0$  allora  $y = -x$ .
4.  $-(-x) = x$ .

E4.12 Provate<sup>†44</sup> che in un anello: [12S]

1.  $0 \cdot x = 0$
2.  $(-x)y = -(xy) = x(-y)$ .
3.  $(-x)(-y) = xy$ .
4.  $(-1)x = -x$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '299']

E4.13 Considerate la proprietà [203]

$$\forall x, y \in A, x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

questa può essere falsa in un anello  $A$ ; gli anelli per cui vale sono detti *domini d'integrità* [38].

Si mostri che un campo  $F$  è sempre un dominio di integrità. Conseguentemente  $F \setminus \{0\}$  è un gruppo commutativo per la moltiplicazione. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '204']

E4.14 Supponiamo che in un anello  $A$  vi sia un ordinamento totale  $\leq$  tale che per ogni  $x, y, z \in A$  si ha  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ ; allora mostrate che sono equivalenti [12T]

- $x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$ ;
- $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$ .

E4.15 Prerequisiti: 2.101, 4.12, 4.14. Provate<sup>†45</sup> che in un anello ordinato  $F$ : [12V]

1. per ogni  $x \in F, x^2 \geq 0$ , in particolare  $1 = 1^2 > 0$ ;
2.  $x > 0 \Rightarrow -x < 0$
3.  $y > x \Rightarrow -y < -x$ ;
4.  $x \leq y \wedge a \leq 0 \Rightarrow a \cdot x \geq a \cdot y$ ;
5.  $x \geq a \wedge y \geq b \Rightarrow x + y \geq a + b$ ;
6.  $x > a \wedge y \geq b \Rightarrow x + y > a + b$ ;
7.  $x \geq a \geq 0 \wedge y \geq b \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq a \cdot b$ ;

Provate che in un campo ordinato  $F$ :

---

<sup>†43</sup>[23] Prop. 1.14

<sup>†44</sup>[23] Prop. 1.16

<sup>†45</sup>Dal Cap. 2 Sez. 7 in [3], oppure [23] Prop. 1.18

1.  $x > a > 0 \wedge y > b \geq 0 \Rightarrow x \cdot y > a \cdot b$  ;
2.  $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$  ;
3.  $y > x > 0 \Rightarrow x^{-1} > y^{-1} > 0$  ;
4.  $x \cdot y > 0$  se e solo se  $x$  e  $y$  sono concordi (cioè o entrambi  $> 0$  o entrambi  $< 0$ );

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '29B']

E4.16 In un campo ordinato  $F$  chiamiamo  $P = \{x \in F : x \geq 0\}$  l'insieme dei numeri positivi (o nulli); soddisfa le seguenti proprietà: †46 [12X]

- $x, y \in P \Rightarrow x + y, x \cdot y \in P$ ,
- $P \cap (-P) = \{0\}$  e
- $P \cup (-P) = F$ .

viceversa se in un campo  $F$  possiamo trovare un insieme  $P \subseteq F$  che le soddisfi, allora  $F$  è un campo ordinato ponendo  $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$ .

E4.17 Non tutti i campi sono insiemi infiniti. Considerate  $X = \{0, 1\}$  e le operazioni [12Y]  
 $0 + 0 = 1 + 1 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$  e  $1 \cdot 1 = 1$ . Verificate che è un campo. Mostrate che non può essere un campo ordinato.

E4.18 Consideriamo l'anello delle matrici  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  poniamo [12Z]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

allora verificate che

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

concludete che l'anello delle matrici non è commutativo.

E4.19 Mostrate che non esiste un ordinamento  $\leq$  su  $\mathbb{C}$  tale che  $(\mathbb{C}, \leq)$  sia un campo ordinato. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '20S'] [08V]

E4.20 Fissiamo  $N \geq 2$  intero che non sia un quadrato perfetto. Consideriamo il sottoinsieme  $F$  di  $\mathbb{R}$  dato dai numeri  $x$  che si possono scrivere come  $x = a + b\sqrt{N}$ , con  $a, b \in \mathbb{Q}$ ; gli associamo le operazioni di  $\mathbb{R}$ : mostrate che  $F$  è un campo. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '201'] [200]

E4.21 Sia  $F$  un campo; dati  $\alpha \neq 0$  e  $h \in \mathbb{N}$  considerate la definizione ricorsiva dell'elevamento a potenza  $\alpha^h$  data da  $\alpha^0 = 1$  e  $\alpha^{(n+1)} = \alpha^n \cdot \alpha$ ; indi dimostrate che  $\alpha^{h+k} = \alpha^h \alpha^k$  e  $(\alpha^h)^k = \alpha^{(hk)}$  per ogni  $k, h \in \mathbb{N}$ . [202]

E4.22 Prerequisiti: 4.21. Dato  $\alpha \neq 0$  in un campo, definite che  $\alpha^0 = 1$  e che  $\alpha^{-n}$  sia l'inverso moltiplicativo di  $\alpha^n$  quando  $n \geq 1$  naturale. (Usate 4.21). Per  $n, m \in \mathbb{Z}$  mostrate che [20T]

$$\alpha^n \alpha^m = \alpha^{n+m}, \quad (\alpha^h)^k = \alpha^{(hk)};$$

se il campo è ordinato e  $\alpha > 1$  mostrate che  $n \mapsto \alpha^n$  è strettamente monotona crescente.

---

E4.23 Sia  $F$  un anello commutativo,  $a, b \in F$ ,  $n \in \mathbb{N}$  allora

[205]

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

in cui il fattore

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

si chiama “*coefficiente binomiale*”. (Questo risultato è noto come il teorema binomiale, formula di Newton, binomio di Newton o sviluppo binomiale). Per dimostrarlo per induzione, verificate che

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

per  $0 \leq k, k+1 \leq n$ .

---

<sup>†46</sup>Dal Cap. 2 Sec. 7 in [3]

## §5 Retta reale

[09X]

Indicheremo nel seguito con  $\mathbb{R}$  la retta reale, e con  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  la sua estensione. <sup>†47</sup>

Useremo gli *intervalli* (si veda la definizione in 2.141).

**Nota 5.1.** Dato un insieme  $I \subset \mathbb{R}$  vi sono vari modi di dire che una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è **monotona**. Elenchiamo innanzitutto i diversi tipi di monotonia [2DJ]

$$\forall x, y \in I, x < y \implies f(x) \leq f(y) \quad (5.2)$$

$$\forall x, y \in I, x < y \implies f(x) < f(y) \quad (5.3)$$

$$\forall x, y \in I, x < y \implies f(x) \geq f(y) \quad (5.4)$$

$$\forall x, y \in I, x < y \implies f(x) > f(y) \quad (5.5)$$

Purtroppo nell'uso comune vi sono diverse e incompatibili convenzioni usate nel nominare le precedenti definizioni. Ecco una tabella, in cui ogni convenzione è una colonna.

(5.2)	non decrescente	crescente	debolmente crescente
(5.3)	crescente	strettamente crescente	strettamente crescente
(5.4)	non crescente	decrescente	debolmente decrescente
(5.5)	decrescente	strettamente decrescente	strettamente decrescente

In questo testo viene usata la convenzione nell'ultima colonna.

(La prima colonna è, a mio parere, problematica. Spesso porta all'uso, purtroppo comune, di frasi come “ $f$  è una funzione non decrescente” o “prendiamo una funzione  $f$  non decrescente”; questa può dare adito a confusione: sembra dire che  $f$  non soddisfa il requisito di essere decrescente, ma non specifica se è monotona. Chi segue la convenzione in prima colonna (a mio parere) dovrebbe sempre dire anche “monotona”).

### Esercizi

E5.6 Prerequisiti: 2.146.

[09Y]

Si mostri che ogni intervallo  $I$  in  $\mathbb{R}$  ricade in una delle categorie precedentemente viste in 2.142. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '09Z']

E5.7 Prerequisiti: 4.22. Sia fissato  $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ . Sappiamo che, per ogni  $n \geq 1$  naturale, esiste ed è unico un  $\beta > 0$  tale che  $\beta^n = \alpha$ , e  $\beta$  viene denotato dalla notazione  $\sqrt[n]{\alpha}$ . [20V]

(Si veda ad es. la Proposizione 2.6.6 Cap. 2 Sez. 6 degli appunti del corso [3] oppure Teorema 1.21 in [23]). Dato  $q \in \mathbb{Q}$ , scriviamo  $q = n/m$  con  $n, m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$ , definiamo

$$\alpha^q \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[m]{\alpha^n} .$$

Mostrate che questa definizione non dipende dalla scelta della rappresentazione  $q = n/m$ ; che

$$\alpha^q = \left( \sqrt[m]{\alpha} \right)^n ;$$

che per  $p, q \in \mathbb{Q}$

$$\alpha^q \alpha^p = \alpha^{p+q} , \quad (\alpha^p)^q = \alpha^{pq} ;$$

mostrate che quando  $\alpha > 1$  allora  $p \mapsto \alpha^p$  è strettamente monotona crescente.

## §5.a Intorni

E5.8 Prerequisiti: 5.7. Difficoltà: \*. Fissato  $\alpha > 1$ , definite, per  $x \in \mathbb{R}$ ,

[20W]

$$\alpha^x = \sup\{\alpha^p : p \in \mathbb{Q}, p \leq x\} \quad ;$$

mostrate che:

- è una buona definizione (cioè che l'insieme a destra è superiormente limitato e non vuoto).
- che se  $x$  è razionale allora  $\alpha^x$  così definito coincide con la definizione nel precedente esercizio 5.7;
- mostrate che  $x \mapsto \alpha^x$  è strettamente crescente.
- Mostrate che

$$\alpha^x \alpha^y = \alpha^{x+y} \quad , \quad (\alpha^x)^y = \alpha^{(xy)} \quad .$$

Si veda anche l'esercizio 13.5.

E5.9 Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che

[20X]

$$\forall L \in \mathbb{R}, L > b \Rightarrow L > a \quad .$$

Dimostrate che  $b \geq a$ .

E5.10 Sia fissato  $I = \{1, \dots, n\}$ . Siano dati  $n$  punti distinti  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ ; cerchiamo una permutazione  $\sigma : I \rightarrow I$  per cui le disuguaglianze triangolari fra punti successivi siano uguaglianze cioè

[080]

$$|y_{\sigma(i+2)} - y_{\sigma(i+1)}| + |y_{\sigma(i+1)} - y_{\sigma(i)}| = |y_{\sigma(i+2)} - y_{\sigma(i)}|$$

per  $i = 1, \dots, n - 2$ . Si mostri che ne esistono solo due, le chiamiamo  $\sigma_1, \sigma_2$ . Suggerimento: mostrate che ogni tale permutazione necessariamente mette i punti "in ordine", cioè si ha

$$\forall i, y_{\sigma_1(i+1)} > y_{\sigma_1(i)} \quad , \quad \forall i, y_{\sigma_2(i+1)} < y_{\sigma_2(i)}$$

(a meno di decidere quale è  $\sigma_1$  e quale è  $\sigma_2$ ).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0B1']

## §5.a Intorni

[29H]

Gli intorni sono una famiglia di insiemi associata a un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ , oppure a  $x_0 = \pm\infty$ . Gli intorni sono insiemi che contengono un insieme "esempio". Vediamo qui alcune definizioni.

(Svolto il  
2022-11-24)

**Definizione 5.11** (Intorni). *Gli intorni "bucati" di punti  $x_0 \in \mathbb{R}$  si dividono in tre classi.*

[0B2]

- Intorni di  $x_0 \in \mathbb{R}$ , che contengono un insieme del tipo  $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$  per un  $\delta > 0$ ;
- intorni destri di  $x_0 \in \mathbb{R}$ , che contengono un insieme del tipo  $(x_0, x_0 + \delta)$  per un  $\delta > 0$ ;

<sup>147</sup>La struttura topologica di  $\overline{\mathbb{R}}$  sarà ulteriormente discussa in 7.31.

- intorni sinistri di  $x_0 \in \mathbb{R}$ , che contengono un insieme del tipo  $(x_0 - \delta, x_0)$  per un  $\delta > 0$ ;

in ogni caso gli intorni “bucati” non devono contenere il punto  $x_0$ . Gli intorni “pieni” si ottengono aggiungendo  $x_0$ . Gli “intorni pieni” sono la base per la topologia standard su  $\mathbb{R}$ .

Ai precedenti aggiungiamo poi gli intorni di  $\pm\infty$ :

- intorni di  $\infty$ , che contengono un insieme del tipo  $(y, \infty)$  al variare di  $y \in \mathbb{R}$ ;
- intorni di  $-\infty$ , che contengono un insieme del tipo  $(-\infty, y)$  al variare di  $y \in \mathbb{R}$ ;

in questo caso non distinguiamo intorni “bucati” e intorni “pieni”.

(Nella letteratura Inglese gli intorni bucati si chiamano “deleted neighbourhoods” o “punctured neighbourhoods”).

**Esercizio 5.12.** *Prerequisiti: 2.110. Difficoltà: \**. Sia  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  e siano  $\mathcal{F}$  tutti gli intorni di  $x_0$ . Associamo l’ordinamento

[29J]  
(Proposto il  
2022-11-24)

$$I, J \in \mathcal{F}, I \leq J \iff I \supseteq J$$

mostrate che l’ordinamento è filtrante.

(Questo vale sia per intorni “bucati” che “pieni”; sia per “destri” che “sinistri” e “bilaterali”).

(Si veda anche 7.15 per un simile enunciato in spazi topologici).

### §5.b Frequentemente, definitivamente

[29K]

Scriveremo  $\overline{\mathbb{R}}$  per  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

**Definizione 5.13** (punto di accumulazione). Dato  $A \subseteq \mathbb{R}$ , un punto  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  si dice punto di accumulazione per  $A$  se ogni intorno “bucato” di  $x$  interseca  $A$ .

[08G]

**Definizione 5.14** (frequentemente, definitivamente). Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un insieme,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  punto di accumulazione per  $I$ . Sia  $P(x)$  una proposizione logica che possiamo valutare per  $x \in I$ . Definiamo che

[083]

“ $P(x)$ vale definitivamente per $x$ tendente a $x_0$ ” se	esiste un intorno $U$ di $x_0$ $\forall x \in U \cap I$ , vale $P(x)$ ;
“ $P(x)$ vale frequentemente per $x$ tendente a $x_0$ ” se	per ogni intorno $U$ di $x_0$ $\exists x \in U \cap I$ per cui $P(x)$ ;

dove si intende che gli intorni sono “bucati”.

**Nota 5.15.** Come già visto in 3.59, anche in questo caso le due seguenti proposizioni sono equivalenti.

[084]

- “non  $( P(x) \text{ vale definitivamente, per } x \text{ tendente a } x_0 )$ ”,
- “  $( \text{non } P(x) ) \text{ vale frequentemente per } x \text{ tendente a } x_0$ ”.

**Nota 5.16.** Se  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  non è punto di accumulazione per  $I$ , allora si ha sempre che “ $P(x)$  vale definitivamente per  $x$  tendente a  $x_0$ ”.

[22X]

**Proposizione 5.17.** Supponiamo per semplicità che  $I = \mathbb{R}$ . Mettendo insieme le idee precedenti, possiamo scrivere equivalentemente:

[20C]

- se  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

$\exists \delta > 0, \forall x \neq x_0,  x - x_0  < \delta \Rightarrow P(x)$	$P(x)$ vale definitivamente per $x$ tendente a $x_0$
$\forall \delta > 0, \exists x \neq x_0,  x - x_0  < \delta \wedge P(x)$	$P(x)$ vale frequentemente per $x$ tendente a $x_0$

- nel caso in cui  $x_0 = \infty$

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x, x > y \Rightarrow P(x)$	$P(x)$ vale definitivamente per $x$ tendente a $\infty$
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x, x > y \wedge P(x)$	$P(x)$ vale frequentemente per $x$ tendente a $\infty$

- e similmente  $x_0 = -\infty$

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x, x < y \Rightarrow P(x)$	$P(x)$ vale definitivamente per $x$ tendente a $-\infty$
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x, x < y \wedge P(x)$	$P(x)$ vale frequentemente per $x$ tendente a $-\infty$

## §5.c Estremi superiori e inferiori

[29M]

Rivediamo preliminarmente le caratterizzazioni degli estremi superiori e inferiori in  $\mathbb{R}$ , viste in Sez. §2.d.c (o in Cap. 1 Sec. 5 negli appunti [3]). Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto.

**Definizione 5.18.** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto. Ricordiamo che l'estremo superiore di un insieme  $A$  è il minimo dei maggioranti; lo indicheremo con la usuale scrittura  $\sup A$ . Se  $A$  è superiormente limitato allora  $\sup A$  è un numero reale; in caso contrario, per convenzione, si pone  $\sup A = +\infty$ .

[08T]

**Proposizione 5.19.** Sia dunque  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto, sia  $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ; si possono facilmente dimostrare le seguenti proprietà:

[208]

(Svolto il 2022-11-24)

$\sup A \leq l$	$\forall x \in A, x \leq l$
$\sup A > l$	$\exists x \in A, x > l$
$\sup A < l$	$\exists h < l, \forall x \in A, x \leq h$
$\sup A \geq l$	$\forall h < l, \exists x \in A, x > h$

la prima e la terza derivano dalla definizione di estremo superiore, <sup>†48</sup> la seconda e la quarta per negazione; nella terza si può concludere equivalentemente che  $x < h$ , e nella quarta che  $x \geq h$ .

Se  $l \neq +\infty$  allora usa anche scrivere (sostituendo  $h = l - \varepsilon$ )

$\sup A < l$	$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, x \leq l - \varepsilon$
$\sup A \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > l - \varepsilon$

Combinando le precedenti, riotteniamo il risultato già visto in 2.138

**Corollario 5.20.** Preso  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto, allora  $\sup A$  è l'unico numero  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  che soddisfa queste due proprietà

[20K]

(Svolto il 2022-11-24)

$$\forall x \in A, x \leq \alpha$$

$$\forall h < \alpha, \exists x \in A, x > h$$

come già visto in 2.138 per il caso più generale di insiemi totalmente ordinati.



**Definizione 5.21.** Similmente, dato  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto, l'estremo inferiore di  $A$  è il massimo dei minoranti; lo indicheremo con la usuale scrittura  $\inf A$ . Se  $A$  è inferiormente limitato allora  $\inf A$  è un numero reale; in caso contrario, per convenzione, si pone  $\inf A = -\infty$ . [209]

**Nota 5.22.** Si noti che se si sostituisce  $A$  con [0B5]

$$-A = \{-x : x \in A\}$$

(Proposto il 2022-11-24)

e  $l$  con  $-l$ , si passa dalle definizioni del sup a quelle del inf (e viceversa).

**Proposizione 5.23.** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto, sia  $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ; valgono le seguenti proprietà: [20B]

$\inf A \geq l$	$\forall x \in A, x \geq l$
$\inf A < l$	$\exists x \in A, x < l$
$\inf A > l$	$\exists h > l, \forall x \in A, x \geq h$
$\inf A \leq l$	$\forall h > l, \exists x \in A, x < h$
Se $l \neq -\infty$ allora usa anche scrivere (sostituendo $h = l + \varepsilon$ )	
$\inf A > l$	$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, x \geq l + \varepsilon$
$\inf A \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x \leq l + \varepsilon$

**Corollario 5.24.** Preso  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto, allora  $\inf A$  è l'unico numero  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  che soddisfa queste due proprietà [20M]  
(Proposto il 2022-11-24)

$$\begin{aligned} \forall x \in A, x &\geq \alpha \\ \forall h > \alpha, \exists x \in A, x &< h \end{aligned}$$

Spesso le precedenti definizioni e proprietà si usano in questa forma.

**Definizione 5.25.** Data  $J$  famiglia di indici non vuota, sia  $a_n \in \mathbb{R}$  per  $n \in J$ . Si definiscono gli estremi superiori e inferiori come [20H]  
(Svolto il 2022-11-24)

$$\sup_{n \in J} a_n = \sup A \quad , \quad \inf_{n \in J} a_n = \inf A$$

dove  $A = \{a_n : n \in J\}$  è l'immagine della successione.

Dato  $D$  non vuoto, sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Si definiscono gli estremi superiori e inferiori come

$$\sup_{x \in D} f(x) = \sup A \quad , \quad \inf_{x \in D} f(x) = \inf A$$

dove  $A = \{f(x) : x \in D\}$  è l'immagine della funzione.

### §5.c.a Esercizi

Siano  $I, J$  generici insiemi non vuoti. Si vedano le definizioni in Sez. §5.c

#### Esercizi

E5.26 Sia  $a_n$  una successione a valori reali, per  $n \in I$  un insieme di indici; siano  $r > 0, t \in \mathbb{R}, \rho < 0$ ; mostrate che [0B6]  
(Svolto il 2022-11-24)

$$\sup_{n \in I} (a_n + t) = t + \sup_{n \in I} a_n \quad , \quad \sup_{n \in I} (r a_n) = r \sup_{n \in I} a_n \quad , \quad \sup_{n \in I} (\rho a_n) = \rho \inf_{n \in I} a_n \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22W']

E5.27 Sia  $a_{n,m}$  una successione reali a due indici  $n \in I, m \in J$ , mostrate che

$$\sup_{n \in I, m \in J} a_{n,m} = \sup_{n \in I} \left( \sup_{m \in J} a_{n,m} \right).$$

[0B7]  
(Svolto il  
2022-11-24)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0B8']

E5.28 Prerequisiti: 5.27, 5.26. Siano  $a_n, b_n$  successioni reali, per  $n \in I$ , mostrate che

$$\sup_{n, m \in I} (a_n + b_m) = (\sup_{n \in I} a_n) + (\sup_{n \in I} b_n),$$

[0B9]  
(Svolto il  
2022-11-24)

ma

$$\sup_{n \in I} (a_n + b_n) \leq (\sup_{n \in I} a_n) + (\sup_{n \in I} b_n);$$

trovate un caso in cui la disuguaglianza è stretta. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0BB']

E5.29 Prerequisiti: 5.27. Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  e sia

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

[0BC]

la somma di Minkowski <sup>†49</sup> dei due insiemi: mostrate che

$$\sup(A \oplus B) = (\sup A) + (\sup B).$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0BD']

E5.30 Siano  $I_n \subseteq \mathbb{R}$  (per  $n \in \mathbb{N}$ ) intervalli non vuoti chiusi e limitati, tali che  $I_{n+1} \subseteq I_n$ : si mostri che  $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$  è non vuoto.

[0BF]

Questo risultato è noto come “teorema dell’intersezione di Cantor” [45]. Si estende a contesti più generali, si vedano 9.120 e 7.41.

Se sostituiamo  $\mathbb{R}$  con  $\mathbb{Q}$  e assumiamo che  $I_n \subseteq \mathbb{Q}$ , il risultato vale lo stesso?

E5.31 Si studino le equivalenze in proposizione 5.19 per il caso in cui  $\sup A = +\infty$ : cosa dicono le formule a destra?

[20P]  
(Svolto il  
2022-11-24)

E5.32 Riscrivete le proprietà della proposizione 5.23 per i casi visti in 5.25.

[20J]

E5.33 Calcolate estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi (dove  $n, m$  sono interi).

[20Y]  
(Proposto il  
2022-12)

$$\left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2} : n, m \geq 1 \right\}, \quad \left\{ \frac{mn}{m + n} : n, m \geq 1 \right\}$$

$$\{2^n + 2^m : n, m \in \mathbb{N}\}, \quad \{2^n + 2^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\left\{ \frac{m^2 - 2}{n} : n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}, \quad \left\{ \frac{m + 1}{m^2} : m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

## §5.d Limiti

[29N]

Scriveremo  $\overline{\mathbb{R}}$  per  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

**Definizione 5.34.** Sia  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  punto di accumulazione di  $I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  [20D] funzione,  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ .

L'idea di limite (destro o sinistro o bilaterale) è così espressa.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$	per ogni intorno $V$ "pieno" di $l$ , esiste intorno $U$ "bucato" di $x_0$ tale che per ogni $x \in U \cap I$ , si ha $f(x) \in V$
-------------------------------------	--

dove l'intorno  $U$  sarà destro o sinistro se il limite è destro o sinistro; si può anche dire che

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$	per ogni intorno $V$ "pieno" di $l$ , si ha $f(x) \in V$ definitivamente per $x$ tendente a $x_0$
-------------------------------------	---

aggiungendo che  $x > x_0$  se il limite è destro, oppure  $x < x_0$  se il limite è sinistro.

Scriviamo ora esplicitamente queste idee.

**Proposizione 5.35.** Sia  $I$  un insieme,  $x_0 \in \mathbb{R}$  punto di accumulazione per  $I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  [0BH] funzione,  $l \in \mathbb{R}$ .

Mettendo insieme tutte le definizioni viste precedentemente, otteniamo queste definizioni di limite.

Nel caso  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $l \in \mathbb{R}$ :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow  f(x) - l  < \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow  f(x) - l  < \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow  f(x) - l  < \varepsilon$

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $l = \pm\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$

Sia  $l \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = \pm\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow  f(x) - l  < \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow  f(x) - l  < \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$

**Nota 5.36.** Si noti che se si sostituisce  $f \mapsto -f$ , si passa dalle definizioni con  $l = \infty$  a quelle del  $l = -\infty$  (e viceversa). Un'altra simmetria si ottiene scambiando  $x_0 \rightarrow -x_0$  e gli intorni destri e sinistri. [0BJ]

### §5.e Limiti superiori e inferiori [29P]

Dalla precedente definizione passiamo alle definizioni di "limite superiore"  $\lim \sup$  e "limite inferiore"  $\lim \inf$ . L'idea è così espressa.

**Definizione 5.37.** Sia  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  punto di accumulazione di  $I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  [20F]

<sup>†48</sup>In particolare nella terza si può pensare che  $h = \sup A$ .

<sup>†49</sup>La somma di Minkowski ritornerà nella sezione §11.f.

funzione. Si definiscono

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{U \text{ intorno di } x_0} \sup_{x \in U \cap I} f(x) \quad (5.38)$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{U \text{ intorno di } x_0} \inf_{x \in U \cap I} f(x) \quad (5.39)$$

dove il primo “inf” (risp. il “sup”) si esegue rispetto alla famiglia di tutti gli intorno  $U$  di  $x_0$  (sempre del tipo “col buco”); e gli intorno saranno destri o sinistri se il limite è destro o sinistro.

**Nota 5.40.** Usando le proprietà di inf, sup, otteniamo ad esempio queste caratterizzazioni

[20G]  
(Svolto il  
2022-11-29)

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq l \iff \forall z > l, \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0, f(x) < z ;$$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq l \iff \forall z < l, \text{ frequentemente per } x \rightarrow x_0, f(x) > z ;$$

e così via. (In questa scrittura semplificata, diamo per sottinteso che  $x \in I$ ).

In particolare, ponendo  $l = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , le precedenti caratterizzano esattamente il “limsup”.

**Corollario 5.41.** Si ha  $\alpha = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$  se e solo se

[20N]

$$\forall z > \alpha, \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0, f(x) < z ;$$

$$\forall z < \alpha, \text{ frequentemente per } x \rightarrow x_0, f(x) > z .$$

Le esplicitiamo ulteriormente in quanto segue. (Si raccomanda di provare a riscrivere autonomamente alcune voci, a titolo di esercizio).

**Proposizione 5.42.** Nel caso  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $l \in \mathbb{R}$ , dividiamo la definizione in due condizioni:<sup>†50</sup>

[0BK]

$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq l$ $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x \neq x_0, x \in I, f(x) > l - \varepsilon$
$\limsup_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \leq l$ $\limsup_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x > x_0, x \in I, f(x) > l - \varepsilon$
$\limsup_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq l$ $\limsup_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x < x_0, x \in I, f(x) > l - \varepsilon$

<sup>†50</sup>Nelle seguenti tabelle tutte le virgole “,” dopo l’ultimo quantificatore devono essere interpretate come congiunzioni “^”, ma sono state scritte come “,” per alleggerire la notazione.

$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq l$ $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x \neq x_0, x \in I, f(x) < l + \varepsilon$
$\liminf_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \geq l$ $\liminf_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x > x_0, x \in I, f(x) < l + \varepsilon$
$\liminf_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \geq l$ $\liminf_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x < x_0, x \in I, f(x) < l + \varepsilon$

Nel caso  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $l = \pm\infty$ :

$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x \neq x_0, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x > x_0, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x < x_0, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x,  x - x_0  < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x \neq x_0, x \in I, f(x) < z$
$\liminf_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x > x_0, x \in I, f(x) < z$
$\liminf_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x,  x - x_0  < \delta, x < x_0, x \in I, f(x) < z$

Nel caso  $x_0 = \pm\infty$  e  $l = \pm\infty$ :

$\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) < z$
$\liminf_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) < z$

Nel caso  $x_0 = \pm\infty$  e  $l \in \mathbb{R}$ :

$\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$
$\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) > l - \varepsilon$
$\limsup_{x \rightarrow -\infty} f(x) \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$
$\limsup_{x \rightarrow -\infty} f(x) \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) > l - \varepsilon$
$\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) < l + \varepsilon$
$\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$
$\liminf_{x \rightarrow -\infty} f(x) \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) < l + \varepsilon$
$\liminf_{x \rightarrow -\infty} f(x) \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$

**Nota 5.43.** Notate che

[OBM]

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

e

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

**Nota 5.44.** Si noti che se si sostituisce  $f \mapsto -f$ ,  $l \mapsto -l$ , si passa dalle definizioni del  $\limsup$  a quelle del  $\liminf$  (e viceversa). Un'altra simmetria si ottiene scambiando  $x_0 \rightarrow -x_0$  e gli intorni/limiti destri e sinistri. [OBN]

### Esercizi

E5.45 Siano  $A_1, A_2 \dots$  insiemi, per  $n \in \mathbb{N}$ ; sia  $X = \bigcup_n A_n$ . Definiamo la funzione caratteristica  $\mathbb{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  come [OBP]

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

Useremo le definizioni  $\limsup_n A_n$  e  $\liminf_n A_n$  viste in eqn. (2.316) e (2.317). Si ha

$$\mathbb{1}_{(\limsup_n A_n)} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n} , \tag{5.46}$$

$$\mathbb{1}_{(\liminf_n A_n)} = \liminf_n \mathbb{1}_{A_n} . \tag{5.47}$$

E5.48 Fissiamo una successione  $a_n$  a valori reali; consideriamo ora la definizione in 5.37 ponendo  $I = \mathbb{N}$  e  $x_0 = \infty$ , in modo che gli intorni di  $x_0$  siano gli insiemi contenenti  $[n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$ ; con questi presupposti mostrate che si ha [OBQ]

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n &= \inf_n \sup_{m \geq n} a_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} a_m , \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &= \sup_n \inf_{m \geq n} a_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} a_m . \end{aligned} \tag{5.49}$$

E5.50 Prerequisiti: 5.37, 5.12, 2.110, 6.58, 6.63. Difficoltà: \*. [29R]

Sia  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  punto di accumulazione di  $I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  funzione. Come in 5.12 (Proposto il 2022-11-24) siano  $\mathcal{F}$  tutti gli intorni di  $x_0$  con l'ordinamento filtrante

$$U, V \in \mathcal{F} , U \leq V \iff U \supseteq V .$$

Sia

$$s, i : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} , s(U) = \sup_{x \in U \cap I} f(x) , i(U) = \inf_{x \in U \cap I} f(x)$$

notate che sono funzioni monotone, e mostrate che <sup>†51</sup>

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{U \in \mathcal{F}} s(U) = \lim_{U \in \mathcal{F}} s(U) \tag{5.51}$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{U \in \mathcal{F}} i(U) = \lim_{U \in \mathcal{F}} i(U) \tag{5.52}$$

dove i limiti sono definiti in 6.58.

E5.53 Prerequisiti: 5.50.

[29S]

Sia  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  punto di accumulazione di  $I$ , e siano  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni. Mostrate che

(Svolto il 2022-11-24)

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) + \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) .$$

E5.54 Sia  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  punto di accumulazione di  $I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  funzione. Siano  $r > 0, t \in \mathbb{R}, \rho < 0$ ; mostrate che

[29T]

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow x_0} (f(x) + t) &= t + \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) , & \limsup_{x \rightarrow x_0} (rf(x)) &= r \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) , \\ \limsup_{x \rightarrow x_0} (\rho f(x)) &= \rho \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) . \end{aligned}$$

Altri esercizi su limiti di successioni si trovano in Sez. §6.a.

## §5.f Approssimazione di numeri irrazionali

[29Q]

Nei prossimi esercizi useremo le seguenti definizioni.

**Definizione 5.55.** Per  $x \in \mathbb{R}$  sia  $\lfloor x \rfloor$  la parte intera inferiore di  $x$  definita da

[OBS]

$$\lfloor x \rfloor \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

(detta in Inglese floor function).

**Definizione 5.56.**  $x - \lfloor x \rfloor$  è la parte frazionaria di  $x$ .

[OBT]

(Posto  $\varphi(x) = x - \lfloor x \rfloor$ , notate che  $\varphi(3, 1415) = 0, 1415$  ma  $\varphi(-4, 222) = 0, 778$  perché  $\lfloor -4, 222 \rfloor = -5$ ).

### Esercizi

E5.57 Notate che  $k = \lfloor x \rfloor$  è l'unico intero per cui si ha  $k \leq x < k + 1$  o equivalentemente  $0 \leq (x - k) < 1$  o equivalentemente  $x - 1 < k \leq x$ .

[OBV]

E5.58 Prerequisiti: 5.55. Dati  $x \in \mathbb{R}$  e  $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ , si dimostri che almeno un elemento dell'insieme  $\{x, 2x, \dots, (N - 1)x\}$  dista al massimo  $1/N$  da un intero, cioè esistono  $n, m \in \mathbb{Z}$  con  $1 \leq n \leq N - 1$  tali che  $|nx - m| \leq 1/N$ .

[OBW]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OBX']

E5.59 Prerequisiti: 5.55, 5.58. Dati  $x, b \in \mathbb{R}$  con  $x \neq 0$  irrazionale, e  $\varepsilon > 0$ , si dimostri che esiste un  $M$  naturale tale che  $Mx - b$  dista al massimo  $\varepsilon$  da un intero.

[OBY]

Sia  $\varphi(x) = x - \lfloor x \rfloor$  la parte frazionaria di  $x$ , si ha  $\varphi(x) \in [0, 1)$ . Il risultato precedente implica che la successione  $\varphi(nx)$  è densa nell'intervallo  $[0, 1]$ .

Notate che invece se  $x \neq 0$  è razionale cioè  $x = n/d$  con  $n, d$  interi primi tra loro e  $d > 0$ , allora la successione  $\varphi(nx)$  assume tutti e soli i valori  $\{0, 1/d, 2/d, \dots, (d - 1)/d\}$ .

(Questo si dimostra con il Lemma di Bézout [39]).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OBZ']

E5.60 Prerequisiti: 5.58. (Teorema di approssimazione di Dirichlet) Dato un numero irrazionale  $x$ , si dimostri che esistono infiniti razionali  $\alpha$  tali che si può rappresentare  $\alpha = m/n$  in modo da soddisfare la relazione [0C1]

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2} .$$

Alcuni commenti.

- Si noti per ogni fissato  $n \geq 2$  esiste al più un  $m$  per cui la precedente relazione vale; ma potrebbe non esserne uno.
- Si noti che se la relazione vale per un  $\alpha$  razionale, vi sono solo finite scelte di rappresentazioni per cui vale,
- e sicuramente vale per la scrittura “canonica” con  $n, m$  primi fra loro.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0C2']

Notate che il teorema di Hurwitz [37] dice che per ogni irrazionale  $\xi$  esistono infiniti  $m, n \in \mathbb{Z}$  coprimi per cui [2B0]

$$\left| \xi - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} n^2} .$$

E5.61 Fissati  $k > 0, \varepsilon > 0$  e un numero razionale  $x$ , si dimostri che esistono solo finiti razionali  $\alpha$  tali che si può rappresentare  $\alpha = m/n$  in modo da soddisfare la relazione [0C3]

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{k}{n^{1+\varepsilon}} .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0C4']

E5.62 Dimostrare che per ogni razionale  $m/n$  si ha [0C5]

$$\left| \sqrt{2} - \frac{m}{n} \right| > \frac{1}{4n^2} .$$

Si ottiene che l'insieme  $A = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*} \left( \frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2} \right)$  è un aperto che contiene ogni numero razionale, ma  $A \neq \mathbb{R}$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0C6']

## §5.g Algebrici

**Definizione 5.63.** Un numero  $\alpha \in \mathbb{R}$  è detto algebrico se esiste un polinomio  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  con coefficienti razionali tale che  $p(\alpha) = 0$ . In caso contrario  $\alpha$  è detto trascendente. [0C7]

Notiamo che ogni  $\alpha = n/m$  razionale è algebrico, in quanto radice di  $p(x) = mx - n$ .

**Definizione 5.64.** Dato un anello commutativo  $A$ , l'insieme dei polinomi  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  con coefficienti  $a_i \in A$  è usualmente denotato da  $A[x]$ ; questo insieme, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi, è un anello commutativo. [0C8]

Vogliamo mostrare che i numeri algebrici sono un campo.

<sup>†51</sup>cf 5.38, (5.39).



**Esercizi**

E5.65 Dato  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $p \in \mathbb{Q}[z]$  tale che  $p(\alpha) = 0$ , si costruisca un  $q \in \mathbb{Z}[z]$  tale che  $q(\alpha) = 0$ . [OC9]

Dunque la definizione di *algebrico* si può dare equivalentemente con i polinomi a coefficienti interi.

E5.66 Dato  $\alpha \neq 0$  e  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $p \in \mathbb{Q}[z]$  tale che  $p(\alpha) = 0$ , si costruisca un  $q \in \mathbb{Q}[z]$  tale che  $q(1/\alpha) = 0$ . [OCB]

Dunque se  $\alpha \neq 0$  è algebrico allora  $1/\alpha$  è algebrico.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OBR']

E5.67 Dato  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $p \in \mathbb{Q}[z]$  tale che  $p(\alpha) = 0$ , dato  $b \in \mathbb{Q}$  si costruisca un  $q \in \mathbb{Q}[z]$  tale che  $q(b\alpha) = 0$ . [OCC]

Dunque se  $\alpha$  è algebrico allora  $b\alpha$  è algebrico.

E5.68 Dato  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $p \in \mathbb{Q}[z]$  tale che  $p(\alpha) = 0$ , dato  $b \in \mathbb{Q}$  si costruisca un  $q \in \mathbb{Q}[z]$  tale che  $q(b + \alpha) = 0$ . [OCD]

Dunque se  $\alpha$  è algebrico allora  $b + \alpha$  è algebrico.

E5.69 Difficoltà:\* Più in generale, dati  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $p \in \mathbb{Q}[z]$   $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ ,  $q \in \mathbb{Q}[z]$ , e date  $\alpha, \beta$  tali che  $p(\alpha) = 0 = q(\beta)$ , si costruisca un polinomio  $r \in \mathbb{Q}[z]$  tale che  $r(\alpha + \beta) = 0$ . [OCF]

*(Sugg. si usi la teoria del risultante [48]).*

Dunque se  $\alpha, \beta$  sono algebrici allora  $\alpha + \beta$  è algebrico.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OCG']

E5.70 Si mostri che se  $\alpha$  è algebrico allora  $\alpha^2$  è algebrico. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OCJ']

E5.71 Se  $\alpha, \beta$  sono algebrici si mostri che  $\alpha\beta$  è algebrico. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OCM']

Quanto sopra dimostra che i numeri algebrici sono un campo.

## §6 Successioni e serie

[OCN]

### §6.a Successioni

Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  una successione di numeri reali (come definita in in 2.160).

Dato  $N \in \mathbb{N}$  nel seguito scriveremo  $\sup_{n \geq N} a_n$  invece di  $\sup\{a_N, a_{N+1} \dots\}$ , e analogamente per l'estremo inferiore. (Questo è in accordo con quanto discusso in 5.25)

#### Esercizi

E6.1 Prerequisiti: 5.24.

[OCP]

Si ha che  $\sup_{n \geq N} a_n = \sigma \in \overline{\mathbb{R}}$  se e solo se

$$\forall n \geq N, a_n \leq \sigma \quad \text{e} \quad (6.2)$$

$$\forall L < \sigma, \exists n \geq N, a_n > L \quad (6.3)$$

(notate che se  $\sigma = \infty$  la prima è banalmente vera, mentre se  $\sigma = -\infty$  quest'ultima è vera perché non vi sono  $L$ ).

**Soluzione. 6.4.** Segue dalla caratterizzazione 5.20.

[OCQ]

E6.5 Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione con  $a_n \sim n^n$ . Si dimostri che, posto  $s_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k$  si ha  $s_n \sim a_n$ .

[OCR]

E6.6 Siano  $e_n, d_n$  due successioni reali tali che  $d_n \leq e_n$  per ogni  $n$ , e supponiamo che  $\limsup_n e_n = \liminf_n d_n = b$  (possibilmente infinito): mostrate allora che  $\lim_n e_n = \lim_n d_n = b$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OCT']

[OCS]

E6.7 Prerequisiti: 5.28, 5.48. Siano  $a_n, b_n$  successioni a valori reali, mostrate che

[OCV]

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq (\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n) + (\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n) ;$$

(Svolto il 2022-11-24)

trovate un caso in cui la disuguaglianza è stretta. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OCW']

E6.8 Difficoltà: \*.

[OCX]

Sia  $a_{n,m}$  una successione reale <sup>†52</sup> a due indici  $n, m \in \mathbb{N}$ . Supponiamo che

- per ogni  $m$  esista il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,m}$ , e che
- esista finito il limite  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} = b_n$  uniformemente in  $n$ , cioè

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, \forall h \geq m \quad |a_{n,h} - b_n| < \varepsilon .$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,m} \quad (6.9)$$

nel senso che se uno dei due limiti esiste (possibilmente infinito), allora esiste anche l'altro, e sono uguali.

Trovate un semplice esempio in cui i due limiti in (6.9) sono infiniti.

<sup>†52</sup>Questo risultato vale più in generale se  $a_{n,m}$  sono elementi di uno spazio metrico; inoltre un simile risultato si ha quando i limiti  $n \rightarrow \infty$  e/o  $m \rightarrow \infty$  vengono rimpiazzati con limiti  $x \rightarrow \hat{x}$  e/o  $y \rightarrow \hat{y}$  dove le precedenti variabili si muovono in spazi metrici. Si veda ad esempio 17.12.

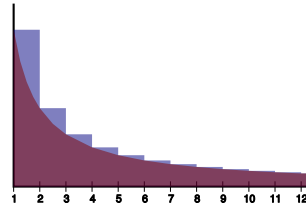


Figura 1: Rappresentazione della costante di Eulero-Mascheroni  
 Immagine di William Demchick, [Creative Commons Attribution 3.0 Unported License](#), tratta da [wikipedia](#).

Trovate un esempio in cui  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} = b_n$  ma il limite non è uniforme e la precedente uguaglianza (6.9) non vale.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OCZ']

E6.10 **Prerequisiti:** 6.8, 6.6. Sia di nuovo  $a_{n,m}$  una successione reale a due indici  $n, m \in \mathbb{N}$ ; supponiamo che, per ogni  $n$ , esista finito il  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} = b_n$  uniformemente in  $n$ , e che esista finito il  $\lim_n b_n$ . Si può concludere che esistono i limiti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,m}$  per ogni fissato  $m$ ? Sapete scrivere un'uguaglianza come in eqn. (6.9) in cui però a destra si usino i limiti superiori o inferiori di  $a_{n,m}$  per  $n \rightarrow \infty$ , al posto dei limiti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,m}$ ?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OD1']

E6.11 **Difficoltà:** \*. Mostrate che da ogni successione  $(a_n)_n$  si può estrarre una sottosuccessione monotona. **Soluzione nascosta:** [UNACCESSIBLE UUID 'OD3']

E6.12 **Difficoltà:** \*. Mostrate che da ogni successione  $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$  si può estrarre una sottosuccessione monotona per cui

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OD5']

E6.13 **Argomenti:** costante di Eulero-Mascheroni. **Prerequisiti:** 2.186. [OD6]

Mostrate che esiste finito il limite

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right) \quad .$$

Questa  $\gamma$  è detta **Costante di Eulero - Mascheroni**. Si può definire in moltissimi modi diversi (si veda il link precedente) fra cui

$$\gamma = \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx$$

dove le parentesi  $[\cdot]$  indicano la funzione parte intera  $[x] \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ . Nella immagine 1 la costante  $\gamma$  è l'area blu.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OD8']

E6.14 Nota: Ese 5 del compito gennaio 2010.

[0D9]

Sia  $a_k = \sqrt[3]{k^3 + k} - k$ . Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^n a_k \sim \frac{1}{3} \log(n)$$

nel senso che il rapporto fra queste due successioni tende a 1 quando  $n \rightarrow \infty$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ODB'] [UNACCESSIBLE UUID 'ODC']

E6.15 Nota: Esercizio 1 del compito 9 Aprile 2011. Sia  $(a_n)$  una successione di numeri reali, con  $a_n \geq 0$ .

[0DD]

1. Si mostri che se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge allora convergono anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \right)$$

2. Assumendo inoltre  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergente, poniamo

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \right), \quad c = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

si mostri allora che  $a^2 = 2b + c$ .

**Esercizio 6.16.** Siano  $a_n, b_n$  successioni reali (che possono avere segno variabile, assumere valore zero, e non sono necessariamente infinitesime).

[0DJ]

Ricordiamo che la notazione  $a_n = o(b_n)$  significa:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n} \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon |b_n|.$$

Si mostri che queste due asserzioni sono equivalenti.

- Definitivamente in  $n$  si ha che  $a_n = 0 \iff b_n = 0$ ; precisato questo si ha  $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$ , dove si decide che  $0/0 = 1$  (in particolare  $a_n, b_n$  hanno definitivamente lo stesso segno, quando non sono entrambi nulli);
- si ha che  $a_n = b_n + o(b_n)$ .

La seconda condizione appare in Definizione 3.2.7 in [3] dove viene indicata con la notazione  $a_n \sim b_n$ .

Deducete che  $a_n \sim b_n$  è una relazione di equivalenza.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '29Y']

**Esercizio 6.17.** Prerequisiti: 2.191. Siano  $a_n, b_n$  successioni reali (che possono avere segno variabile, assumere valore zero, e non sono necessariamente infinitesime); sia  $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  lo spazio di tutte le successioni.

[02F]

Ricordiamo che la notazione  $a_n = O(b_n)$  significa:

$$\exists M > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n} \Rightarrow |a_n| \leq M |b_n|.$$

Si mostrino queste asserzioni:

- per  $a, b \in X, a = (a_n)_n, b = (b_n)_n$  consideriamo la relazione

$$aRb \iff a_n = O(b_n)$$

mostrate che  $R$  è un preordine;

- definiamo  $x \asymp y \iff (xRy \wedge yRx)$  allora  $\asymp$  è una relazione di equivalenza, inoltre  $R$  è invariante per  $\asymp$ , la sua proiezione  $\leq$  è una relazione d'ordine su  $X/\asymp$ ; (sugg. usate la Prop. 11.58).
- Definite (come usuale)

$$\hat{a} < \hat{b} \iff (\hat{a} \leq \hat{b} \wedge \hat{a} \neq \hat{b})$$

per  $\hat{a}, \hat{b} \in X/\asymp, (a_n)_n \in \hat{a}, (b_n)_n \in \hat{b}$  rappresentanti; assumendo che  $b_n \neq 0$  (definitivamente in  $n$ ), mostrate che

$$\hat{a} < \hat{b} \iff 0 = \liminf_n \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{b_n} < \infty .$$

Chiamiamo gli elementi di  $X/\asymp$  ordini di grandezza. La precedente discussione è collegato alla Definizione 3.2.3 (e seguenti) in [3].

Si vedano anche gli esercizi 5.28 e 5.27.

### §6.a.a Somministrazione per parti

#### Esercizi

- E6.18 Siano  $(a_n)_n, (b_n)_n$  successioni di numeri reali e sia  $c_n$  definita come da 6.50; [217] siano poi

$$A_n = \sum_{h=0}^n a_h, B_n = \sum_{h=0}^n b_h, C_n = \sum_{h=0}^n c_h$$

le somme parziali delle tre serie, supponiamo che  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$  sia convergente: si mostri che

$$C_n = \sum_{i=0}^n a_{n-i} B_i = \sum_{i=0}^n a_{n-i} (B_i - B) + A_n B .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '216']

- E6.19 Note:Tratto da Rudin [23] Prop. 3.41. [21H]

Siano  $(a_n)_n, (b_n)_n$ , successioni, sia  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  e  $A_{-1} = 0, 0 \leq p \leq q$ , allora

$$\sum_{n=p}^q a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p .$$

## §6.b Successioni definite per ricorrenza

### Esercizi

E6.20 Siano  $f(x) = x - x^3$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ , e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione definita per ricorrenza da  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Si dimostri che esiste un  $\lambda > 0$  tale che se  $|x_0| < \lambda$  allora  $x_n \rightarrow 0$ , mentre se  $|x_0| > \lambda$  allora  $|x_n| \rightarrow \infty$ ; e possibilmente si calcoli questo  $\lambda$ . [ODK]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ODM']

E6.21 NOTE: metodo Babilonese per la radice quadrata. Sia  $S > 0$  e consideriamo la successione definita per ricorrenza da [ODN]

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{S}{x_n} \right) ;$$

mostrate che  $x_n \rightarrow \sqrt{S}$  e che, per  $S \in [1/4, 1]$  e  $x_0 = 1$ , la convergenza è superquadratica, cioè

$$|x_n - \sqrt{S}| \leq 2^{1-2^n} .$$

Trovate una funzione  $f(x)$  (dipendente da  $S$ ) tale che la precedente iterazione si possa vedere come un metodo di Newton, cioè

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{2} \left( x + \frac{S}{x} \right).$$

Generalizzate il metodo Babilonese per trovare una radice  $\sqrt[k]{S}$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ODP']

## §6.c Serie

### §6.c.a Criteri

**Teorema 6.22** (Criterio della radice). Sia  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  allora [219]

- Se  $\alpha < 1$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge assolutamente;
- Se  $\alpha = 1$  non si può concludere nulla;
- Se  $\alpha > 1$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  non converge, e inoltre  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  diverge.

*Dimostrazione.* [21B]

- Se  $\alpha < 1$ , preso  $L \in (\alpha, 1)$  si ha definitivamente  $\sqrt[n]{|a_n|} < L$  dunque vi è un  $N$  per cui  $|a_n| \leq L^{N-n}$  per ogni  $n \geq N$  e si conclude per confronto con la serie geometrica.
- Per le due serie  $1/n$  e  $1/n^2$  si ha  $\alpha = 1$ .
- Se  $\alpha > 1$  si ha frequentemente  $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$  dunque  $|a_n| > 1$ , in contrasto con il criterio necessario.

□

**Teorema 6.23** (Criterio del rapporto, o di D’Alambert). *Assumiamo che  $a_n \neq 0$ . Sia  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  allora* [21C]

- Se  $\alpha < 1$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge assolutamente;
- se  $\alpha \geq 1$  non si può concludere nulla.

*Dimostrazione.* • Se  $\alpha < 1$ , preso  $L \in (\alpha, 1)$  si ha definitivamente  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L$  dunque vi è un  $N$  per cui  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L$  per ogni  $n \geq N$ , per induzione si mostra che  $|a_n| \leq L^{n-N}|a_N|$  e si conclude per confronto con la serie geometrica.

- Vediamo alcuni esempi. Per le due serie  $1/n$  e  $1/n^2$  si ha  $\alpha = 1$ .

Definendo

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ pari} \\ 2^{2-n} & n \text{ dispari} \end{cases} \quad (6.24)$$

si ottiene una serie convergente ma per cui  $\alpha = 2$ . □

**Nota 6.25.** *Se è possibile applicare il criterio del rapporto 6.23, abbiamo visto nella dimostrazione che, per un  $L < 1$ , vi è un  $N$  per cui  $|a_n| \leq L^{n-N}a_N$  per ogni  $n \geq N$ , e dunque  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq L < 1$ , cioè si applica il criterio della radice 6.26.* [0F1]

**Teorema 6.26** (Criterio di condensazione di Cauchy). *Se  $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$  ha termini positivi ed è monotona (debolmente) decrescente, la serie converge se e solo se converge la serie* [21D]

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad .$$

*Dimostrazione.* Dato che la successione  $(a_n)_n$  è decrescente, allora per  $h \in \mathbb{N}$

$$2^h a_{2^{(h+1)}} \leq \sum_{k=2^{h+1}}^{2^{(h+1)}} a_k \leq 2^h a_{2^h} \quad . \quad (6.27)$$

Notiamo ora che

$$\sum_{h=0}^N \sum_{k=2^{h+1}}^{2^{(h+1)}} a_k = \sum_{n=2}^{2^{N+1}} a_n$$

e dunque

$$\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=2^{h+1}}^{2^{(h+1)}} a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^N \sum_{k=2^{h+1}}^{2^{(h+1)}} a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^{2^{(N+1)}} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \quad .$$

dunque possiamo sommare i termini in (6.27) per ottenere

$$\sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^{(h+1)}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^h}$$

laddove il termini a destra è finito se e solo se quello a sinistra è finito, in quanto

$$\sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^h} = a_1 + 2 \sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^{(h+1)}} \quad :$$

si conclude la dimostrazione con il teorema di confronto. □

Il criterio di Dirichlet per le serie generalizza il criterio *dei segni alterni* di Leibniz.

**Teorema 6.28** (criterio di Dirichlet). *Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  due successioni. Se  $b_n$  tende monotonamente a 0 e se la serie delle somme parziali di  $a_n$  è limitata, cioè se* [21F]

$$b_n \geq b_{n+1} > 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad , \quad \exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=1}^N a_n \right| < M \quad ,$$

allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$$

è convergente.

La dimostrazione è lasciata come esercizio (sugg. si usi 6.19)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '21G']

In particolare, ponendo  $a_n = (-1)^n$  si dimostra l'esistenza del limite nel criterio di Leibniz.

**Teorema 6.29** (criterio di Leibniz). *Sia  $b_n$  una successione per cui* [238]

$$b_n \geq b_{n+1} > 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad ,$$

allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$$

è convergente; inoltre, chiamato  $\ell$  il valore della serie, poste

$$B_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n b_n$$

le somme parziali, si ha che la successione  $B_{2N}$  è decrescente, la successione  $B_{2N+1}$  è crescente, e entrambe convergono a  $\ell$ .

**Teorema 6.30** (Criterio di Raabe). *Consideriamo la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  dove i termini sono positivi:  $a_n > 0$ . Definiamo* [ODR]

(Svolto il 2022-12-13)

$$z_n = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

per comodità.

- Se  $z_n \leq 1$  definitivamente in  $n$ , allora la serie non converge.
- Se esiste  $L > 1$  tale che  $z_n \geq L$  definitivamente in  $n$ , cioè equivalentemente se

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} z_n > 1 \quad ,$$

allora la serie converge.



Inoltre, fissato  $h \in \mathbb{Z}$ , si può definire

$$z_n = (n + h) \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

oppure

$$z_n = n \left( \frac{a_{n+h}}{a_{n+h+1}} - 1 \right)$$

come ad esempio

$$z_n = n \left( \frac{a_{n-1}}{a_n} - 1 \right)$$

e il criterio vale allo stesso modo. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ODS']

### §6.c.b Esercizi

#### Esercizi

E6.31 Sia  $\alpha > 0$ ; usate il criterio di Raabe 6.30 per studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

[214]  
(Svolto il  
2022-12-13)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '215']

E6.32 Sia  $\alpha > 0$ ; usate il criterio di condensazione 6.26 per studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

[23D]  
(Svolto il  
2022-12-13)

E6.33 Data una serie  $\sum_n a_n$  dire se le condizioni successive sono necessarie e/o sufficienti per la convergenza.

[ODW]

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m \forall k \in \mathbb{N} \left| \sum_{j=n}^{n+k} a_k \right| < \varepsilon \quad (6.34)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m \left| \sum_{j=n}^{n+k} a_k \right| < \varepsilon \quad (6.35)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m \forall k \in \mathbb{N} \sum_{j=n}^{n+k} |a_k| < \varepsilon \quad (6.36)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m \sum_{j=n}^{n+k} |a_k| < \varepsilon \quad (6.37)$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ODX']

E6.38 Trovate due successioni  $(a_n)_n, (b_n)_n$  con  $a_n, b_n > 0$  tali che  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  è convergente,  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$  è non convergente, e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ODZ']

[ODY]  
(Proposto il  
2022-12-13)

E6.39 *Note:Esame del 9 aprile 2011.* Sia  $(a_n)$  una successione di numeri reali (non necessariamente positivi) tali che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converga ad  $a \in \mathbb{R}$ ; sia  $b_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ ; si mostri che se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge allora  $a = 0$ . [OF0]

E6.40 Trovare due esempi di  $a_{i,j} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  [OF2]  
 • tale che, per ogni  $i$ ,  $\sum_j a_{i,j} = 0$ , mentre per ogni  $j$ ,  $\sum_i a_{i,j} = \infty$ ; (Proposto il 2022-12)  
 • tale che, per ogni  $i$ ,  $\sum_j a_{i,j} = 0$ , mentre per ogni  $j$ ,  $\sum_i a_{i,j} = 1$ .

Riuscite a trovare esempi dove sia abbia inoltre che  $|a_{i,j}| \leq 1$  per ogni  $i, j$ ?

E6.41 *Note:Comptino del 4 Apr 2009, ese 1.* Data una successione  $(a_n)_n$  di numeri strettamente positivi, si dice che il prodotto infinito  $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$  converge se esiste finito e strettamente positivo il limite dei prodotti parziali, cioè [OF4]  
(Proposto il 2022-12-13)

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^N a_n \in (0, +\infty) \quad .$$

Si dimostri che

1. se  $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$  converge allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ ;
2. se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - 1|$  converge, allora converge anche  $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ ;
3. trovate un esempio in cui la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - 1)$  converge ma  $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ .

E6.42 Indichiamo con  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  l'insieme dei sottoinsiemi  $B \subseteq \mathbb{N}$  che sono insiemi finiti. [OF5]  
 Questo è detto l'insieme delle parti finite.

Abbreviamo  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  nel seguito.

Data una successione  $(a_n)_n$  di numeri reali e un  $B \in \mathcal{P}$  indichiamo con  $s(B) = \sum_{n \in B} a_n$  la somma finita con indici in  $B$ .

Supponiamo che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converga ma non converga assolutamente. Allora:

- $\{s(F) : F \in \mathcal{P}\}$  è denso in  $\mathbb{R}$ .
- Esiste un riordinamento  $\sigma$  di  $\mathbb{N}$ , cioè una funzione bigettiva  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , tale che l'insieme delle somme parziali  $\sum_{n=0}^N a_{\sigma(n)}$  (al variare di  $N$ ) è denso in  $\mathbb{R}$ .

E6.43 *Note:Questo risultato è attribuito a Riemann, si veda 3.54 in [23].* [OF7]

Sia data una successione  $(a_n)_n$  di numeri reali tale che  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge (a un valore finito) ma  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$ ; per ogni  $l, L$  con  $-\infty \leq l \leq L \leq +\infty$  esiste una permutazione  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che, posto  $S_N = \sum_{k=0}^N a_{\pi(k)}$ , si ha che

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} S_N = L \quad , \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} S_N = l \quad .$$

E6.44 Sia data una successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali positivi tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ : dimostrare che per ogni  $l \in \mathbb{R}$  esiste una successione  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$  per ogni  $n$ , tale che [OF8]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n a_n) = l \quad .$$

Se invece  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S < \infty$ , cosa si può dire dell'insieme  $E$  delle somme  $\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n a_n) = l$ , al variare di  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$  per ogni  $n$ ?

- Analizzate i casi in cui  $a_n = 2^{-n}$  oppure  $a_n = 3^{-n}$
- Mostrate che  $E$  è sempre chiuso.
- Sotto quali ipotesi si ha che  $E = [-S, S]$ ?

Suggerimento. Sia  $\tilde{E}$  l'insieme delle somme  $\sum_n (\varepsilon_n a_n) = l$ , al variare di  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$  per ogni  $n$ ; notate che  $\tilde{E} = \{(S+x)/2 : x \in E\}$ .

E6.45 *Note: Compitino del 12 gen 2019.* Mostrate che la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdots (3n)} \right)^2$$

[0F9]  
(Svolto il  
2022-12-13)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0FB']

E6.46 Dire per quali  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$  si ha che

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta (\log(\log n))^\gamma}$$

[21M]  
(Proposto il  
2022-12)

converge.

E6.47 *Note: compitino 29 Gennaio 2021.* Sia  $\alpha > 0$ . Dite (giustificando) per quali  $\alpha$  le seguenti serie convergono o divergono

[23F]  
(Proposto il  
2022-12-13)

•

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[4]{n^8 + n^\alpha} - n^2 \right)$$

•

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha + 1} \right)$$

•

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^{\alpha \log_2(n)}}$$

dove i logaritmi sono in base 2.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '23G']

E6.48 *Note: Compitino del 26 gen 2016.* Sia

[20Z]

$$z_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)} ;$$

Mostrate che  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \infty .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '213']

E6.49 *Note: esercizio 2, compito 15 Gennaio 2014.* Sia  $(a_n)_{n \geq 0}$  una successione di numeri reali positivi. Posto  $s_n = \sum_{i=0}^n a_i$  si mostri che:

[21O]

- la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge se e solo se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/s_n$  converge;
- la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/(s_n)^2$  converge.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '21K']

Si veda anche l'esercizio 23.1.

**§6.c.c Prodotto di Cauchy**

**Definizione 6.50.** Date due successioni  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$  a valori reali o complessi, il loro **prodotto di Cauchy** è la successione  $(c_n)_n$  data da [OFH]

$$c_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} .$$

**Esercizi**

E6.51 Se  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \geq 0$  si mostri che [OFJ]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

con la convenzione che  $0 \cdot \infty = 0$ .

E6.52 Se le serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  convergono assolutamente, si mostri che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  converge assolutamente e [OFK]  
(Proposto il 2022-12-13)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

E6.53 **Prerequisiti:** 6.18. **Note:** Noto come: Teorema di Mertens.. [OFM]

Se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge assolutamente e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge, si mostri che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OFN']

E6.54 Si discuta il prodotto di Cauchy della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$  con se stessa. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OFQ'] [OFP]

Si veda anche l’esercizio 18.7.

**§6.d Successioni generalizzate, o “reti”** [29X]

**Definizione 6.55.** Sia nel seguito  $(J, \leq)$  un insieme ordinato con la proprietà filtrante [21J]

$$\forall x, y \in J \exists z \in J, x < z \wedge y < z \tag{6.56}$$

(Si veda la sezione §2.d.a).

Una funzione  $f : J \rightarrow X$  viene chiamata **rete**.

Questa  $f$  è una generalizzazione del concetto di successione; infatti l’insieme  $J = \mathbb{N}$  con il suo usuale ordinamento ha la proprietà filtrante

In questa sezione ci concentriamo sul caso  $X = \mathbb{R}$ .

**Nota 6.57.** Notate che questa definizione si discosta da quella generalmente usata, si veda in [35] o in [15]; ma è equivalente a tutti gli effetti pratici, per quanto spiegato in 2.129, 6.66, 7.15. [2B3]

**Definizione 6.58.** *Prerequisiti:* 2.121, 2.125, Sez. §2. d. a. [0FR]

Dato  $J$  insieme ordinato (parzialmente) e filtrante, e data  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ , vogliamo definire il concetto di limite di  $f(j)$  “per  $j \rightarrow \infty$ ”. <sup>†53</sup>.

- Diremo che

$$\lim_{j \in J} f(j) = l \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in J \forall j \in J, j \geq k \Rightarrow |l - f(j)| < \varepsilon .$$

Similmente si definiscono i casi  $l = \pm\infty$  (imitando le definizioni usate quando  $J = \mathbb{N}$ .) (Questa è la definizione negli appunti del corso, cap. 4 sez. 2 in [3])

- Equivalentemente possiamo dire che

$$\lim_{j \in J} f(j) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

se per ogni intorno  $U$  di  $l$  si ha che  $f(j) \in U$  definitivamente per  $j \in J$ ; dove definitivamente è stato definito in 2.125.

- Ricordiamo da 2.118 che “un intorno di  $\infty$  in  $J$ ” è un sottoinsieme  $U \subseteq J$  tale che  $\exists k \in J \forall j \in J, j \geq k \Rightarrow j \in U$ . Allora possiamo imitare la definizione 5.34.

Data  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  si ha  $\lim_{j \in J} f(j) = l$  quando per ogni intorno  $V$  “pieno” di  $l$  in  $\mathbb{R}$ , esiste intorno  $U$  di  $\infty$  in  $J$  tale che  $f(U) \subseteq V$ .

In particolare questa ultima definizione si può usare per definire i limiti di  $f : J \rightarrow E$  dove  $E$  è uno spazio topologico.

**Definizione 6.59.** Presa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale,  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  è una sottosuccessione quando  $n_k$  è una successione strettamente crescente di numeri naturali. [230]

Similmente presa  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $H \subseteq J$  un sottoinsieme cofinale (come definito in 2.115): sappiamo da 2.122 che  $H$  è filtrante. Allora la restrizione  $h = f|_H$  è una rete  $h : H \rightarrow \mathbb{R}$ , ed è detta “una sottorete di  $f$ ”.

Più in generale, supponiamo che  $(H, \leq_H)$  sia cofinale in  $(J, \leq)$  per mezzo di una mappa  $i : H \rightarrow J$ ; ricordiamo che questo significa (adattando (2.117)) che

$$(\forall h_1, h_2 \in H, h_1 \leq_H h_2 \Rightarrow i(h_1) \leq i(h_2)) \wedge (\forall j \in J \exists h \in H, i(h) \geq j) ; \quad (6.60)$$

allora  $h = f \circ i$  è una sottorete.

### Esercizi

E6.61 Dimostrate che le asserzioni in 6.58 sono equivalenti. [22Z]

E6.62 *Prerequisiti:* 6.58, 6.55, 2.123. Mostrate che se esiste il limite  $\lim_{j \in J} f(j)$  allora è unico. [0FS]

E6.63 Supponiamo che  $f$  sia monotona, mostrate che  $\lim_{j \in J} f(j)$  esiste (possibilmente infinito) e coincide con  $\sup_J f$  (se è crescente) o con  $\inf_J f$  (se è decrescente). [OFV]

Deducete che

$$\begin{aligned} \limsup_{j \in J} f(j) &\stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{j \in J} \sup_{k \geq j} f(k) \\ \liminf_{j \in J} f(j) &\stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{j \in J} \inf_{k \geq j} f(k) \end{aligned}$$

sono sempre ben definiti.

E6.64 Mostrate che esiste il limite  $\lim_{j \in J} f(j) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$  se e solo se [OFV]

$$\limsup_{j \in J} f(j) = \liminf_{j \in J} f(j) = \ell .$$

E6.65 Prerequisiti: 2.110, 2.122, 6.58, 6.55, 2.124. Supponiamo che  $H \subseteq J$  sia cofinale e sia  $h = f|_H$  la sottorete (come definito in 6.59); [22Y]

Supponiamo che  $\lim_{j \in J} f(j) = l \in \overline{\mathbb{R}}$  si mostri che  $\lim_{j \in H} h(j) = l$ .

Similmente se  $(H, \leq_H)$  è cofinale in  $(J, \leq)$  per mezzo di una mappa  $i : H \rightarrow J$ , e, e  $h = f \circ i$ .

**Nota 6.66.** Supponiamo che l'insieme  $J$  sia diretto ma non filtrante; allora per 2.121 esso ammette un elemento massimo che chiamiamo  $\infty$ ; le precedenti definizioni e proprietà si possono dare anche in questo caso, ma sono banali, in quanto si dimostra che [237]

$$\lim_{j \in J} f(j) = \liminf_{j \in J} f(j) = \limsup_{j \in J} f(j) = f(\infty) .$$

## §6.e Serie generalizzate

### §6.e.a Serie generalizzate a termini positivi

**Definizione 6.67.** Sia  $I$  una famiglia infinita di indici e sia  $a_i : I \rightarrow [0, \infty]$  una successione generalizzata, definiamo la somma  $\sum_{i \in I} a_i$  come [OFV]

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in K} a_i : K \in \mathcal{P}(I) \right\}$$

dove  $\mathcal{P}(I)$  l'insieme dei sottoinsiemi finiti  $K \subseteq I$ .

### Esercizi

E6.68 Prerequisiti: 2.326. Note: Dal compito del 27 marzo 2010. Si dica per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  la sommatoria [OFX]

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{(n+m+1)^\alpha} .$$

<sup>†53</sup>Notate che  $\infty$  è un simbolo ma non è un elemento di  $J$ : se lo fosse dovrebbe essere il massimo, ma un insieme filtrante non può avere massimo, cf 2.121

converge. Si discuta poi, per  $N \geq 3$ , la convergenza di

$$\sum_{(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^N} \frac{1}{(1 + m_1 + \dots + m_N)^\alpha} \quad .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OFY']

E6.69 Sia  $I$  una famiglia di indici, sia  $a_i$  una successione con  $a_i \geq 0$ ; sia poi  $\mathcal{F}$  una partizione di  $I$  (non necessariamente di cardinalità finita); mostrare allora che [0FZ]

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \sum_{i \in F} a_i = \sum_{i \in I} a_i \quad .$$

E6.70 Difficoltà:\* Siano  $I$  famiglia di indici; sia  $a_{i,j} : I \times \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$  una successione generalizzata, tale che  $j \mapsto a_{i,j}$  è debolmente crescente per ogni fissato  $i$ ; si dimostri allora che [0G0]

$$\sum_{i \in I} \lim_{j \rightarrow \infty} a_{i,j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} a_{i,j} \quad .$$

(Questa è una versione per le serie del noto *Teorema di convergenza monotona*).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0G2']

E6.71 Estendete il precedente 6.70, sostituendo  $\mathbb{N}$  con un insieme di indici  $J$  filtrante secondo un ordinamento  $\leq$ . [0G3]

---

## §7 Topologia

[0G5]

Sia  $X$  un insieme fissato e non vuoto. Useremo questa notazione. Per ogni insieme  $A \subseteq X$  definiamo che  $A^c = X \setminus A$  è il **complementare di A**.

**Definizione 7.1.** *Uno spazio topologico è una coppia  $(X, \tau)$  dove  $X$  è un insieme (non vuoto) con associata la famiglia  $\tau$  degli aperti, che è detta **topologia**.* [2D9]

**Definizione 7.2.** *La topologia  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  è una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  che vengono chiamati **aperti**. Questa famiglia gode di tre proprietà:  $\emptyset, X$  sono aperti; l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto; l'unione di un numero arbitrario di aperti è un aperto.* [0G6]

Un insieme  $A$  è **chiuso** se  $A^c$  è aperto.

**Definizione 7.3.** *Siano dati  $A, B \subseteq X$ .* [0G7]

1. La **parte interna** di  $A$ , denotata da  $A^\circ$ , è l'unione di tutti gli aperti contenuti in  $A$ , e dunque è il più grande aperto contenuto in  $A$ ;
2. la **chiusura** di  $B$ , denotata da  $\overline{B}$ , è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono  $B$ , cioè è il più piccolo chiuso che contiene  $B$ .
3.  $A$  si dice **denso in B** se  $\overline{A} \supseteq B$ .<sup>†54</sup>
4. La **frontiera**  $\partial A$  di  $A$  è  $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ .

**Definizione 7.4.** *Si dice che uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è  $T_2$ , o “di Hausdorff”, se  $\forall x, y \in X$  esistono  $U, V \in \tau$  aperti disgiunti con  $x \in U, y \in V$ .* [0G8]

**Definizione 7.5.** *Ogni insieme  $X$  può essere associato a diverse topologie. Di seguito due semplici esempi:* [2F6]

- La **topologia discreta** è quella in cui tutti gli insiemi sono aperti, e dunque chiusi. Equivalentemente, la topologia discreta è quella in cui ogni singolo è un aperto.
- La **topologia indiscreta** è quella in cui  $X, \emptyset$  sono gli unici insiemi aperti (e chiusi).

Ulteriori informazioni si possono trovare in Cap. 2 of [23] o in [15].

**Nota 7.6.** *Uno spazio metrico è un caso particolare di spazio topologico, in quanto gli aperti dello spazio metrico soddisfano i requisiti della definizione 7.2; la topologia associata è sempre Hausdorff. I seguenti risultati dunque valgono anche per gli spazi metrici.* [2DH]

### Esercizi

E7.7 Mostrate che se lo spazio è  $T_2$  allora ogni singolo  $\{x\}$  è chiuso. [0G9]

E7.8 Mostrate che se  $A \subseteq B$  allora  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$  e  $A^\circ \subseteq B^\circ$  [0GB]

E7.9 Mostrate che se  $A = B^c$  allora  $(\overline{B})^c = A^\circ$ , usando le definizioni 7.2 e 7.3. [0GC]

E7.10 Notate che  $A \supseteq A^\circ$  e  $B \subseteq \overline{B}$ , in genere. Mostrate che  $A$  è aperto se e solo se  $A = A^\circ$ ; e che  $B$  è chiuso se e solo se  $B = \overline{B}$ , usando le definizioni 7.2 e 7.3. [0GD]



E7.11 Argomenti: parte interna. Dato  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ , mostrate che [OGF]

$$A^\circ = (A^\circ)^\circ .$$

usando la definizione di  $A^\circ$  data sopra.

(Per il caso di  $X$  spazio metrico, si veda anche il 9.34)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OGG']

E7.12 Argomenti: chiusura. Dato  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ , mostrate che [OGH]

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

sia per passaggio al complementare rispetto al 7.11, sia usando la definizione di  $\overline{A}$  come “intersezione di tutti i chiusi che contengono  $A$ ”.

(Per il caso di  $X$  spazio metrico, si veda anche il 9.37)

E7.13 Argomenti: chiusura, parte interna. Sia dato  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$  aperto. [OGJ]

1. Mostrate che  $A \subseteq (\overline{A})^\circ$  (la parte interna della chiusura di  $A$ ).
2. Trovate un esempio di insieme  $A \subset \mathbb{R}$  aperto per cui  $A \neq (\overline{A})^\circ$ .
3. Formulate poi una simile relazione per  $A$  chiuso, passando ai complementari.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OGK']

E7.14 Dati gli insiemi  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , si determinino le relazioni tra le seguenti coppie di insiemi [OGM]

$$\begin{array}{lll} \overline{A \cup B} & \text{e} & \overline{A} \cup \overline{B}, \\ \overline{A \cap B} & \text{e} & \overline{A} \cap \overline{B}, \\ (A \cup B)^\circ & \text{e} & A^\circ \cup B^\circ, \\ (A \cap B)^\circ & \text{e} & A^\circ \cap B^\circ. \end{array}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OGP']

E7.15 Prerequisiti: 2.112, 2.110, 2.121. Difficoltà: \*. (Replaces 29W) Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico. Consideriamo l'ordinamento discendente fra insiemi <sup>†55</sup>, con questo ordinamento  $\tau$  è un insieme diretto; notiamo che ha minimo, dato da  $\emptyset$ . [OGQ]

Supponiamo ora che la topologia sia Hausdorff. Preso poi  $x \in A$ , sia  $\mathcal{U} = \{A \in \tau : x \in A\}$  la famiglia degli aperti che contengono  $x$ : mostrate che  $\mathcal{U}$  è un insieme diretto; mostrate che ha minimo se e solo se il singoletto  $\{x\}$  è aperto (e in questo caso il minimo è  $\{x\}$ ). <sup>†56</sup>

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OGR']

Per l'esercizio 2.121, quando  $\{x\}$  non è aperto allora  $\mathcal{U}$  è un insieme filtrante, e dunque può essere usato come famiglia di indici per definire un “limite” non banale (si veda la nota 6.66). Vedremo applicazioni in sezione §7.g.

E7.16 Note:Compito del 25 Marzo 2017. Siano  $(X, \tau)$ ,  $(Y, \theta)$  due spazi topologici con intersezione non vuota e si supponga che le topologie ristrette a  $C = X \cap Y$  coincidano (cioè  $\tau|_C = \theta|_C$ )<sup>†57</sup> e che  $C$  sia aperto in entrambi le topologie (cioè  $C \in \tau$ ,  $C \in \theta$ ). Si dimostri che esiste una sola topologia  $\sigma$  su  $Z = X \cup Y$  tale che  $\sigma|_X = \tau$  e  $\sigma|_Y = \theta$  e che  $X, Y \in \sigma$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OGT'] [UNACCESSIBLE UUID 'OGV'] [0GS]

## §7.a Intorni, punti aderenti, punti isolati, punti di accumulazione [29V]

**Definizione 7.17** (Intorni).<sup>†58</sup> Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $x_0 \in X$ . [0GW]

- Si chiama **intorno** di  $x_0$  un qualunque soprainsieme di un aperto contenente  $x_0$ .
- Si chiama **sistema fondamentale di intorni** di  $x_0$  una famiglia  $\{U_i\}_{i \in I}$  di intorni di  $x_0$  con la proprietà che ogni intorno di  $x_0$  contenga almeno uno degli  $U_i$ .

Diremo che  $U$  è un **intorno aperto** di  $x_0$  semplicemente per dire che  $U$  è un aperto che contiene  $x_0$ .

**Definizione 7.18.** Siano  $E, F \subseteq X$ : [0GX]

- un punto  $x_0 \in X$  si dice **aderente a**  $E$  se ogni intorno  $U$  di  $x_0$  ha intersezione non vuota con  $E$ ;
- un punto  $x_0 \in E$  si dice **isolato in**  $E$  se esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che  $E \cap U = \{x_0\}$ ;

(Notate che, in certi casi, gli insiemi possono avere al più un numero numerabile di punti isolati: si veda 9.95 e 7.98, e anche 9.96).

Definiamo inoltre questo concetto (già visto in 5.13 per il caso  $X = \mathbb{R}$ ).

**Definizione 7.19** (punto di accumulazione). Dato  $A \subseteq X$ , un punto  $x \in X$  si dice **punto di accumulazione** per  $A$  se per ogni intorno  $U$  di  $x$  si ha che  $U \cap A \setminus \{x\}$  è non vuoto.<sup>†59</sup> [0GY]

L'insieme di tutti i punti di accumulazione di  $A$  si chiama **derivato** e verrà indicato con  $D(A)$ .

Nella letteratura Inglese *punto di accumulazione* si traduce anche come “*limit point*” [2BN] (il che può creare confusione con la definizione 9.57); per questo non useremo questa dicitura.<sup>†60</sup>

### Esercizi

E7.20 Verificate che nelle definizioni 7.18 e 7.19 potete equivalentemente usare, al posto degli intorni  $U$  di  $x_0$ , gli intorni aperti  $U$  di  $x_0$ . [0GZ]

E7.21 Verificate che nelle definizioni 7.18 e 7.19 potete equivalentemente usare intorni  $U$  di  $x_0$  scelti in un sistema fondamentali di intorni fissato. [0HO]

<sup>†54</sup>Spesso quando si dice “ $A$  è denso in  $B$ ” si ha che  $B$  è chiuso e  $A \subseteq B$ : in questo caso “denso” è  $\bar{A} = B$ .

<sup>†55</sup>Per riportarci formalmente alla definizione vista in 2.112 definiamo  $A \preceq B \iff A \supseteq B$  e associamo l'ordinamento  $\preceq$  a  $\tau$ .

<sup>†56</sup>Notate che, il singoletto  $\{x\}$  è aperto se e solo se  $x$  è un punto isolato.

<sup>†57</sup>Ricordiamo che  $\tau|_C = \{B \cap C : B \in \tau\}$ .

<sup>†58</sup>Definizione 5.6.4 negli appunti [3]

<sup>†59</sup>Potremmo chiamare  $U \setminus \{x\}$  un “intorno bucato”; dunque stiamo chiedendo che l'intorno bucato  $U \setminus \{x\}$  abbia intersezione non vuota con  $A$ ; come già avevamo fatto in 5.13.

<sup>†60</sup>Si veda a questo proposito [43].

E7.22 Verificate che l'insieme dei punti aderenti ad  $A$  coincide con la chiusura di  $A$ . [OH1]  
*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OH2']

E7.23 Prerequisiti:7.22. Verificate che  $\overline{A} = A \cup D(A)$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OH4'] [OH3]

E7.24 Un punto  $x \in X$  è punto di accumulazione per  $X$  <sup>†61</sup> se e solo se il singoletto  $\{x\}$  non è aperto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OH6'] [OH5]

E7.25 Argomenti:frontiera. Sia  $A \subset X$ . Ricordiamo la definizione di *frontiera*  $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ . Si noti che  $\partial A$  è chiuso: infatti posto  $B = A^c$  il complementare, si verifica facilmente che  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{B}$ . In particolare abbiamo mostrato che  $\partial A = \partial B$ . [OH7]

Mostrate che i tre insiemi  $\partial A, A^\circ, B^\circ$  sono disgiunti, e che la loro unione è  $X$ ; in particolare mostrate che i tre insiemi sono caratterizzati da queste tre proprietà:

- ogni intorno di  $x$  interseca sia  $A$  che  $B$ ;
- esiste intorno di  $x$  contenuto in  $A$ ;
- esiste intorno di  $x$  contenuto in  $B$ .

(Si veda anche 9.44 per il caso di spazi metrici). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OH8']

E7.26 Argomenti:frontiera. Difficoltà:\*. [OH9]

Dato  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ ; se  $A$  è aperto (o chiuso) la frontiera  $\partial A$  non ha parte interna; si ha  $\partial A \supseteq \partial \partial A$  con uguaglianza se  $\partial A$  non ha parte interna; inoltre  $\partial \partial A = \partial \partial \partial A$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OHB'] [UNACCESSIBLE UUID 'OHC']

E7.27 Prerequisiti:7.23. Se  $(X, \tau)$  è uno spazio topologico e  $A \subset X$  non ha punti isolati, allora anche  $\overline{A}$  non ha punti isolati. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OHF'] [OHD]

E7.28 Note:compitino 12/1/2013. Sia  $A$  un sottoinsieme aperto di  $X$ . Si dimostri che, per ogni sottoinsieme  $B$  di  $X$ , vale l'inclusione  $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ . Si dimostri con un esempio che la conclusione non vale se si rimuove l'ipotesi che  $A$  sia aperto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OHH'] [OHE]

E7.29 Dato  $E \subseteq X$ , distinguiamo i punti  $x \in X$  in tre insiemi distinti che sono una partizione di  $X$ . [OHJ]

- Per ogni intorno  $U$  di  $x$ ,  $U \setminus \{x\}$  interseca  $E$ . Questi sono i *punti di accumulazione* di  $E$ .
- $x \in E$  e esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che  $U \cap E = \{x\}$ . Questi sono i *punti isolati* in  $E$ .
- *Descrivete ora voi il terzo insieme di punti*

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OHK']

## §7.b Esempi [2BD]

### Esercizi

E7.30 Consideriamo su  $\mathbb{R}$  la famiglia  $\tau_+ = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ . Mostrate che è una topologia. È Hausdorff? Calcolate chiusura, parte interna, frontiera e derivato di questi insiemi: [OHM]

$$\{0\}, \quad \{0, 1\}, \quad [0, 1], \quad (0, 1), \\ [0, \infty), \quad (-\infty, 0], \quad (0, \infty), \quad (-\infty, 0).$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OHN']

E7.31 Prerequisiti: 7.85, 7.86. Sia  $X = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , consideriamo la famiglia  $\mathcal{B}$  di parti di  $X$  che contiene [OHP]

- gli intervalli aperti  $(a, b)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a < b$ ,
- le semirette  $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$  con  $a \in \mathbb{R}$ ,
- le semirette  $[-\infty, b) = (-\infty, b) \cup \{-\infty\}$  con  $b \in \mathbb{R}$ .

(Notate l’analogia degli insiemi nel secondo e terzo punto, con gli “intorni di infinito” visti in Sez. §5.a).

Si mostri che  $\mathcal{B}$  verifica le proprietà (a),(b) viste in 7.85. Sia  $\tau$  dunque la topologia generata da questa base. Lo spazio topologico  $(X, \tau)$  è detto **retta estesa**, spesso indicata  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Questo spazio topologico è  $T_2$ , è compatto (Esercizio 7.43), e è omeomorfo all’intervallo  $[0, 1]$ . Può essere dotato di una distanza che genera la topologia sopra descritta.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OHQ']

E7.32 Prerequisiti: 7.85, 7.86. Sia  $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , consideriamo questa famiglia  $\mathcal{B}$  di parti di  $X$ : [OHR]

- gli intervalli aperti  $(a, b)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a < b$ ,
- gli insiemi  $(a, +\infty) \cup (-\infty, b) \cup \{\infty\}$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a < b$ .

Si mostri che  $\mathcal{B}$  verifica le proprietà (a),(b) viste in 7.85. Sia  $\tau$  dunque la topologia generata da questa base. Lo spazio topologico  $(X, \tau)$  è detto **retta compatificata a un punto**. Questo spazio topologico è  $T_2$ , è compatto (Eser. 7.44); è omeomorfo alla circonferenza (Eser. 9.170); dunque può essere dotato di una distanza che genera la topologia sopra descritta.

E7.33 Argomenti: ordinamento diretto. Prerequisiti: 2.112. [OHS]

Sia  $(J, \leq)$  un insieme con ordinamento diretto. Decidiamo che un “aperto” in  $J$  è un insieme  $A$  che contiene una “semiretta” della forma  $\{k \in J : k \geq j\}$  (per un  $j \in J$ )<sup>†62</sup>. Sia dunque  $\tau$  la famiglia di tutti tali aperti, a cui aggiungiamo  $\emptyset, J$ . Mostrate che  $\tau$  è una topologia. Questa topologia è Hausdorff? Quali sono i punti di accumulazione?

E7.34 Argomenti: punto di accumulazione, massimo, ordinamento diretto. Prerequisiti: 2.112, 7.33. [OHT]

Trovate un semplice esempio di insieme  $(J, \leq)$  con ordinamento diretto che ha massimo ma, associandovi la topologia  $\tau_j$  dell’esempio precedente, non ha punti di accumulazione.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OHV']

<sup>†61</sup>Stiamo prendendo  $A = X$  nella definizione 7.19.

<sup>†62</sup>Potremmo chiamare un tale  $A$  un intorno di infinito, come già si fece in Sez. §5.a.

E7.35 Argomenti: ordinamento diretto. Prerequisiti: 2.110, 2.112, 2.121. [0HW]

Sia  $(I, \leq)$  un insieme con ordinamento diretto e con un massimo che chiamiamo  $\infty$ . Chiamiamo  $J = I \setminus \{\infty\}$  e assumiamo che  $J$  sia filtrante (con l'ordinamento indotto) e non vuoto. In questo caso proponiamo una topologia più fine. La topologia  $\tau$  per  $I$  contiene:

- $\emptyset, I$ ;
- gli insiemi  $A$  che contengono una “semiretta”, della forma  $\{k \in I : k \geq j\}$ , per un  $j < \infty$  (che sono detti “intorni di  $\infty$ ”);
- i sottoinsiemi di  $I$  che non contengono  $\infty$ .

Mostrate che  $\tau$  è una topologia. Questa topologia è Hausdorff? Mostrate che  $\infty$  è l'unico punto di accumulazione.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OHX']

La precedente costruzione si può usare in questo modo.

**Nota 7.36.** Sia  $(J, \leq)$  un insieme (non vuoto) con ordinamento filtrante. Sappiamo da 2.121 che  $J$  non ha massimo. Estendiamo  $(J, \leq)$  aggiungendo un punto “ $\infty$ ”: poniamo  $I = J \cup \{\infty\}$  e decidiamo che  $x \leq \infty$  per ogni  $x \in J$ . Si verifica facilmente che  $(I, \leq)$  è un ordinamento diretto, e ovviamente  $\infty$  è il massimo di  $I$ .<sup>†63</sup> Sia  $\tau$  la topologia definita in 7.35. Sappiamo che  $\infty$  è punto di accumulazione. Questa topologia può spiegare in senso topologico il limite già definito in 6.58, e altri esempi che vedremo in Sez. §7.g. [0HY]

### §7.c Topologie generate [2BJ]

#### Esercizi

E7.37 Prerequisiti: 2.59. Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$  una famiglia di parti di  $X$ ; definiamo  $\tau$  come l'intersezione di tutte le topologie che contengono  $\mathcal{V}$  cioè [0J1]

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{ \sigma, \sigma \supseteq \mathcal{V}, \sigma \text{ topologia in } X \}$$

Mostrate che  $\tau$  è una topologia.

$\tau$  è la “topologia generata da  $\mathcal{V}$ ”; è anche detta “la più piccola topologia che contiene  $\mathcal{V}$ ”.

Si vedano anche gli esercizi 7.86.

### §7.d Compattezza [2BF]

**Definizione 7.38.** Un sottoinsieme  $K \subseteq X$  è compatto<sup>†64</sup> se da ogni famiglia di aperti  $(A_i)_{i \in I}$  la cui unione  $\bigcup_{i \in I} A_i$  copre  $K$  si può scegliere un numero finito  $J \subset I$  di aperti la cui unione  $\bigcup_{i \in J} A_i$  copre  $K$ . [0J3]

Se formulate questi esercizi in spazi metrici, potete usare il teorema 9.110 a pagina 138 per trattare con gli insiemi compatti.

**Esercizi**

E7.39 Supponiamo che lo spazio topologico sia compatto. Si mostri che ogni sottoinsieme chiuso è compatto. [0J4]

E7.40 Supponiamo che lo spazio topologico sia  $T_2$  (si veda 7.4). Si mostri che ogni sottoinsieme compatto è chiuso. [0J5]

E7.41 Argomenti: compatti. Prerequisiti: 7.40. Note: Per il caso reale si può vedere 5.30. Per il caso di spazi metrici si veda 9.120.. [0J6]

Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico  $T_2$  e siano  $A_n \subseteq X$  sottoinsiemi compatti non vuoti tali che  $A_{n+1} \subseteq A_n$ : allora  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ .

Cosa succede se lo spazio non è  $T_2$ ? Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0J7']

E7.42 Prerequisiti: 7.40. Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  spazi topologici, con  $X$  compatto e  $Y$  uno spazio  $T_2$ . Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua e iniettiva; si mostri che  $f$  è un omeomorfismo fra  $X$  e la sua immagine  $f(X)$ . [0J8]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0J9']

E7.43 Prerequisiti: 7.31. Si mostri che la *retta estesa* (lo spazio topologico mostrato in 7.31) è compatta. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0JC'] [0JB]

E7.44 Prerequisiti: 7.32. Si mostri che la *retta compattificata* (lo spazio topologico mostrato in 7.32) è compatta. [0JD]

Si veda anche l'esercizio 7.71 per una caratterizzazione degli insiemi compatti tramite le *reti*.

**§7.e Connessione** [2BG]

**Definizione 7.45.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico. Dati  $A, B \subseteq X$ , per abbreviare le formule useremo la notazione (nonstandard) [2BR]

- $AiB$  per dire che  $A, B$  hanno intersezione non vuota,
- $AdB$  per dire che sono disgiunti, e
- $nA$  per dire che  $A$  non è vuoto.

Ricordiamo la definizione di s/connessione (Cap. 5 Sez. 11 degli appunti [3] oppure Cap. 2 in [23]).

- Lo spazio  $X$  è sconnesso se è l'unione disgiunta di due aperti non vuoti.
- Lo spazio  $X$  è connesso se non è sconnesso. Questo può essere scritto in molteplici modi, come ad esempio

$$\forall A, B \in \tau, (nA \wedge nB \wedge X \subseteq A \cup B) \Rightarrow AiB .$$

<sup>†63</sup>Dunque  $(I, \leq)$  non è un ordinamento filtrante.

<sup>†64</sup>Dalla definizione si ricava che l'insieme vuoto è compatto. Alcuni testo però escludono esplicitamente questo caso.

- Un suo sottoinsieme  $E \subseteq X$  nonvuoto è sconnesso se è sconnesso con la topologia indotta; cioè se  $E$  è coperto dall'unione di due aperti, ciascuno dei quali interseca  $E$ , ma che sono disgiunti in  $E$ ; in simboli,

$$\exists A, B \in \tau, E \cap A \wedge E \cap B \wedge E \subseteq A \cup B \wedge A \cap B \cap E = \emptyset. \quad (7.46)$$

- Similmente  $E \subseteq X$  nonvuoto è connesso se è connesso con la topologia indotta. Questo si può scrivere così

$$\forall A, B \in \tau, (E \cap A \wedge E \cap B \wedge E \subseteq A \cup B) \Rightarrow A \cap B \cap E \neq \emptyset. \quad (7.47)$$

o equivalentemente

$$\forall A, B \in \tau, (E \subseteq A \cup B \wedge A \cap B \cap E = \emptyset) \Rightarrow (E \subseteq A \vee E \subseteq B). \quad (7.48)$$

**Nota 7.49.** È consuetudine assumere che l'insieme vuoto sia connesso; questo caso però è di scarso interesse, in genere lo escluderemo nei seguenti esercizi. [2BS]

Vi sono molte maniere equivalenti di esprimere le precedenti definizioni; le lasciamo come (semplici) esercizi. Questo Lemma inoltre potrebbe essere utile.

**Lemma 7.50.** Se  $Y \subseteq X$  è connesso e  $Y \subseteq E \subseteq \bar{Y}$ , allora  $E$  è connesso. [2FY]

Per la dimostrazione sia veda il Teorema 5.11.6 in [3], o Theorem 20 nel Chap. 1 in [15].

### Esercizi

E7.51 Mostrate che le condizioni (7.47),(7.48) in 7.45 sono equivalenti. *Soluzione nascosta:* [2BT]

E7.52 Lo spazio  $X$  è sconnesso se e solo se è l'unione disgiunta di due chiusi non vuoti. [0JF]

E7.53 Un sottoinsieme  $E \subseteq X$  nonvuoto è sconnesso se  $E$  è coperto dall'unione di due chiusi, ciascuno dei quali interseca  $E$ , ma che sono disgiunti dentro  $E$ . [0JG]

E7.54 Prerequisiti:7.45.  $X$  è sconnesso se e solo se esistono  $A, B \subseteq X$  nonvuoti la cui unione copre  $X$ , ma tali che  $\bar{B} \cap A$  e  $B \cap \bar{A}$ . [0JH]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0JJ']

E7.55 Difficoltà:\*. Supponiamo che  $E \subseteq X$  sia sconnesso, possiamo supporre che [0JK]

$$\exists A, B \in \tau, E \cap A \wedge E \cap B \wedge E \subseteq A \cup B \wedge A \cap B. \quad (7.56)$$

cioè che esistano di due aperti disgiunti, ciascuno dei quali interseca  $E$  e che  $E$  sia coperto dalla loro unione?

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0JM'] [UNACCESSIBLE UUID '0JP'] Si veda anche 9.77.

E7.57 Sia  $(X, \tau_X)$  uno spazio topologico, e  $Y \subseteq X$  lo spazio topologico con la topologia indotta [2DK]

$$\tau_Y = \{A \cap Y : A \in \tau_X\}.$$

Fissato  $E \subseteq Y$ , si considerino queste affermazioni.

(cX)  $E$  è connesso nello spazio topologico  $(X, \tau_X)$ ;

(cY)  $E$  è connesso nello spazio topologico  $(Y, \tau_Y)$ .

Le due asserzioni sono equivalenti?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '113']

E7.58 Note:Proposizione 5.11.2 appunti [3].

[2BW]

Un insieme  $E \subseteq X$  è disconnesso se e solo se esiste una funzione continua  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  che assume esattamente due valori, ad esempio  $f(E) = \{0, 1\}$ .

E7.59 Note:Teorema 5.11.7 appunti [3].

[0JQ]

Sia  $I$  una famiglia di indici. Si mostri che se  $E_i$  è una famiglia di sottoinsiemi connessi di  $X$  tali che

$$\forall i, j \in I, E_i \cap E_j \neq \emptyset,$$

allora  $E = \bigcup_{i \in I} E_i$  è connesso.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0JR']

**Definizione 7.60.** Dato  $x \in X$ , diremo che la **componente connessa** di  $X$  contenente  $x$  è l'unione di tutti i connessi che contengono  $x$  (e notiamo che il singoletto  $\{x\}$  è connesso). L'esercizio precedente 7.59 mostra che la componente connessa è, per l'appunto, un connesso.

[0JT]

### Esercizi

E7.61 Note:Sezione 5.11.2 negli appunti [3]. Si mostri che due componenti connesse o sono disgiunte o coincidono. Dunque lo spazio  $X$  si partiziona in componenti connesse.

[0JV]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0JW']

E7.62 Sia  $C \subseteq X$  un insieme chiuso; sia  $K$  una componente connessa di  $C$ : si mostri che  $K$  è chiuso. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0JZ']

[0JY]

E7.63 Si trovi un esempio di uno spazio  $(X, \tau)$  dove vi è una componente connessa che non è aperta. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2G0']

[2FZ]

E7.64 Sia ora  $(X, d)$  uno spazio metrico dove le palle aperte  $B(x, r)$  sono anche chiuse. Si mostri che le componenti connesse di  $X$  sono tutti e solo i singoletti  $\{x\}$ .

[0K0]

(Uno spazio dove gli unici connessi sono singoletti è detto *totalmente disconnesso*).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0K1']

[UNACCESSIBLE UUID '2GX']

Si vedano anche gli esercizi in Sez. §9.e.

### §7.f Reti

[2B6]

Useremo i concetti di *ordinamento diretto*, *ordinamento filtrante* e *insieme cofinale* già discussi in Sez. §2.d.a. Sia nel seguito  $(Y, \sigma)$  uno spazio topologico Hausdorff.

**Definizione 7.65.** Sia  $(Y, \sigma)$  spazio topologico Hausdorff. Sia  $(J, \leq)$  un insieme con ordinamento filtrante (definita in 2.110). Sia  $\varphi : J \rightarrow Y$  una **rete** (già incontrata in Sez. §6.d).

[0K4]

Si pone  $\lim_{j \in J} \varphi(x) = \ell \in Y$  se e solo se, per ogni intorno  $V$  di  $\ell$  in  $Y$  si ha che  $\varphi(j) \in V$  definitivamente per  $j \in J$ .



La definizione di *definitivamente* è in 2.125, e significa che esiste  $k \in J$  tale che per ogni  $j \geq k$  si ha  $\varphi(j) \in V$ .

Anche in questo caso vale quanto discusso nella nota 6.57.

**Definizione 7.66.** Data una rete  $x : J \rightarrow Y$ , un punto  $z \in Y$  si dice **punto limite** per  $x$  se esiste una sottorete  $y : H \rightarrow Y$  tale che  $\lim_{j \in H} y(j) = z$ . [2B4]

(Notate che “sottorete” si intende come nel caso generale visto alla fine di 6.59, dove  $y = x \circ i$  per mezzo di una mappa  $i : H \rightarrow J$  che soddisfa (6.60)).

### Esercizi

E7.67 Prerequisiti: 2.121. Sia  $J$  un insieme diretto ma non filtrante; allora sia  $m \in J$  il suo massimo (che esiste per quanto visto in 2.121); se definiamo  $\lim_{j \in J} \varphi(x)$  come in 7.65, mostrate che il limite esiste sempre e vale  $\varphi(m)$ . [0K5]

E7.68 Sia  $(Y, \sigma)$  spazio topologico Hausdorff, sia  $A \subseteq Y$ . Si mostri che  $\bar{A}$  coincide con l'insieme di tutti i possibili limiti di reti  $\varphi : J \rightarrow A$  (al variare della scelta di  $J$  e poi di  $\varphi$ ). [0K6]

E7.69 Sia  $(Y, \sigma)$  spazio topologico Hausdorff, sia  $A \subseteq Y$ . Si mostri che  $x \in Y$  è punto di accumulazione per  $A$  se e solo se esiste un  $J$  insieme filtrante e esiste una rete  $\varphi : J \rightarrow A \setminus \{x\}$  tale che  $\lim_{j \in J} \varphi(x) = x$ . [0K7]

E7.70 Prerequisiti: 2.115, 6.59. Difficoltà: \*\*. [2B7]

Sia  $(Y, \sigma)$  uno spazio topologico Hausdorff. Sia  $J$  un insieme filtrante e  $x : J \rightarrow Y$  una rete in  $Y$ . Per ogni  $\alpha \in J$  definiamo  $E_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x_\beta : \beta \in J, \beta \geq \alpha\}$  e

$$E = \bigcap_{\alpha \in J} \overline{E_\alpha}$$

Mostrate che  $E$  coincide con l'insieme  $L$  dei punti limite (definito in 7.66).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2FK']

E7.71 Prerequisiti: 2.115, 6.59, 7.70. Difficoltà: \*\*. [0K8]

Sia  $(Y, \sigma)$  uno spazio topologico Hausdorff. Mostrate che  $Y$  è compatto se e solo se ogni rete a valori in  $Y$  ammette una sottorete convergente.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0K9']

### §7.g Continuità e limiti [2B8]

**Definizione 7.72 (Limite).** <sup>†65</sup> Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici, con  $(Y, \sigma)$  Hausdorff. <sup>†66</sup> Sia  $E \subseteq X$  e  $f : E \rightarrow Y$ . Sia inoltre  $x_0$  un punto di accumulazione di  $E$  in  $X$ . Si pone  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in Y$  se e solo se, per ogni intorno  $V$  di  $\ell$  in  $Y$ , esiste  $U$  intorno di  $x_0$  in  $X$  tale che  $f(U \cap E \setminus \{x_0\}) \subseteq V$ . [0KB]

**Definizione 7.73.** Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici, con  $(Y, \sigma)$  Hausdorff; sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione. [2B9]

Si dice che  $f$  è **continua in**  $x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Si dice che  $f$  è **continua** se (equivalentemente)

<sup>†65</sup>Definizione 5.7.2 negli appunti [3].

<sup>†66</sup>Per avere unicità del limite e dunque dare un significato univoco a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  come elemento di  $Y$ .

- $f$  è continua in ogni punto, cioè  $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$  per ogni  $y \in X$ , oppure
- se  $f^{-1}(A) \in \tau$  per ogni  $A \in \sigma$ .

(Teor. 5.7.4 negli appunti [3]).

Una funzione continua bigettiva  $f : X \rightarrow Y$  tale che la funzione inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  sia di nuovo continua, è detta **omeomorfismo**.

### Esercizi

E7.74 Considerate questa affermazione.

[2BB]

«Sia  $f : X \rightarrow Y$  e  $x_0 \in X$ , allora  $f$  è continuo in  $x_0$  quando, per ogni insieme aperto  $B \subseteq Y$  con  $f(x_0) \in B$ , abbiamo che  $f^{-1}(B)$  è aperto.»

(Proposto il 2022-12)

Questa affermazione non è corretta.

Costruite un esempio di una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che è continua in  $x_0 = 0$  ma tale che, per ogni  $J = (a, b)$  intervallo limitato aperto non vuoto,  $f^{-1}(J)$  non è aperto.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2BC']

E7.75 Difficoltà:\*

[225]

Sia  $Y$  uno spazio topologico. Diciamo che  $Y$  soddisfa la proprietà (P) rispetto ad uno spazio topologico  $X$  quando soddisfa la condizione: per ogni  $A \subseteq X$  denso ed per ogni coppia di funzioni continue  $f, g : X \rightarrow Y$  tali che  $f(a) = g(a)$  per ogni  $a \in A$  si ha necessariamente che  $f = g$ .

Dimostrare che  $Y$  è di Hausdorff se e solo se soddisfa la proprietà (P) rispetto ad ogni spazio topologico  $X$ .

E7.76 Prerequisiti: 7.36. Spiegate come la definizione 7.65 si può vedere come un caso particolare della 7.72. (Sugg. procedete come in nota 7.36 e ponete  $E = J, X = I, x_0 = \infty$ ).

[OKC]

E7.77 Prerequisiti: 7.76. Siano  $X, Y$  spazi topologici Hausdorff. Sia  $E \subseteq X$ , sia  $f : E \rightarrow Y$ , sia  $x_0$  un punto di accumulazione di  $E$  in  $X$ .

[OKD]

- Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  allora, per ogni rete  $\varphi : J \rightarrow X$  con  $\lim_{j \in J} \varphi(j) = x_0$  si ha  $\lim_{j \in J} f(\varphi(j)) = \ell$ .

- Consideriamo l'insieme filtrante  $J$  dato dagli intorno di  $x_0$ ; <sup>†67</sup> consideriamo le reti  $\varphi : J \rightarrow X$  con la proprietà che  $\varphi(U) \in U \setminus \{x_0\}$  per ogni  $U \in J$ ; notiamo che si ha  $\lim_{j \in J} \varphi(j) = x_0$ .

Se per ogni tale rete si ha  $\lim_{j \in J} f(\varphi(j)) = \ell$  allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKF']

E7.78 Prerequisiti: 7.67, 7.76. Siano  $X, Y$  spazi topologici Hausdorff. Sia  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in X$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

[OKG]

1.  $f$  è continua in  $x_0$ ;

<sup>†67</sup>Il fatto che questo sia filtrante è stato mostrato in 2.121, 7.15 e 7.24

2. per ogni rete  $\varphi : J \rightarrow X$  tale che

$$\lim_{j \in J} \varphi(j) = x_0$$

si ha

$$\lim_{j \in J} f(\varphi(j)) = f(x_0) \quad .$$

Suggerimento per dimostrare che 2 implica 1. Supponiamo che  $x_0$  sia punto di accumulazione. Consideriamo l'insieme filtrante  $J$  dato dagli intorni di  $x_0$ ; consideriamo le reti  $\varphi : J \rightarrow X$  con la proprietà che  $\varphi(U) \in U$  per ogni  $U \in J$ ; notiamo che si ha  $\lim_{j \in J} \varphi(j) = x_0$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKH']

### §7.h Basi

[2B5]

**Definizione 7.79** (Base). Dato uno spazio topologico  $(X, \tau)$ , una **base** <sup>†68</sup> è una collezione  $\mathcal{B}$  di aperti (cioè  $\mathcal{B} \subseteq \tau$ ) con la proprietà che ogni elemento di  $\tau$  è unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .

[OKK]

Per esempio, se  $X$  è uno spazio metrico, allora la famiglia di tutte le palle aperte è una base.

#### Esercizi

E7.80 Sia  $\mathcal{B}$  una base per una topologia  $\tau$  su  $X$ ; preso un aperto  $A \in \tau$ , per ogni  $x \in A$  possiamo scegliere un  $B_x \in \mathcal{B}$  con  $x \in B_x$ , e tali che  $A = \bigcup_{x \in A} B_x$ .

[OKM]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKN'] [UNACCESSIBLE UUID 'OKP']

E7.81 Prerequisiti: 7.80. Sia  $\mathcal{B}$  una base per una topologia  $\tau$  su  $X$ . Mostrate che, dato  $x \in X$ ,

[OKQ]

$$\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

è un sistema fondamentale di intorni di  $x$ .

E7.82 Prerequisiti: 7.21, 7.81, 7.80. Sia  $\mathcal{B}$  una base per una topologia  $\tau$  su  $X$ . Mostrate che, dato  $A \subseteq X$ , si ha che

[OKS]

$$A^\circ = \bigcup \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq A\}$$

mentre

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall B \in \mathcal{B}, x \in B \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset\}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKT']

E7.83 Prerequisiti: 7.80. Dato  $X$ , date  $\mathcal{C}$  base per una topologia  $\sigma$  su  $X$ , e  $\mathcal{B}$  base per una topologia  $\beta$  su  $X$ , si ha che  $\sigma \supseteq \beta$  se e solo se per ogni  $x \in X$  e per ogni  $B \in \mathcal{B}$ ,  $B \ni x$  esiste  $C \in \mathcal{C}$ ,  $C \ni x$ ,  $C \subseteq B$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OM8']

[OM7]

E7.84 Prerequisiti:7.37. Sia  $X = \{1, 2, 3\}$  e sia  $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ ; sia  $\tau$  la più piccola topologia che contiene  $\mathcal{B}$ , mostrate che  $\mathcal{B}$  non è una base per  $\tau$ . [OKV]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OKV']

È dunque interessante cercare di capire quando una famiglia  $\mathcal{B}$  può essere base per una topologia.

E7.85 Sia  $\mathcal{B}$  una base per una topologia  $\tau$  su  $X$ ; allora valgono le due proprietà seguenti. [OKX]

(a)  $\bigcup \mathcal{B} = X$  cioè l'unione di tutti gli elementi della base è  $X$ .

(b) Dati  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  per ogni  $x \in B_1 \cap B_2$  esiste  $B_3 \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OKX']

E7.86 Prerequisiti:7.37,ZF:4. Viceversa sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{B}$  una famiglia di sottoinsiemi che verifica le precedenti proprietà (a),(b) viste in 7.85. Sia  $\sigma$  la famiglia degli insiemi che si ottengono come unione di elementi di  $\mathcal{B}$ , in simboli <sup>†69</sup> [OKZ]

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i : I \text{ famiglia di indici e } A_i \in \mathcal{B} \forall i \in I \right\};$$

si intende che anche  $\emptyset \in \sigma$ . Si mostri che  $\sigma$  è una topologia.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OM0']

E7.87 Prerequisiti:topologia generata 7.37, 7.85, 7.86. Riprendiamo 7.86. Sia di nuovo  $X$  un insieme e  $\mathcal{B}$  una famiglia di sottoinsiemi che verifica le precedenti proprietà (a),(b) viste in 7.85; sia  $\tau$  la più piccola topologia che contiene  $\mathcal{B}$ . Si verifichi  $\mathcal{B}$  è una base per  $\tau$ . [OM1]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OM2']

Possiamo dunque dire che una famiglia che soddisfa (a),(b) è una base per la topologia che essa genera. Questo risponde all'interrogativo posto in 7.84.

E7.88 Prerequisiti:7.37,7.85,7.86. Siano ora  $X_1, \dots, X_n$  spazi topologici con topologie rispettivamente  $\tau_1, \dots, \tau_n$ ; sia  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  il prodotto cartesiano. Applichiamo i precedenti risultati per definire la **topologia prodotto**  $\tau$ : questa si può vedere in due maniere equivalenti. [OM3]

- Unione di tutti i prodotti cartesiani di aperti <sup>†70</sup>

$$\tau = \left\{ \bigcup_{j \in J} \prod_{i=1}^n A_{i,j} : A_{i,j} \in \tau_i, \dots, A_{n,j} \in \tau_n \forall j \in J, J \text{ famiglie arbitrarie di indici} \right\}.$$

- $\tau$  è la più piccola topologia che contiene i prodotti cartesiani di aperti.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OM4']

E7.89 Prerequisiti:7.88,7.85,7.86. Siano ora  $X_1, \dots, X_n$  spazi topologici con topologie ri- [OM5]

<sup>†68</sup>Si veda [15] pag. 46, o capitolo 5 sezione 6 definizione 5.6.4 negli appunti [3], o [44] per una introduzione.

<sup>†69</sup> Come già discusso in ZF:4, si potrebbe anche usare la notazione più compatta  $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigcup \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \right\}$ .

<sup>†70</sup>Così definita all'inizio della sezione 6 del capitolo 5 degli appunti [3].

spettivamente  $\tau_1, \dots, \tau_n$  e siano  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$  basi per questi spazi; sia  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  il prodotto cartesiano, e sia

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^n A_i : A_1 \in \mathcal{B}_1, A_2 \in \mathcal{B}_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}_n \right\}$$

la famiglia di tutti i prodotti cartesiani di elementi scelti dalle rispettive basi. Mostrate che  $\mathcal{B}$  è una base per la topologia prodotto. (Questo esercizio generalizza il precedente 7.88, prendendo  $\mathcal{B}_i = \tau_i$ ).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0M6']

Vedete anche l'esercizio 9.51 per una applicazione al caso di spazi metrici.

E7.90 *Prerequisiti:* 7.88, 7.89, 7.83. Siano ora, più in generale,  $I$  un insieme non vuoto di indici, e siano  $(X_i, \tau_i)$  spazi topologici, al variare di  $i \in I$ ; siano  $\mathcal{B}_i$  basi per  $\tau_i$ . (La scelta  $\mathcal{B}_i = \tau_i$  è ammissibile). [2F7]

Sia  $X = \prod_{i \in I} X_i$  il prodotto cartesiano.

Definiamo la *topologia prodotto*  $\tau$  su  $X$ , similmente a 7.88, ma con una differenza.

Una base  $\mathcal{B}$  per  $\tau$  è data dalla famiglia di tutti gli insiemi della forma  $A = \prod_{i \in I} A_i$  dove

$$\forall i \in I, A_i \in \mathcal{B}_i \vee A_i = X_i,$$

e inoltre  $A_i = X_i$  eccetto eventualmente un numero finito di  $i$ .

Dimostrate che  $\mathcal{B}$  soddisfa i requisiti visti in 7.85, dunque è una base per la topologia  $\tau$  che essa genera. Dimostrate che la topologia prodotto  $\tau$  non dipende dalla scelta delle basi  $\mathcal{B}_i$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2F8']

E7.91 *Prerequisiti:* 2.112, 7.85. Verifichiamo che quanto espresso in 7.15 vale anche per le "basi". Sia  $\mathcal{B}$  una base per una topologia  $\tau$  su  $X$ ; consideriamo l'ordinamento discendente fra insiemi (formalmente  $A \leq B \iff A \supseteq B$ ); con questo ordinamento  $(\mathcal{B}, \leq)$  è un insieme diretto, il cui minimo è  $\emptyset$ . Supponiamo ora che la topologia sia Hausdorff. Preso poi  $x \in X$ , sia  $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{B} : x \in A\}$  la famiglia degli elementi della base che contengono  $x$ : mostrate che  $\mathcal{U}$  è un insieme diretto; mostrate che ha minimo se e solo se il singoletto  $\{x\}$  è aperto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0MB'] [0M9]

E7.92 Si consideri un insieme totalmente ordinato  $X$  (con almeno due elementi), e la famiglia  $\mathcal{F}$  di tutti gli intervalli aperti [2F5]

$$\begin{aligned} (x, \infty) &\stackrel{\text{def}}{=} \{z \in X : x < z\}, & (-\infty, y) &\stackrel{\text{def}}{=} \{z \in X : z < y\}, \\ (x, y) &\stackrel{\text{def}}{=} \{z \in X : x < z < y\} \end{aligned} \quad (7.93)$$

per tutti  $x, y \in X$ . (Cf. 2.142.) Dimostrare che questa è una base per una topologia, i.e. che soddisfa 7.86. Quindi  $\mathcal{F}$  è una base per la topologia  $\tau$  che essa genera. Questa topologia  $\tau$  è chiamata **topologia d'ordine**.

Se  $X$  non ha né massimo né minimo, allora gli intervalli  $(x, y)$  da soli sono già una base per  $\tau$ . Questo è il caso delle usuali topologie in  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ .

E7.94 *Prerequisiti:* 7.90. Si considerino spazi topologici  $(X_i, \tau_i)$ , ciascuno con la topologia discreta (e ciascuno  $X_i$  ha almeno due elementi). Sia  $I = \mathbb{N}$  o  $I = \{0, 1, \dots, N\}$ ; [2FD]

## §7.i Spazi primo- e secondo-numerabili

definiamo  $X = \prod_{i \in I} X_i$  il prodotto cartesiano. Definiamo la *topologia prodotto*  $\tau$  su  $X$ , come definito in 7.90. Mostrate una semplice base per questa topologia. Inoltre, se  $I = \mathbb{N}$ , mostrate che la topologia  $\tau$  non è la topologia discreta.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2FF']

E7.95 Prerequisiti: 7.92, 7.90, 2.131, 7.90. [2F9]

Si considerino insiemi totalmente ordinati  $(X_i, \leq_i)$  (con almeno due elementi), e le associate *topologia d'ordine*  $\tau_i$ .

Sia  $I = \mathbb{N}$  o  $I = \{0, 1, \dots, N\}$ ; definiamo  $X = \prod_{i \in I} X_i$  il prodotto cartesiano.

Si considerino queste due topologie.

- Definiamo la *topologia prodotto*  $\tau$  su  $X$ , come definito in 7.90.
- Dotiamo  $X$  dell'ordine lessicografico  $\leq$ , e poi della topologia d'ordine  $\sigma$ . (Si rivedano 2.131, 7.90)

Quale relazione di inclusione si ha fra  $\sigma$  e  $\tau$ ?

Se ciascun  $X_i$  è finito, dimostrate che queste due topologie coincidono <sup>†71</sup>.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2FC']

## §7.i Spazi primo- e secondo-numerabili

**Definizione 7.96.** Uno spazio topologico soddisfa il primo assioma di numerabilità se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni che sia numerabile. [2BK] [OMC]

**Definizione 7.97.** Uno spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità se esiste una base numerabile. [OMD]

### Esercizi

E7.98 Difficoltà:\*. Se  $(X, \tau)$  soddisfa il secondo assioma di numerabilità, se  $A \subseteq X$  è composto solo da punti isolati, allora  $A$  ha cardinalità numerabile o finita. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OMG'] [OMF]

E7.99 Prerequisiti: 7.82. Se  $(X, \tau)$  soddisfa il secondo assioma di numerabilità, dato  $A \subseteq X$  esiste un sottoinsieme numerabile  $B \subseteq A$  tale che  $\bar{B} \supseteq A$ . In particolare l'intero spazio  $X$  ammette un sottoinsieme numerabile denso: si dice che  $X$  è *separabile*. Il viceversa vale ad esempio negli spazi metrici, si veda 9.46. Si veda anche 9.91 per un'applicazione in  $\mathbb{R}^n$ . [OMH]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OMJ']

Gli assiomi di numerabilità ritorneranno negli esercizi 9.45 e 9.46.

## §7.j Spazi non primo-numerabili

### Esercizi

E7.100 <sup>†72</sup> Prerequisiti: 7.90, 7.79. Difficoltà:\*. Sia  $\Omega$  un insieme non vuoto; consideriamo  $X = \mathbb{R}^\Omega$ . [OMM]

<sup>†71</sup>Notate che la topologia d'ordine su un insieme finito coincide con la topologia discreta; usate 7.94.

<sup>†72</sup>Questi due esercizi 7.100, 7.101, sono tratti da un testo originalmente pubblicato dal Prof. Ricci in <http://dida.sns.it/dida2/cl/08-09/foide0/pdf9> nel Marzo 2014.

1. Siano

$$U_{E,\rho}^f = \{g \in X, \forall x \in E, |f(x) - g(x)| < \rho\}$$

dove  $f \in X$ ,  $\rho > 0$  e  $E \subset \Omega$  finito. Mostrate che la famiglia di questi  $U_{E,\rho}^f$  soddisfa i requisiti di 7.86, ed è dunque una base per una topologia  $\tau$  (Sugg. usate 7.90). Questa topologia è la *topologia prodotto* delle topologie di  $\mathbb{R}$ .

In particolare per ciascun  $f \in X$  gli insiemi  $U_{E,\rho}^f$  sono un sistema fondamentale di intorni.

2. Verificate che la topologia è  $T_2$ .

3. Notate che  $X$  è uno spazio vettoriale, e mostrate che l'operazione di somma è continua, come operazione  $X \times X \rightarrow X$ ; a questo scopo, mostrate che se  $f, g \in X$ ,  $h = f + g$ , per ogni intorno  $V_h$  di  $h$  esistono intorni  $V_f, V_g$  di  $f, g$  tali che  $V_f + V_g \subseteq V_h$ .

4. Dati  $B_i \subset \mathbb{R}$  aperti non-vuoti, uno per ciascun  $i \in \Omega$ , mostrate che  $\prod_i B_i$  è aperto se e solo se  $B_i = \mathbb{R}$  salvo al più finiti  $i$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OMN']

E7.101 Prerequisiti: 7.79, 7.100, 7.65. Difficoltà: \* Sia  $\Omega$  un insieme infinito più che numerabile; consideriamo  $X = \mathbb{R}^\Omega$  con la topologia  $\tau$  vista in 7.100. [2BP]

1. Mostrate che ogni punto in  $(X, \tau)$  non ammette un sistema fondamentale numerabile di intorni.

2. Posto

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in X, f(x) \neq 0 \text{ per al più numerabili } x \in \Omega\} \quad (7.102)$$

mostrate che si ha  $\overline{C} = X$ ;

3. che se  $(f_n) \subset C$  e  $f_n \rightarrow f$  puntualmente allora  $f \in C$ .

4. Sia  $I$  l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di  $\Omega$ , questo è un insieme filtrante se ordinato per inclusione; consideriamo la rete

$$\varphi : I \rightarrow X, \varphi(A) = \mathbb{1}_A$$

si ha che  $\forall A \in I, \varphi(A) \in C$  ma

$$\lim_{A \in I} \varphi(A) = \mathbb{1}_X \notin C.$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2BQ']

E7.103 Difficoltà: \* Restringiamo la topologia descritta nell'esempio precedente all'insieme  $Y = [0, 1]^{[0,1]}$  (cioè, restringiamo  $\mathbb{R}$  a  $[0, 1]$ , e poniamo  $\Omega = [0, 1]$ ). Trovate una successione  $(f_n) \subset Y$  che non ammetta una sottosuccessione convergente. [OMP]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OMQ']

Ricordiamo la definizione 7.38: uno spazio  $X$  è "compatto per ricoprimenti" se, per ogni  $(A_i)_{i \in I}$  famiglia di aperti tale che  $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ , esiste una sotto famiglia finita  $J \subset I$  tale che  $\bigcup_{i \in J} A_i = X$ . Sappiate che, per un importante *teorema dovuto a Tychonoff*, questo spazio  $Y$  è "compatto per ricoprimenti". Questo esercizio vi mostra invece che  $Y$  non è "compatto per successioni".

---

## §8 Miscellanea

[2FB]

Questa sezione ospita materiale che non rientrava pienamente in nessun'altra sezione.

### §8.a Poligoni

[2G3]

Presentiamo alcune semplici proprietà geometriche dei poligoni, che possono essere rigorosamente provate sia con metodi analitici (incorporando oggetti geometrici come sottoinsiemi del piano cartesiano), o metodi puramente geometrici (nello spirito di [12]).

Nel seguito useremo il celebre Teorema di Jordan; una semplice dimostrazione si può trovare in [27].

**Teorema 8.1.** *Sia  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa nel piano e  $C = \varphi([0, 1])$  sia il suo supporto. (Si veda 20.11 per la definizione). Il complementare  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  è costituito esattamente da due componenti connesse, che sono aperte. Una di questi componenti è limitata (ed è chiamato "l'interno della curva", o anche "la regione delimitata dalla curva") e l'altro è illimitato (l'esterno). La curva  $C$  è la frontiera di ognuna delle due componenti.*

[2FW]

La dimostrazione del Teorema di Jordan inizia spesso con un semplice Lemma (di nuovo, si veda [27]; o il Teorema 6 in [12]).

**Definizione 8.2.** *Chiameremo "curva poligonale" una curva  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  nel piano, spezzata (cioè, lineare a tratti) e non autointersecantesi (cioè, iniettiva). Analiticamente, vi sono punti  $V_0, V_1, \dots, V_n$  (chiamati "vertici") nel piano, e vi sono  $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = 1$  tali che*

[2G6]

$$\varphi(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} V_{i+1} + \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} V_i \text{ quando } t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

La curva poligonale è chiusa se  $\varphi(0) = \varphi(1)$ . In questo caso richiediamo che  $\varphi$  sia iniettiva quando ristretta a  $[0, 1)$ .

**Lemma 8.3.** *Sia  $C = \varphi([0, 1])$ , sia  $P$  la regione delimitata dalla curva poligonale chiusa, e sia  $E$  l'esterno; ricordiamo che  $C, P, E$  è una partizione del piano. Fissiamo  $A, B \notin C$  e supponiamo che il segmento  $AB$  intersechi  $C$  in  $k$  punti, nessuno dei quali sia un vertice; allora, se  $k$  è dispari  $A, B$  sono in regioni diverse, cioè  $A \in P \Leftrightarrow B \notin P$ ; se  $k$  è pari,  $A, B$  sono nella stessa regione.*

[2FX]

**Definizione 8.4.** *Un poligono è la figura piana delimitata da una curva poligonale chiusa.*<sup>†73</sup>

[2FN]

**Nota 8.5.** *Consideriamo una curva poligonale, con  $n$  vertici  $V_1, \dots, V_n$ . Quanti lati ha il poligono che essa delimita?*

[2CD]

*Dipende. Se alcuni vertici in sequenza sono allineati, allora la figura nel piano avrà visivamente meno di  $n$  lati e vertici. Per questo motivo, distingueremo il poligono non etichettato (che è il sottoinsieme del piano) dal poligono etichettato (in cui teniamo conto anche della posizione dei vertici); il poligono etichettato è meno intuitivo, ma la trattazione matematica è più semplice. Si veda la figura 3 a pagina 122.*





Figura 2: Esempi di poligoni con molti lati (pari o dispari) e solo due orecchie. Figura per 8.8

### Esercizi

E8.6 *Difficoltà:\**. Sia  $n \geq 3$  intero; consideriamo un poligono di  $n + 1$  vertici. Si mostri che può essere tagliato in due poligoni con rispettivamente  $h, k$  lati, e  $3 \leq h \leq n, 3 \leq k \leq n$ . Per "tagliare" intendiamo, collegare due vertici (non contigui) del poligono con un segmento che passa internamente, e che non tocca altri vertici o lati. L'intersezione dei due poligoni è il segmento  $BD$ , e non hanno altri punti in comune. [29Z]

*Sugg. esiste almeno un vertice  $B$  in cui l'angolo interno  $\beta$  è "convesso" (cioè  $0 < \beta \leq \pi$  radianti); siano  $A, C$  i vertici contigui; si ragioni sul triangolo  $ABC$ .*

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1QT']

E8.7 Dimostrate per induzione che la somma degli angoli interni di un poligono di  $n \geq 3$  lati è  $(n - 2)\pi$ . [1XH]

(La dimostrazione è facile se il poligono è convesso; nel caso generale 8.8 può essere utile).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1XM']

E8.8 Un *orecchio* di un poligono è il triangolo  $ABC$  formato da tre vertici consecutivi  $A, B, C$  del poligono, tali che il segmento  $AC$  si trova all'interno del poligono. Ciò implica che il triangolo  $ABC$  non contiene alcun punto della curva poligonale al suo interno; e che i due segmenti  $AB, BC$  possono essere rimossi dal poligono e sostituiti con  $AC$  per creare un nuovo poligono. Due orecchie sono *disgiunte* se le loro parti interne non si intersecano, o in modo equivalente se non hanno un lato in comune. [0JN]

Dimostrate il *teorema delle due orecchie*: ogni poligono (con almeno quattro vertici) ha almeno due orecchie disgiunte. (Vedere [18, 42] per più dettagli).

(Sugg. considerate poligoni etichettati, per evitare le complicazioni di situazioni come quella presentata in figura 3 nella pagina seguente.)

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2FV']

E8.9 *Difficoltà:\**. Si mostri che ogni poligono può essere "triangolato", cioè decomposto come unione di triangoli che non si sovrappongono. <sup>†74</sup> [1XW]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1XX']

E8.10 Di nuovo, diremo che un vertice  $B$  è "convesso" se l'angolo interno  $\beta$  è convesso (cioè  $0 < \beta \leq \pi$  radianti). Dimostrate che il poligono è convesso se e solo se tutti i suoi vertici sono convessi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2G5'] [2FP]

<sup>†73</sup>La curva poligonale è parte del poligono. Vi sono anche altre definizioni, si veda ad esempio in [60].

<sup>†74</sup>I triangoli possono sovrapporsi lungo i lati e/o nei vertici.

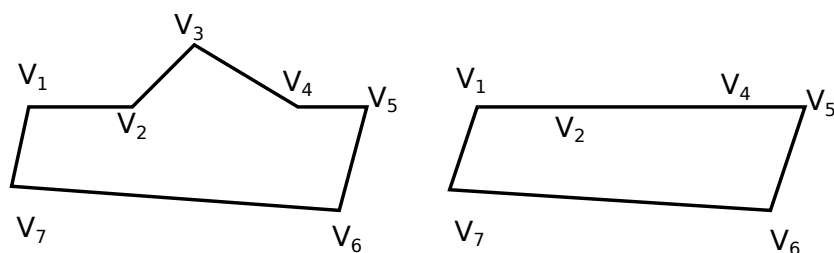


Figura 3: Un poligono per cui la rimozione di un orecchio fa decrescere il numero di lati (non etichettati) da 7 a 4.

## §8.b Insieme di Cantor

Sia nel seguito  $C \subset \mathbb{R}$  l'insieme ternario di Cantor. Non riportiamo qui la costruzione (che si trova su innumerevoli testi, ad esempio in Sez. 2.44 in [23]; e anche su [Wikipedia](#) [53]).

### Esercizi

E8.11 *(Replaces 0W4)* Mostrate che  $C$  è chiuso, e composto solo di punti di accumulazione; dunque è un *insieme perfetto*. [09S]

E8.12 Sia  $I = \{0, 2\}$  e  $X = I^{\mathbb{N}}$ , si consideri la mappa  $F : X \rightarrow C$  data da [09T]

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-1} x_n .$$

Si mostri che è una bigezione.

Dotiamo ora  $X$  della topologia definita in 7.95. <sup>†75</sup> Si mostri che  $F$  è un omeomorfismo.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '09V']

Si vedano anche 10.22, 9.151, 9.60.

<sup>†75</sup>Notate che la topologia d'ordine su  $I = \{0, 2\}$  coincide con la topologia discreta.

## §9 Spazi metrici

[OMR]

### §9.a Definizioni

[2CC]

Uno spazio metrico è una coppia  $(X, d)$  dove  $X$  è un insieme (non vuoto) con associata una distanza  $d$ .

**Definizione 9.1.** Una **distanza** è una funzione  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  che gode delle seguenti proprietà:

- $d(x, x) = 0$ ;
- (proprietà di separazione) se  $d(x, y) = 0$  allora  $x = y$ ;
- (simmetria)  $d(x, y) = d(y, x)$  per ogni  $x, y \in X$ ;
- (disuguaglianza triangolare)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  per ogni  $x, y, z \in X$ .

Un esempio è dato da  $\mathbb{R}^n$  con la distanza Euclidea  $d(x, y) = |x - y|$ .

**Definizione 9.2.** Dati una successione  $(x_n)_n \subseteq X$  e  $x \in X$ ,

[OMT]

- diremo che “ $(x_n)_n$  **converge a  $x$** ” se  $\lim_n d(x_n, x) = 0$ ; scriveremo anche  $x_n \rightarrow_n x$  per indicare che la successione converge a  $x$ .
- Diremo che “ $(x_n)_n$  è una **successione di Cauchy**” se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

**Esempio 9.3.** Dato un insieme  $X$ , possiamo sempre associargli la **distanza discreta**

[2C1]

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

La topologia generata è la topologia discreta in cui tutti i sottoinsiemi di  $X$  sono aperti.

[Nota. Se non siete familiari con il concetto di spazio metrico, potete assumere che  $X = \mathbb{R}^n$  e  $d(x, y) = |x - y|$  in tutti gli esercizi.]

### Esercizi

E9.4 Data una successione  $(x_n)_n \subseteq X$  mostrate che se converge a un punto allora è di Cauchy. [OMV]

E9.5 Data una successione  $(x_n)_n \subseteq X$  mostrate che: se converge a  $x$  e converge a  $y$ , allora  $x = y$ . [OMW]

Questo risultato è noto come *Teorema dell'unicità del limite*.

E9.6 Generalizziamo la definizione di *spazio metrico* assumendo che  $d : X \rightarrow [0, \infty]$  (gli altri assiomi sono uguali). Mostrate che la relazione  $x \sim y$  definita da [OMX]

$$x \sim y \iff d(x, y) < \infty$$

è una relazione di equivalenza, e che le classi di equivalenza sono aperte, e dunque sono sconnesse una dall'altra.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OMY']

E9.7 Date  $f, g$  continue su  $\mathbb{R}$ , si ponga [OMZ]

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| .$$

Si dimostri che  $d$  è una distanza su  $X = C(\mathbb{R})$ , nel senso esteso dell'esercizio 9.6.

Sia  $f \sim g \iff d(f, g) < \infty$  come prima, si mostri che la famiglia delle classi di equivalenza  $X/\sim$  ha la cardinalità del continuo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ON0']

E9.8 Prerequisiti: 9.39. Note: Vedere anche eserc. 14.49. Supponiamo che  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  sia monotona debolmente crescente e subadditiva, cioè  $\varphi(t) + \varphi(s) \geq \varphi(t + s)$  per ogni  $t, s \geq 0$ ; e supponiamo che  $\varphi(x) = 0$  se e solo se  $x = 0$ . [ON1]

Allora  $\varphi \circ d$  è ancora una distanza. Esempi:  $\varphi(t) = \sqrt{t}$ ,  $\varphi(t) = t/(1 + t)$ ,  $\varphi(t) = \arctan(t)$ ,  $\varphi(t) = \min\{t, 1\}$ .

Mostrate inoltre che se  $\varphi$  è continua in zero allora la topologia associata è la stessa. <sup>+76</sup>

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ON2']

E9.9 Se  $(x_n)_n \subset X$  è una successione e  $x \in X$ , si mostri che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  se e solo se, per ogni sotto-successione  $n_k$  esiste una sotto-sotto-successione  $n_{k_h}$  tale che  $\lim_{h \rightarrow \infty} x_{n_{k_h}} = x$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ON4'] [ON3]

E9.10 Una successione  $(x_n) \subset X$  è una successione di Cauchy se e solo se [ON5]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup\{d(x_n, x_m) : n \geq N, m \geq N\} = 0 .$$

E9.11 Una successione  $(x_n) \subset X$  è una successione di Cauchy se e solo se esiste una successione  $\varepsilon_n$  con  $\varepsilon_n \geq 0$  e  $\varepsilon_n \rightarrow_n 0$  per cui per ogni  $n$  e ogni  $m \geq n$  si ha  $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon_n$ . [ON6]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ON7']

E9.12 Se  $(x_n) \subset X$  è una successione di Cauchy e esistono  $x$  e una sottosuccessione  $n_m$  tale che  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = x$  allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . [ON8]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ON9']

Questo "lemma" è usato in alcune dimostrazioni importanti, ad esempio per mostrare che uno spazio metrico compatto è anche completo.

E9.13 Sia  $\varepsilon_n > 0$  una successione decrescente infinitesima. Se  $(x_n) \subset X$  è una successione di Cauchy esiste una sottosuccessione  $n_k$  tale che [ONC]

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall h \in \mathbb{N}, h > k \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_h}) \leq \varepsilon_k .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OND'] Questa proprietà viene spesso usata ponendo  $\varepsilon_n = 2^{-n}$ , o altra successione la cui serie converge.

E9.14 Sia  $(x_n)_n$  una successione tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$ : si provi che è una successione di Cauchy. [ONF]

Confrontate questo esercizio, il precedente 9.13 nel caso in cui  $\sum_n \varepsilon_n < \infty$ , e l'esercizio 9.12.

E9.15 Se  $(x_n) \subset X$  è una successione di Cauchy,  $(y_n) \subset X$  è un'altra successione, e  $d(x_n, y_n) \rightarrow_n 0$ , allora  $(y_n) \subset X$  è una successione di Cauchy. [ONG]

E9.16 Preso  $(X, d)$  uno spazio metrico, si mostri che  $d$  è continua (come funzione  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ). Si può anzi mostrare che è lipschitziana, associando a  $X \times X$  [ONH]

$$\hat{d}(x, y) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2), \text{ per } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X \times X.$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ONK']

E9.17 Prerequisiti: 5.28, 14.49, 9.11. Difficoltà: \*. Note: Esercizio 2, compito 9 Luglio 2011. [ONM]

Sia  $\alpha(x)$  una funzione continua su  $\mathbb{R}$ , limitata e strettamente positiva. Date  $f, g$  continue su  $\mathbb{R}$ , si ponga

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (\min\{\alpha(x), |f(x) - g(x)|\}).$$

Si dimostri che  $d$  è una distanza su  $C(\mathbb{R})$  e che  $(C(\mathbb{R}), d)$  è completo. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ONP']

E9.18 Note: Esercizio 2, compito 25 Marzo 2017. [ONQ]

Si dimostri che le seguenti proprietà sono equivalenti per uno spazio metrico  $X$ :

- ogni successione di elementi di  $X$  ammette una sottosuccessione di Cauchy;
- il completamento  $X^*$  di  $X$  è compatto.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ONR']

## §9.b Topologia in spazi metrici [2C2]

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico.

**Definizione 9.19** (palla, disco). Siano dati  $x \in X, r > 0$ ; indicheremo con  $B(x, r)$  la palla, [ONW]

$$B(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

che è anche indicata con  $B_r(x)$ ; e con

$$D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

il disco, che è anche indicato con  $\bar{B}_r(x)$ .

**Definizione 9.20.** Per gli esercizi seguenti definiamo che [ONX]

1. un insieme  $E$  è **aperto** se

$$\forall x_0 \in E, \exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq E \quad . \quad (9.21)$$

Si mostra che  $\emptyset, X$  sono aperti; l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto; l'unione di un numero arbitrario di aperti è un aperto. Dunque questi aperti formano una topologia.

<sup>†76</sup>Si veda la successiva Sez. §9.b per un riepilogo delle definizioni riguardo alla topologia in spazi metrici: in particolare sarà utile il 9.39.

2. La **parte interna**  $E^\circ$  di un insieme  $E$  è

$$E^\circ = \{x \in E : \exists r > 0, B_r(x) \subseteq E\}; \quad (9.22)$$

si verifica facilmente che  $E^\circ \subseteq E$ , e che  $E$  è aperto se e solo se  $E^\circ = E$  (esercizio 9.31).

3. Un insieme è **chiuso** se il complementare è aperto.

4. Un punto  $x_0 \in X$  è **aderente** a  $E$  se

$$\forall r > 0, E \cap B_r(x_0) \neq \emptyset .$$

5. La **chiusura**  $\bar{E}$  di  $E$  è l'insieme dei punti aderenti; si verifica facilmente che  $E \subseteq \bar{E}$ ; si mostra che  $\bar{\bar{E}} = \bar{E}$  se e solo se  $E$  è chiuso (esercizio 9.35).

6. A si dice **denso in**  $B$  se  $\bar{A} \supseteq B$ , cioè se per ogni  $x \in B$  e per ogni  $r > 0$  l'intersezione  $B_r(x) \cap A$  è non vuota.

Notate che, avendo la definizione operativa (9.21) di “aperto”, allora gli assiomi (nella definizione 7.2) in questo caso diventano teoremi.

### Esercizi

E9.23 Argomenti:palle. [ONZ]

Dimostrate che

$$B_\rho(x) \subseteq B_r(x_0) \quad (9.24)$$

per ogni  $x \in B_\rho(x_0)$  e per ogni  $0 < \rho \leq r - d(x, x_0)$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OP0']

E9.25 Argomenti:palle, dischi. Siano  $x_1, x_2 \in X, r_1, r_2 > 0$ , se  $d(x_1, x_2) \geq r_1 + r_2$  allora [OP1]

$$B_{r_1}(x_1) \cap D_{r_2}(x_2) = \emptyset . \quad (9.26)$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OP2']

E9.27 Argomenti:parte interna. Prerequisiti:9.23. Mostrate che  $B_r(x)$  è un aperto usando la definizione (9.21). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OP4'] [OP3]

E9.28 Si mostri che uno spazio metrico è  $T_2$  cioè Hausdorff (si veda la definizione in 7.4). [OP5]

E9.29 Se  $A = B^c$  allora mostrate che  $(\bar{B})^c = A^\circ$  (usando le definizioni di questa sezione). [OP6]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OP7']

E9.30 Prerequisiti:9.29. Mostrate che le nozioni di *parte interna* e *chiusura* viste qui sopra sono equivalenti a quelle presentate nella definizione 7.2. [OP8]

E9.31 Argomenti:parte interna. Mostrare che  $E$  è aperto se e solo se  $E^\circ = E$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OPC'] [OPB]

E9.32 Argomenti:parte interna. Mostrate che se  $A \subseteq B \subseteq X$  e  $A$  è aperto allora  $A \subseteq B^\circ$  usando la definizioni sopra riportate. [OPD]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OPF']

E9.33 Argomenti:parte interna. Mostrate che se  $A \subseteq B \subseteq X$  allora  $A^\circ \subseteq B^\circ$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OPH'] [OPG]

E9.34 Argomenti:parte interna.Prerequisiti:9.27,9.32. Dato  $X$  spazio metrico e  $A \subseteq X$ , mostrate che [OPJ]

$$A^\circ = (A^\circ)^\circ ,$$

usando la definizioni sopra riportate.

Per quanto detto in 9.31, questo equivale a dire che  $A^\circ$  è un aperto.

(Per il caso di  $X$  spazio topologico, si veda il 7.11)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OPK']

E9.35 Argomenti:parte interna. Mostrare che  $\bar{E} = E$  se e solo se  $E$  è chiuso. [OPM]

E9.36 Argomenti:chiusura. Prerequisiti:9.33,9.29.(Replaces OPN) Mostrate che se  $B \subseteq A \subseteq X$  allora  $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ ; usando la definizioni sopra riportate, oppure per passaggio al complementare and using 9.33. [OPP]

E9.37 Argomenti:chiusura.Prerequisiti:9.29, 9.36. Dato  $X$  spazio metrico e  $A \subseteq X$ , mostrate che [OPQ]

$$\bar{A} = \overline{(A)}$$

sia per passaggio al complementare rispetto al 9.34, sia usando la definizione di  $\bar{A}$  come “insieme dei punti aderenti”.

Per quanto detto in 9.35, questo equivale a dire che  $\bar{A}$  è un chiuso.

E9.38 Sia  $E \subseteq X$ , allora  $E$  è uno spazio metrico con la distanza ristretta  $\tilde{d} = d|_{E \times E}$ . [OPR]

Mostrate che  $A \subseteq E$  è aperto in  $(E, \tilde{d})$  (secondo la definizione all’inizio di questa sezione) se e solo esiste  $V \subseteq X$  aperto in  $(X, d)$  per cui  $V \cap E = A$ .

(Il secondo modo di definire “aperto” è usato nella topologia).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2GD']

E9.39 Prerequisiti:7.83.Sia  $X$  un insieme con due distanze  $d_1, d_2$ ; siano  $\tau_1, \tau_2$  rispettivamente le topologie indotte. Si ha che  $\tau_1 \subseteq \tau_2$  se e solo se [OPS]

$$\forall x \in X \forall r_1 > 0 \exists r_2 > 0 : B^2(x, r_2) \subseteq B^1(x, r_1)$$

dove

$$B^2(x, r_2) = \{y \in X : d^2(x, y) < r_2\} \quad , \quad B^1(x, r_1) = \{y \in X : d^1(x, y) < r_1\} \quad .$$

Notiamo che questo esercizio è l’analogo in spazi metrici del principio 7.83 per le basi di topologie.

E9.40 Prerequisiti: 7.88, 9.39, 11.8, 11.15, 11.16. [OPT]

Presi  $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$  spazi metrici, sia  $X = X_1 \times \dots \times X_n$ .

Sia  $\varphi$  una delle norme definite in eqn. (11.13) in Sez. §11.a. Due possibili esempi sono  $\varphi(x) = |x_1| + \dots + |x_n|$  oppure  $\varphi(x) = \max_{i=1 \dots n} |x_i|$ .

Definiamo infine per  $x, y \in X$

$$d(x, y) = \varphi(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)) \quad (9.41)$$

Si mostri che  $d$  è una distanza; si mostri che la topologia in  $(X, d)$  coincide con la topologia prodotto (si veda 7.88).

Si noti che questo approccio generalizza il modo con cui viene definita la distanza Euclidea fra punti in  $\mathbb{R}^n$  (prendendo  $X_i = \mathbb{R}$  e  $\varphi(z) = \sqrt{\sum_i |z_i|^2}$ ). Ne deduciamo che la topologia di  $\mathbb{R}^n$  è il prodotto delle topologie di  $\mathbb{R}$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OPX']

Si veda anche l'esercizio 9.51, che riformula quanto sopra usando il concetto di basi di topologie.

E9.42 Prerequisiti: 9.25, 9.16. [OPY]

Sia  $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$  il disco, si mostri che è chiuso.

Sia  $S(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) = r\}$  la sfera, si mostri che è chiusa.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OPZ']

E9.43 Prerequisiti: 9.44, 9.27, 9.42, 9.36. Sia  $r > 0$ . [OQ0]

Sia  $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$  il disco; si mostri che  $\overline{B(x, r)} \subseteq D(x, r)$  e che  $B(x, r) \subseteq D(x, r)^\circ$ .

Sia  $S(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) = r\}$  la sfera; si mostri che  $\partial B(x, r) \subseteq S(x, r)$ .

Si trovino esempi di spazi metrici in cui non valgono le uguaglianze (una, o entrambe).

Si trovi un esempio di spazio metrico in cui vi è un disco che è aperto<sup>†77</sup>.

(Si veda anche 9.89 per il caso dello spazio  $\mathbb{R}^n$ ). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OQ1'] [UNACCESSIBLE UUID 'OQ2']

E9.44 Prerequisiti: 7.25. Dato  $A \subseteq X$  sottoinsieme di uno spazio metrico, si ha che [OQ3]

$x \in \partial A$  se e solo se esistono successioni  $(y_n) \subseteq A$  e  $(z_n) \subseteq A^c$  tali che  $y_n \rightarrow_n x$  e  $z_n \rightarrow_n x$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OQ4']

E9.45 Prerequisiti: Sezione §7.i. Trovate un esempio di spazio metrico  $(M, d)$  che [OQ5]

non soddisfi il secondo assioma di numerabilità, cioè tale che non esiste una base numerabile per la topologia associata a  $(M, d)$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OQ6']

E9.46 Prerequisiti: Sezione §7.i. Sia  $(M, d)$  uno spazio metrico e supponiamo che esista [OQ7]

$D \subseteq M$  che sia numerabile e denso. In questo caso si dice che  $(M, d)$  è separabile. Mostrate che  $(M, d)$  soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

Il viceversa è vero in qualunque spazio topologico, si veda 7.99.



E9.47 Prerequisiti: 9.32, 9.36, 7.13, 9.29. Difficoltà: \*. [OQ8]

Sia  $X$  è uno spazio metrico, e  $A \subseteq X$ . Vogliamo studiare la operazione “apre-chiude”  $\overline{(A^\circ)}$  (che è la chiusura della parte interna di  $A$ ).

- Mostrate un semplice esempio in cui  $\overline{(A^\circ)}$  non è contenuto ne contiene  $A$ .
- Scrivete poi una caratterizzazione di  $\overline{(A^\circ)}$  usando successioni e palle.
- Usatela per mostrare che l’operazione “apre-chiude” è idempotente, cioè, se  $D = \overline{(A^\circ)}$  e poi  $E = \overline{(D^\circ)}$  allora  $E = D$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Q9'] [UNACCESSIBLE UUID '0QB']

E9.48 Prerequisiti: 9.69. Mostrate che, per ogni insieme chiuso  $C \subseteq X$  esistono numerabili insiemi aperti  $A_n$  tali che  $\bigcap_n A_n = C$ . [OQC]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0QD']

Un insieme ottenuto come intersezione di numerabili aperti è noto come “un insieme  $G_\delta$ ”. Il precedente esercizio mostra che in uno spazio metrico ogni chiuso è un  $G_\delta$ .

Passando al complementare si ottiene questa affermazione. Un insieme ottenuto come unione di numerabili chiusi è noto come “un insieme  $F_\sigma$ ”. Il precedente esercizio mostra che in uno spazio metrico ogni aperto è un  $F_\sigma$ .

Si veda anche la sezione §13.d.

E9.49 Difficoltà: \*\*. Trovate un esempio di spazio metrico in cui per ogni  $x \in X, r > 0$  si ha che  $B_r(x)$  è un chiuso, ma la topologia associata non è discreta. <sup>†78</sup> [OQF]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0QG']

Notiamo che un tale spazio deve essere *totalmente disconnesso* come mostrato in 7.64.

### §9.b.a Basi di palle

Per affrontare questi esercizi è necessario conoscere i concetti visti nella Sez. §7.h.

#### Esercizi

E9.50 Prerequisiti: 7.85, 7.86. Mostrate che l’intersezione di due palle è un aperto (secondo la definizione 9.20). Si ottiene che la famiglia di tutte le palle soddisfa i requisiti (a) e (b) in esercizio 7.85; dunque, per quanto mostrato in 7.86, la famiglia delle palle è una base per la topologia che essa genera (che è la topologia associata allo spazio metrico). [OQJ]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0QK']

E9.51 Rivediamo l’esercizio 9.40. [OQM]

Presi  $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$  spazi metrici, sia  $X = X_1 \times X_1 \times \dots \times X_n$ .

Sia  $d$  la distanza

$$d(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, y_i) .$$

<sup>†77</sup>Vi sono anche spazi in cui ogni palla è chiusa, si veda 9.49.

<sup>†78</sup>Si veda 7.5 per la definizione.

Questa è la stessa  $d$  definita come in eqn. (9.41) in 9.40, ponendo  $\varphi(x) = \max_{i=1 \dots n} |x_i|$ . Indichiamo con  $B^d(x, r)$  la palla in  $(X, d)$  di centro  $x \in X$  e raggio  $r > 0$ .

Vogliamo mostrare che  $d$  induce la topologia prodotto su  $X$ , usando i risultati visti in Sez. §7.h.

Presi  $t \in X_i, r > 0$  indichiamo con  $B^{d_i}(t, r)$  la palla nello spazio metrico  $(X_i, d_i)$ . Sia  $\mathcal{B}_i$  la famiglia di tutte le palle in  $(X_i, d_i)$ .

Sia  $\mathcal{B}$  definito come

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^n B^{d_i}(x_i, r_i) : \forall i, x_i \in X_i, r_i > 0 \right\}$$

Mostrate che ogni palla  $B^d(x, r)$  in  $(X, d)$  è il prodotto cartesiano delle palle  $B^{d_i}(x_i, r)$  in  $(X_i, d_i)$ . Sia dunque  $\mathcal{P}$  la famiglia delle palle  $B^d(x, r)$  in  $(X, d)$ .

Da 9.50 sappiamo che  $\mathcal{P}$  è una base per la topologia standard nello spazio metrico  $(X, d)$ .

Usate 7.83 per mostrare che  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{B}$  generano la stessa topologia  $\tau$ .

Usate 7.89 per mostrare che  $\tau$  è la topologia prodotto.

Se ne conclude che la distanza  $d$  genera la topologia prodotto.

### §9.b.b Punti di accumulazione, punti limite

Ridefiniamo questa nozione (caso speciale di quella vista in 7.19)

**Definizione 9.52** (punto di accumulazione). Dato  $A \subseteq X$ , un punto  $x \in X$  si dice punto di accumulazione per  $A$  se, per ogni  $r > 0$  si ha che  $B(x, r) \cap A \setminus \{x\}$  è non vuoto. [OQN]

L'insieme dei punti di accumulazione di  $A$  si chiama **derivato**, lo indicheremo con  $D(A)$ .

#### Esercizi

E9.53 Argomenti: punto aderente, punto di accumulazione. [OQP]

Verificate che

- ogni punto di accumulazione è anche punto aderente, in simboli  $D(A) \subseteq \bar{A}$ ;
- se un punto aderente a  $A$  non è in  $A$  allora è di accumulazione;

così si ottiene che  $\bar{A} = A \cup D(A)$ .

E9.54 Dato  $A \subseteq X$ , un punto  $x \in X$  è di accumulazione se e solo se esiste una successione  $(x_n) \subseteq A$  che è iniettiva e tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . [OQR]

E9.55 Sia  $(X, d)$  spazio metrico, e  $x \in X$ . Mostrate che  $A = \{x\}$  è chiuso; e che  $A$  ha parte interna vuota se e solo se  $x$  è punto di accumulazione. *Soluzione nascosta:* [OQS]  
[UNACCESSIBLE UUID 'OQT']

E9.56 Sia  $A \subseteq X$  e sia  $D(A)$  il derivato (cioè l'insieme dei suoi punti di accumulazione). [OQV]  
Si mostri che  $D(A)$  è chiuso. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OQW']

Aggiungiamo questa definizione (caso particolare di 7.66).

**Definizione 9.57** (punto limite). *Data una successione  $(x_n)_n \subseteq X$ , un punto  $x \in X$  si dice punto limite per  $(x_n)_n$  se esiste una sottosuccessione  $n_k$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ .* [0QX]

Nella letteratura Inglese questa nozione si traduce “cluster point” (oppure “accumulation point” il che può creare confusione con la definizione 9.52).

### Esercizi

E9.58 Trovate un esempio di spazio metrico  $(X, d)$  e di una successione limitata  $(x_k)_k \subseteq X$  che ha un unico punto limite  $x$  ma che non converge. [0QY]

Si veda anche 9.90.

E9.59 Prerequisiti: 9.5, 9.12. [0QZ]

- Se una successione  $(a_k)_k \subseteq X$  converge a  $x$  allora ha un unico punto limite, che è  $x$ .
- Se una successione di Cauchy  $(a_k)_k \subseteq X$  ha un punto limite allora vi è un unico punto limite  $x$  e  $\lim_k a_k = x$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORO']

E9.60 Argomenti: insieme perfetto. Prerequisiti: 9.53, 2.283, 7.94. Difficoltà: \*\*. [2F3]

Supponiamo che  $(X, d)$  sia uno spazio metrico completo. Un insieme chiuso  $E \subseteq X$  senza punti isolati, cioè costituito da soli punti di accumulazione, è detto **insieme perfetto**.

Sia  $C$  l'insieme di Cantor. Sia  $E$  perfetto e non vuoto. Dimostrate che esiste una funzione continua  $\varphi : C \rightarrow E$  che è un omeomorfismo con la sua immagine. Questo implica che  $|E| \geq |\mathbb{R}|$ .

Dunque, in un certo senso, ogni insieme perfetto non vuoto contiene una copia dell'insieme di Cantor.

Questo si può mostrare senza usare l'ipotesi del continuo 2.283. Cf. 9.129.

Per via di 7.42, sarà sufficiente mostrare che esiste una  $\varphi : C \rightarrow E$  continua e iniettiva.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2F4']

Altri esercizi su questi argomenti sono 9.84, 9.85, 9.86, 9.90 e 9.96.

## §9.c Quozienti [2C3]

### Esercizi

E9.61 Supponiamo che  $d$  soddisfi tutti i requisiti di distanza salvo che la “proprietà di separazione”; consideriamo la relazione  $\sim$  su  $X$  definita come  $x \sim y \iff d(x, y) = 0$ ; mostrate che è una relazione di equivalenza. Definiamo  $Y = X / \sim$ ; mostrate che la funzione  $d$  passa al quoziente, cioè che esiste  $\tilde{d} : Y \times Y \rightarrow [0, \infty)$  tale che, per ogni scelta di classi  $s, t \in Y$  e ogni scelta di  $x \in s, y \in t$  si ha  $\tilde{d}(s, t) = d(x, y)$ . Mostrate infine che  $\tilde{d}$  è una distanza su  $Y$ . [0R2]

Questo procedura è l'equivalente in spazi metrici del *quoziente di Kolmogoroff*.

E9.62 Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ ; sia  $Y = X/\sim$  lo spazio quoziente. Definiamo la funzione  $\delta : Y^2 \rightarrow \mathbb{R}$  come [OR3]

$$\delta(x, y) = \inf\{d(s, t) : s \in x, t \in y\} . \quad (9.63)$$

È una distanza su  $Y$ ? Di quali proprietà gode fra quelle indicate in 9.1? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OR4']

E9.64 Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico dove  $X$  è anche un gruppo, sia  $\Theta$  un sottogruppo. [OR5]

Definiamo che  $x \sim y \iff xy^{-1} \in \Theta$ . Si verifica facilmente che è una relazione di equivalenza. Sia  $Y = X/\sim$  lo spazio quoziente. †79

Supponiamo che  $d$  sia invariante rispetto alla moltiplicazione a sinistra per elementi di  $\Theta$ :

$$d(x, y) = d(\theta x, \theta y) \quad \forall x, y \in X, \forall \theta \in \Theta . \quad (9.65)$$

(Questo equivale a dire che, per ogni fissato  $\theta \in \Theta$  la mappa  $x \mapsto \theta x$  è una isometria). Definiamo la funzione  $\delta : Y^2 \rightarrow \mathbb{R}$  come in (9.63).

- Mostrate che, prese  $s, t \in X$ , si ha

$$\delta([s], [t]) = \inf\{d(s, \theta t) : \theta \in \Theta\} \quad (9.66)$$

dove  $[s]$  è la classe di elementi equivalenti a  $s$ .

- Mostrate che  $\delta \geq 0$ , che  $\delta$  è simmetrica e che  $\delta$  soddisfa la disuguaglianza triangolare.
- Supponiamo che, per ogni fissato  $t \in X$ , la mappa  $\theta \mapsto \theta t$  sia continua da  $\Theta$  a  $X$ ; supponiamo inoltre che  $\Theta$  sia chiuso: allora  $\delta$  è una distanza. †80

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OR6']

## §9.d Funzione distanza [2C4]

**Definizione 9.67.** Preso uno spazio metrico  $(M, d)$ , dato  $A \subset M$  non-vuoto, si definisce la **funzione distanza**  $d_A : M \rightarrow \mathbb{R}$  come [OR8]

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y) . \quad (9.68)$$

### Esercizi

E9.69 Argomenti:funzione distanza. [OR9]

1. Mostrate che  $d_A$  è Lipschitziana.
2. Mostrate che  $d_A \equiv d_{\bar{A}}$ .
3. Mostrate che  $\{x, d_A(x) = 0\} = \bar{A}$ .
4. Se  $M = \mathbb{R}^n$  e  $A$  è chiuso non-vuoto, mostrate che l'inf in (9.68) è un minimo.

Si veda anche 14.53 e 14.54. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'ORB']

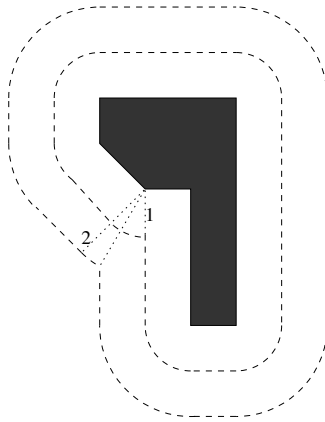


Figura 4: Ingrassato di un insieme; esercizio 9.70

E9.70 Argomenti: insieme ingrassato. Prerequisiti: 9.69.

[ORC]

Consideriamo uno spazio metrico  $(M, d)$ . Sia  $A \subseteq M$  chiuso e non-vuoto, sia  $r > 0$  fissato, e sia  $d_A$  la funzione distanza definita come in eqn. (9.68). Sia poi  $E = \{x, d_A(x) \leq r\}$ , notate che è chiuso.

1. Mostrate che

$$d_E(x) \geq \max\{0, (d_A(x) - r)\} . \tag{9.71}$$

2. Mostrate che in (9.71) si ha uguaglianza se  $M = \mathbb{R}^N$ .

3. Date un semplice esempio di spazio metrico in cui non si ha uguaglianza in (9.71).

4. Se  $M = \mathbb{R}^n$ , dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  chiuso non-vuoto, mostrate che  $E = A \oplus D_r$  dove  $D_r \stackrel{\text{def}}{=} \{x, |x| \leq r\}$  e

$$A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x + y, x \in A, y \in B\}$$

è la *somma di Minkowski* dei due insiemi (si anche veda la sezione §11.f).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'ORD'] L'insieme  $\{x, d_A(x) \leq r\} = A \oplus D_r$  è alle volte chiamato “ingrassato” di  $A$ . In figura 4 vediamo un esempio di insieme  $A$  ingrassato per  $r = 1, 2$ ; l'insieme  $A$  è il poligono nero (che è pieno) mentre le linee tratteggiate nel disegno indicano i contorni degli insiemi ingrassati. <sup>†81</sup> Si vedano anche le proprietà in sezioni §11.f e §11.g.

### §9.e Connessione

[2C5]

Si vedano le definizioni in Sez. §7.e. Definiamo inoltre questa nozione.

**Definizione 9.72.** Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  si dice “connesso per archi” se per ogni  $x, y \in X$  esiste un arco continuo  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  con  $x = \gamma(a), y = \gamma(b)$ .

[ORC]

<sup>†79</sup>Se  $\Theta$  è un sottogruppo normale allora si scrive anche  $X/\Theta$ , che è un gruppo.

<sup>†80</sup>Notate che, usando 13.27, in queste ipotesi la mappa di moltiplicazione  $(\theta, x) \mapsto \theta x$  è continua da  $\Theta \times X$  in  $X$ .

<sup>†81</sup>Gli insiemi ingrassati non sono disegnati con il loro contenuto — altrimenti coprirebbero  $A$ .

**Esercizi**

E9.73 Trovate una successione di insiemi chiusi connessi  $C_n \subseteq \mathbb{R}^2$  tali che  $C_{n+1} \subseteq C_n$  e l'intersezione  $\bigcap_n C_n$  è un insieme non-vuoto e sconnesso. [ORH]

Si può trovare un simile esempio in  $\mathbb{R}$ ?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORJ']

E9.74 Trovate una successione di insiemi chiusi e connessi per archi  $C_n \subseteq \mathbb{R}^2$  tali che  $C_{n+1} \subseteq C_n$  e l'intersezione  $\bigcap_n C_n$  è non vuoto, connesso, ma non connesso per archi. [ORK]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORM'] [UNACCESSIBLE UUID 'ORN']

E9.75 Consideriamo l'esempio di insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  dato da [ORP]

$$E = \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\} \cup \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in (0, 1] \right\} . \quad (9.76)$$

Mostrare che questo insieme è chiuso, connesso, ma non è connesso per archi.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORQ']

Si veda anche [49].

E9.77 Difficoltà:\* Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Mostrate che  $E \subseteq X$  è sconnesso se e solo se “esistono due aperti disgiunti, ciascuno dei quali interseca  $E$  e tali che  $E$  sia coperto dalla loro unione” (si veda la proposizione formalizzata in eqn. (7.56) nell'esercizio 7.55). [ORR]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORS']

E9.78 Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  numerabile; si mostri che  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  è connesso per archi. [ORT]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORV']

E9.79 Si trovi un esempio di uno spazio metrico  $X$  che è connesso per archi, in cui esiste un sottoinsieme  $A \subseteq X$  aperto che è connesso ma non connesso per archi. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORZ'] [ORY]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORZ']

**§9.f Topologia nella retta reale** [2C6]

**Esercizi**

E9.80 Mostrate che un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo se e solo è convesso, se e solo se è connesso. [OS0]

(Parte della dimostrazione si trova nel Teorema 5.11.3 in [3]).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OS1']

(Notate come in questo caso gli esercizi 2.143 e 7.59 vadano a coincidere).

E9.81 Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ , consideriamo l'insieme  $A$  dei numeri della forma  $\alpha n + m$  con  $n, m$  interi. Si mostri che  $A$  è denso in  $\mathbb{R}$  se e solo se  $\alpha$  è irrazionale. Soluzione nascosta: [OS2]

[UNACCESSIBLE UUID 'OS3']

E9.82 Dato  $I \subseteq \mathbb{Q}$  non-vuoto, mostrate che  $I$  è connesso se e solo  $I$  contiene un solo punto. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OS5'] [OS4]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OS5']

E9.83 Mostrare che ogni  $A \subset \mathbb{R}$  non-vuoto aperto è unione di una famiglia al più numerabile di intervalli aperti disgiunti. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0S7'] [0S6]

E9.84 Trovare un compatto  $A \subset \mathbb{R}$  che abbia un numero numerabile di punti di accumulazione. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0S9'] [0S8]

E9.85 *Prerequisiti:* 9.54. Mostrare che l'insieme  $A \subset \mathbb{R}$  definito come [0S5]

$$A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \cup \{1/n + 1/m : n, m \in \mathbb{N}, n \geq 1, m \geq 1\}$$

è compatto; identificare i suoi punti di accumulazione.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0SC']

E9.86 *Difficoltà:\*\*.* Sia  $A \subset \mathbb{R}$ ; ricordiamo che  $D(A)$  è il derivato di  $A$  (cioè l'insieme dei punti di accumulazione di  $A$ ). Descrivere un insieme chiuso  $A$  tale che gli insiemi [0SD]

$$A, D(A), D(D(A)), D(D(D(A))) \dots$$

siano tutti diversi.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0SF']

E9.87 *Prerequisiti:* 9.34, 9.37, 7.13, 9.47. *Difficoltà:\*\*.* [0SG]

Trovare un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}$  tale che i seguenti 7 sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  risultino tutti distinti:

$$A, \bar{A}, A^\circ, (\bar{A})^\circ, \overline{(A^\circ)}, \overline{(\bar{A})^\circ}, \overline{(A^\circ)^\circ}.$$

Dimostrare inoltre che non se ne possono creare altri proseguendo nella stessa maniera (anche sostituendo  $\mathbb{R}$  con un generico spazio metrico).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0SH']

E9.88 *Difficoltà:\*\*.* Si provi che non è possibile ottenere  $\mathbb{R}$ , o un intervallo  $D \subseteq \mathbb{R}$ , come unione numerabile di intervalli chiusi e limitati, a due a due disgiunti. [0W6]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0W7']

### §9.g Topologia nello spazio euclideo [2C7]

Nel seguito consideriamo lo spazio metrico  $\mathbb{R}^n$  con la usuale distanza euclidea.

#### Esercizi

E9.89 *Prerequisiti:* 9.43. Sia  $B(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$  la palla; sia  $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}$  il disco; sia  $S(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| = r\}$  la sfera. Si mostri che  $\overline{B(x, r)} = D(x, r)$ , che  $B(x, r) = D(x, r)^\circ$ , e che  $\partial B(x, r) = S(x, r)$ . Si mostri inoltre che  $B(x, r)$  non è chiuso e  $D(x, r)$  non è aperto. [0SM]

(Questo risultato vale più in generale in ogni spazio normato: si veda 11.7).

E9.90 *Prerequisiti:* 9.59, 9.9. Data una successione  $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}^n$ , questi fatti sono equivalenti [0SN]

**a** la successione è limitata e ha un unico punto limite  $x$

**b**  $\lim_k x_k = x$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OSP'] Si veda anche 9.58.

E9.91 Prerequisiti: 7.25, 7.26. Per ogni  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  chiuso non-vuoto, esiste  $B \subseteq A$  tale che  $A = \partial B$ . [OSQ]

In quali casi si può trovare  $B$  numerabile?

In quali casi si può trovare  $B$  chiuso?

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OSR'] [UNACCESSIBLE UUID 'OSS']

Si veda anche 7.99.

E9.92 Prerequisiti: 7.29. Per ogni  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  chiuso non-vuoto, esiste  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  tale che  $E = D(F)$ . [OSV]

Si può trovare  $F \subseteq E$ ?

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OSX'] [UNACCESSIBLE UUID 'OSY']

E9.93 Quali sono gli insiemi  $A \subset \mathbb{R}^n$  che sono sia aperti che chiusi? [OT0]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OT2']

E9.94 Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua; si mostri che queste due condizioni sono equivalenti [OT3]

- $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = +\infty$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |f(t)| = +\infty$ ;
- $f$  è **propria**, cioè per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$  si ha che la controimmagine  $f^{-1}(K)$  è un compatto di  $\mathbb{R}$ .

E9.95 Prerequisiti: Sezione 87.1. Mostrate che  $\mathbb{R}^N$  soddisfa il secondo assioma di numerabilità. [OT4]

E9.96 Prerequisiti: 7.98. Note: esercizio 4 nel compito del 13/1/2011. [OT5]

Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è composto solo da punti isolati, allora  $A$  ha cardinalità numerabile o finita.

Viceversa dunque se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è più che numerabile allora il derivato  $D(A)$  è non vuoto.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OT6']

E9.97 Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  limitato. Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme  $I \subset A$  soddisfacente: [OT7]

- $I$  è finito,
- $\forall x, y \in I, x \neq y$  si ha  $x \notin B(y, \varepsilon)$  (cioè  $d(x, y) \geq \varepsilon$ ),
- 

$$A \subseteq \bigcup_{x \in I} B(x, \varepsilon) .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OT8']

E9.98 Difficoltà: \*. Qual è la cardinalità della famiglia degli insiemi aperti in  $\mathbb{R}^n$ ? [OT9]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OTB']

E9.99 Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  non vuoto tale che ogni funzione continua  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  ammetta massimo: si mostri che  $E$  è compatto. [OTD]

(Si veda 9.119 per la generalizzazione a spazi metrici)

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OTF']



## §9.h Punti fissi

[2C8]

### Esercizi

E9.100 Trovate una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

[0TG]

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

ma che non ha punti fissi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '27D']

E9.101 *Prerequisiti:* 9.120. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto, e sia  $f : X \rightarrow X$  tale che

[0TH]

$$\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y) .$$

Mostrate che  $f$  ha un unico punto fisso.

Questo risultato è talvolta chiamato *Teorema di Edelstein*.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '27C']

## §9.i Isometrie

[2C9]

**Definizione 9.102.** Dati  $(M_1, d_1)$  e  $(M_2, d_2)$  spazi metrici, una mappa  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  è detta una *isometria* se

[0TK]

$$\forall x, y \in M_1, d_1(x, y) = d_2(\varphi(x), \varphi(y)) . \quad (9.103)$$

Vedremo in Sez. §11.b la stessa definizione nel caso di spazi vettoriali normati. Ovviamente una isometria è Lipschitziana, e dunque continua. Le isometrie godono di alcune proprietà.

### Esercizi

E9.104 *Argomenti:* isometria. Una isometria è sempre iniettiva.

[0TM]

E9.105 Se l'isometria  $\varphi$  è surgettiva (e dunque è bigettiva) allora anche la inversa  $\varphi^{-1}$  è una isometria.

[0TP]

E9.106 Se  $(M_1, d_1)$  è completo allora la sua immagine  $\varphi(M_1)$  è un insieme completo in  $M_2$ ; e dunque è un chiuso in  $M_2$ .

[0TQ]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0TR'] Conseguentemente se la isometria  $\varphi$  è bigettiva e uno dei due spazi è completo allora anche l'altro è completo.

E9.107 *Argomenti:* isometria. *Difficoltà:* \*. Siano  $(X, d)$  spazio metrico compatto; sia  $T : X \rightarrow X$  una isometria, allora  $T$  è surgettiva.

[0TT]

Date un semplice esempio di spazio metrico non compatto e di  $T : X \rightarrow X$  isometria non surgettiva.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0TV']

E9.108 *Argomenti:* isometria. *Prerequisiti:* 9.107. *Difficoltà:* \*.

[0TW]

Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \delta)$  due spazi metrici di cui  $X$  compatto,  $T : X \rightarrow Y$  e  $S : Y \rightarrow X$  due *isometrie*. Provare che allora  $T$  ed  $S$  sono bigettive.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0TY']

E9.109 Argomenti:isometria.Difficoltà:\*. Trovate un esempio di due spazi metrici  $(X, d)$  e  $(Y, \delta)$  che non sono isometrici ma per cui esistono due isometrie  $T : X \rightarrow Y$  e  $S : Y \rightarrow X$ . [0TZ]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0V1']

## §9.j Compattezza [2CB]

Il teorema di Heine-Borel [41] si estende a questo contesto.

**Teorema 9.110.** *Dato uno spazio metrico  $(X, d)$  e un suo sottoinsieme  $C \subseteq X$ , le tre seguenti condizioni sono equivalenti.* [0V3]

- $C$  è sequenzialmente compatto: ogni successione  $(x_n) \subset C$  possiede una sottosuccessione convergente a un elemento di  $C$ .
- $C$  è compatto: da ogni famiglia di aperti la cui unione copre  $C$  si può scegliere un numero finito di aperti la cui unione copre  $C$ .
- $C$  è completo, ed è totalmente limitato: per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono finiti punti  $x_1, \dots, x_n \in C$  tali che  $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ .

(Questo Teorema ha una generalizzazione in spazi topologici, si veda in 7.71).

### Esercizi

E9.111 Posto  $X = \mathbb{R}^n$  e  $d$  la usuale distanza Euclidea, preso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , usate il precedente teorema 9.110 per mostrare (come corollario) l'usuale teorema di Heine-Borel [41]:  $C$  è compatto se e solo se è chiuso e limitato. [0V4]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0V5']

E9.112 Si mostri che se  $K \subset X$  è compatto allora è chiuso. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0V7'] (Si veda 7.40 per il caso di spazio topologico) [0V6]

E9.113 Siano  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  spazi metrici, con  $(X, d_X)$  compatto; sia  $f : X \rightarrow Y$  continua e iniettiva; si mostri che  $f$  è un omeomorfismo fra  $X$  e la sua immagine  $f(X)$ . [0V8]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0V9']

(Si veda 7.42 per il caso di spazio topologico).

E9.114 Sia  $n \geq 1$  naturale. Siano  $(X_i, d_i)$  spazi metrici compatti per  $i = 1, \dots, n$ ; siano  $y_{i,k} \in X_i$  per  $i = 1, \dots, n$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Mostrare che esiste una sottosuccessione  $k_h$  tale che, per ogni fissato  $i$ ,  $y_{i,k_h}$  converge, cioè esiste il limite  $\lim_{h \rightarrow \infty} y_{i,k_h}$ . [0VB]

E9.115 Difficoltà:\*\*\*. Siano  $(X_i, d_i)$  spazi metrici compatti per  $i \in \mathbb{N}$ , e siano  $y_{i,k} \in X_i$  per  $i, k \in \mathbb{N}$ . Mostrare che esiste una sottosuccessione  $k_h$  tale che, per ogni fissato  $i$ ,  $y_{i,k_h}$  converge, cioè esiste il limite  $\lim_{h \rightarrow \infty} y_{i,k_h}$ . [0VC]

E9.116 Sia dato uno spazio metrico  $(X, d)$ . Come già in 9.19 definiamo il disco  $D(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X, d(x, y) \leq \varepsilon\}$  (che è chiuso). Diciamo che  $(X, d)$  è *localmente compatto* se per ogni  $x \in X$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $D(x, \varepsilon)$  è compatto. Considerate questa proposizione. [0VD]

«**Proposizione** Uno spazio metrico localmente compatto è completo.

**Dimostrazione** Sia  $(x_n)_n \subset X$  una successione di Cauchy, allora definitivamente i suoi termini distano al più  $\varepsilon$ , dunque sono contenuti in un piccolo disco compatto, dunque esiste una sottosuccessione che converge, e allora per il risultato 9.12 tutta la successione converge. q.e.d. »

Se secondo voi la proposizione è vera, riscrivete la dimostrazione in modo rigoroso. Se secondo voi è falsa, trovate un controesempio.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OVF']

E9.117 Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, e sia  $C \subset X$ . Si mostri che  $C$  è totalmente limitato se e solo se  $\bar{C}$  è totalmente limitato. (Si veda 9.110 per la definizione di totalmente limitato). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OVH'] [OVG]

E9.118 Prerequisiti: 9.38. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico totalmente limitato. Sia  $E \subseteq X$ , allora  $E$  è uno spazio metrico con la distanza ristretta  $\tilde{d} = d|_{E \times E}$ . Si mostri che  $(E, \tilde{d})$  è totalmente limitato. (Si veda 9.110 per la definizione di totalmente limitato). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2GC'] [2GB]

E9.119 Prerequisiti: 9.59, 9.122. Difficoltà: \*. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OVN'] [OVJ]

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico tale che ogni funzione continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ammetta massimo: si mostri che lo spazio è compatto.

(Si veda 9.99 per la formulazione con  $X = \mathbb{R}^n$ .) Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OVN'] [UNACCESSIBLE UUID 'OVN']

E9.120 Argomenti: compatti. Prerequisiti: 9.112. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OVQ'] [OVV]

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, e siano  $A_n \subseteq X$  sottoinsiemi compatti non vuoti tali che  $A_{n+1} \subseteq A_n$ : allora  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ .

(Questo risultato si può fare derivare da 7.41; provate però a dare una dimostrazione diretta, usando la caratterizzazione di “compatto” come “compatto per successioni”, cioè il primo punto in 9.110).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OVQ']

E9.121 Sia dato uno spazio metrico  $(X, d)$  e un suo sottoinsieme  $C \subseteq X$  totalmente limitato, come definito in 9.110: mostrate che  $C$  è limitato, cioè per ogni  $x_0 \in C$  si ha [OVR]

$$\sup_{x \in C} d(x_0, x) < \infty,$$

o equivalentemente, per ogni  $x_0 \in C$  esiste  $r > 0$  tale che  $C \subseteq B(x_0, r)$ .

L'implicazione opposta non vale, come mostrato in 9.123

E9.122 Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $D \subseteq X$ , si mostri che sono equivalenti: [OVS]

- $D$  non è totalmente limitato;
- esiste  $\varepsilon > 0$  ed esiste una successione  $(x_n)_n \subseteq D$  per cui

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, d(x_n, x_m) \geq \varepsilon.$$

E9.123 Prerequisiti: 9.122. Sia  $X = C^0([0, 1])$  lo spazio delle funzioni continue e limitate  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dotato della usuale distanza [0VT]

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| .$$

Sappiamo che  $(X, d_\infty)$  è uno spazio metrico completo. Sia

$$D(0, 1) = \{f \in X : d_\infty(0, f) \leq 1\} = \{f \in X : \forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq 1\}$$

il disco di centro 0 (la funzione identicamente zero) e raggio 1. Sappiamo da 9.42 che è chiuso, e dunque è completo. Mostrate che  $D$  non è totalmente limitato, trovando una successione  $(f_n) \subseteq D$  come spiegato in 9.122.

### §9.k Teoremi e categorie di Baire

Vale il seguente *teorema della categoria di Baire* di cui vi sono vari enunciati equivalenti.

**Teorema 9.124.** *Supponiamo che  $(X, d)$  sia completo.* [0VV]

- Dati numerabili  $A_n$  aperti densi in  $X$ , si ha che  $\bigcap_n A_n$  è denso.
- Dati numerabili  $C_n$  chiusi con parte interna vuota in  $X$ , si ha che  $\bigcup_n C_n$  ha parte interna vuota.

**Definizione 9.125.** *Un insieme che è contenuto nell'unione di numerabili chiusi con parte interna vuota è detto di prima categoria in  $X$ .<sup>†82</sup> In caso contrario, è detto di seconda categoria.* [0VW]

#### Esercizi

E9.126 Uno spazio metrico  $X$  completo è di seconda categoria in se stesso. *Soluzione nascosta:* [0VX]

E9.127 Posto  $X = \mathbb{R}$ , l'insieme degli irrazionali è di seconda categoria in  $\mathbb{R}$ . *Soluzione nascosta:* [0VZ]

E9.128 Si rifletta sulle affermazioni: [0W1]

- Un insieme chiuso  $C$  dentro uno spazio metrico completo  $(X, d)$  è un completo (se visto come spazio metrico  $(C, d)$ ).
- L'insieme  $C = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  è un chiuso in  $\mathbb{R}$ , dunque  $C$  è completo con la distanza  $d(x, y) = |x - y|$ .
- $C$  è composto da numerabili punti.
- Un singolo  $\{x\}$  è un chiuso a parte interna vuota.

Perché non vi è contraddizione?

*Soluzione nascosta:* [0W2]

E9.129 Argomenti: insieme perfetto. Prerequisiti: 9.53, 2.283. [OW3]

Supponiamo che  $(X, d)$  sia uno spazio metrico completo. Un insieme chiuso senza punti isolati, cioè costituito da soli punti di accumulazione, è detto **insieme perfetto**. Mostrate che un insieme perfetto non-vuoto  $E$  contenuto in  $X$  deve essere infinito più che numerabile. (Escogitate una dimostrazione semplice che faccia uso del Teorema di Baire 9.124.)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2DZ']

L'insieme di Cantor è un insieme perfetto, si veda 8.11.

## §9.1 Prodotto di infiniti spazi metrici

### Esercizi

E9.130 Prerequisiti: 9.8. Sia  $\varphi(t) = t/(1+t)$ . Siano  $(X_i, d_i)$  spazi metrici con  $i \in \mathbb{N}$ , sia  $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ , prese  $f, g \in X$  definiamo la distanza su  $X$  come [OW9]

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \varphi(d_i(f(k), g(k))).$$

Si dimostri che  $d$  è una distanza.

E9.131 Siano  $f, f_n \in X$  come prima in 9.130, si mostri che  $f_n \rightarrow_n f$  secondo questa metrica se e solo se per ogni  $k$  si ha  $f_n(k) \rightarrow_n f(k)$ . [OWB]

E9.132 Siano  $(X_i, d_i)$  e  $(X, d)$  come prima in 9.130. Se tutti gli spazi  $(X_i, d_i)$  sono completi, si provi che  $(X, d)$  è completo. [OWC]

E9.133 Prerequisiti: 9.115, 9.131. Difficoltà: \*. Siano  $(X_i, d_i)$  e  $(X, d)$  come prima in 9.130. Se tutti gli spazi  $(X_i, d_i)$  sono compatti, si provi che  $(X, d)$  è compatto. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OWF'] [OWD]

E9.134 Prerequisiti: 9.133. Vogliamo definire una distanza per lo spazio delle successioni. Procediamo come in 9.130. Scegliamo  $X_i = \mathbb{R}$  per ogni  $i$  e decidiamo che  $d_i$  sia la distanza Euclidea, poi per  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definiamo [OWG]

$$d(f, g) = \sum_k 2^{-k} \varphi(|f(k) - g(k)|).$$

Abbiamo costruito uno spazio metrico delle successioni  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ .

Nello spazio delle successioni  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$  definiamo

$$K = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall k, |f(k)| \leq 1\}.$$

Si mostri che  $K$  è compatto. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OWH']

E9.135 Sia  $N(\rho)$  il minimo numero di palle di raggio  $\rho$  che sono necessarie per coprire  $K$  (dall'esercizio precedente 9.134). Si stimi  $N(\rho)$  per  $\rho \rightarrow 0$ . [OWJ]

Si veda anche la Sez. §10

## §9.m Ultrametria

**Definizione 9.136.** Uno spazio ultrametria è uno spazio metria in cui la disuguaglianza triangolare è rafforzata dalla condizione [OWM]

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} . \quad (9.137)$$

### Esercizi

E9.138 Mostre che (9.137) implica che  $d$  soddisfa la disuguaglianza triangolare. [OWN]

E9.139 Notate che se  $d(x, y) \neq d(y, z)$  allora  $d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OWQ'] Intuitivamente, tutti i triangoli sono isosceli, e la base è più corta dei lati uguali. [OWP]

E9.140 Si mostri che, date due palle  $B(x, r)$  e  $B(y, \rho)$  di raggio  $0 < r \leq \rho$  che si intersecano, allora  $B(x, r) \subseteq B(y, \rho)$ . [OWR]

Similmente per i dischi  $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$  e  $D(y, r)$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OWS']

E9.141 Si mostri che due palle  $B(x, r)$  e  $B(y, r)$  di uguale raggio sono disgiunte oppure sono coincidenti; in particolare sono coincidenti se e solo se  $y \in B(x, r)$ . Similmente per i dischi  $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$  e  $D(y, r)$ . [OWT]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OWV']

E9.142 Si mostri che ogni palla aperta  $B(x, r)$  è anche chiusa. Si mostri che ogni disco chiuso  $D(x, r)$  con  $r > 0$  è anche aperto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OWX'] Per l'esercizio 7.64, se ne deduce che lo spazio è *totalmente disconnesso*. [OWW]

E9.143 Sia  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una funzione continua in zero, monotona debolmente crescente e con  $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$ . Mostre che  $\tilde{d} = \varphi \circ d$  è ancora una ultrametria. Mostre che gli spazi  $(X, d)$   $(X, \tilde{d})$  hanno la stessa topologia. [OWY]

Confrontate con l'esercizio 9.8, notate che non richiediamo che  $\varphi$  sia subadditiva.

### §9.m.a Ultrametria delle successioni

Costruiamo questo esempio di *ultrametria* sullo spazio delle successioni.

**Definizione 9.144.** Sia  $I$  un insieme non-vuoto, con almeno due elementi. Sia  $X = \{f : \mathbb{N} \rightarrow I\} = I^{\mathbb{N}}$  lo spazio delle successioni. Siano  $x, y \in X$ . Se  $x = y$  allora poniamo  $d(x, y) = 0$ .<sup>†83</sup> Se  $x \neq y$ , posto [OXO]

$$c(x, y) = \min\{n \geq 0, x(n) \neq y(n)\} \quad (9.145)$$

il primo indice dove le successioni sono diverse; infine definiamo  $d(x, y) = 2^{-c(x, y)}$ .

**Nota 9.146.** Per via dell'esercizio 9.143, potremmo equivalentemente definire  $d(x, y) = \varepsilon_{c(x, y)}$  con  $\varepsilon_n > 0$  successione decrescente infinitesima. [OX1]

**Esercizi**

E9.147 Prerequisiti: 9.144. Si mostri che  $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}$ . [OX2]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OX3']

E9.148 Argomenti: completo. Prerequisiti: 9.144. Si mostri che  $(X, d)$  è completo. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OX5'] [OX4]

E9.149 Argomenti: compatto. [OX6]

Prerequisiti: 9.144.

Si mostri che  $(X, d)$  è compatto se e solo se  $I$  è un insieme finito.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OX7']

E9.150 Prerequisiti: 9.144, 8.12. Supponiamo che  $I$  sia un gruppo; allora  $X$  è un gruppo (è il prodotto cartesiano di gruppi); e la moltiplicazione si effettua “componente per componente”. Mostrate che il prodotto in  $X$  è un’operazione continua, e così per la mappa di inversione. Dunque  $(X, d)$  è un gruppo topologico. [OX8]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OX9']

E9.151 Prerequisiti: 9.144, 8.12. Sia  $I$  un insieme di cardinalità 2, allora lo spazio  $(X, d)$  è omeomorfo all’insieme di Cantor (con la normale metrica Euclidea  $|x - y|$ ). [OXC]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OXD']

Combinando questo risultato con 9.150 otteniamo che l’insieme di Cantor (con la sua usuale topologia) può essere dotato di una struttura di gruppo abeliano, dove la somma e l’inversa sono funzioni continue; ciò lo rende un gruppo topologico.

Si veda anche 10.24.

**§9.n Ultrametria p-adica** [2CG]

Riportiamo dagli appunti [3] la definizione della distanza p-adica su  $\mathbb{Q}$ . Sia  $p$  un numero primo fissato.

**Definizione 9.152.** Ogni numero razionale  $x \neq 0$  si scompone in modo unico come prodotto [OXF]

$$x = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}, \tag{9.153}$$

dove  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  sono numeri primi e gli  $m_j$  interi relativi non nulli. Fissato come sopra un numero primo  $p$ , si definisce il **valore assoluto p-adico** di  $x \in \mathbb{Q}$  come

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ p^{-m} & \text{se } p^m \text{ è il fattore con base } p \text{ nella scomposizione (9.153)}. \end{cases}$$

Definiamo infine  $d(x, y) = |x - y|_p$ , che risulterà essere una distanza su  $\mathbb{Q}$ , chiamata **distanza p-adica**.

Aggiungiamo questa definizione, che sarà molto utile nel seguito.

**Definizione 9.154.** Per  $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$  definiamo [OXG]

$$\varphi_p(n) = \max\{h \in \mathbb{N}, p^h \text{ divide } n\}.$$

Poniamo inoltre  $\varphi_p(0) = \infty$ . Questa  $\varphi_p$  è nota come **valutazione p-adica** [67]. .

<sup>†82</sup>È detto a volte anche *insieme magro* (ad esempio in Wikipedia [36]); mentre per alcuni autori un “insieme magro” è un insieme che ha parte interna della chiusura uguale al vuoto.

<sup>†83</sup>Questo può essere anche ottenuto definendo  $c(x, x) = \infty$

**Esercizi**

E9.155 Provate queste relazioni fondamentali. [OXH]

1.  $|1|_p = 1$  e più in generale  $|n|_p \leq 1$  per ogni intero non nullo  $n$ , con uguaglianza se  $n$  non è divisibile per  $p$ .
2. Dato  $n$  intero non nullo, si ha che  $|n|_p = p^{-\varphi_p(n)}$ .
3. Dato  $n, m$  interi, si ha che  $\varphi_p(n+m) \geq \min\{\varphi_p(n), \varphi_p(m)\}$  con uguaglianza se  $\varphi_p(n) \neq \varphi_p(m)$ .
4. Dato  $n, m$  interi non nulli, si ha che  $\varphi_p(nm) = \varphi_p(n) + \varphi_p(m)$  e dunque  $|nm|_p = |n|_p |m|_p$ .
5. Dato  $x = a/b$  con  $a, b$  interi non nulli si ha che  $|x|_p = p^{-\varphi_p(a) + \varphi_p(b)}$ . Notiamo che se  $a, b$  sono primi tra loro, allora uno dei due termini  $\varphi_p(a), \varphi_p(b)$  è zero.
6. Provate che  $|xy|_p = |x|_p |y|_p$  per  $x, y \in \mathbb{Q}$ .
7. Provate che  $|x/y|_p = |x|_p / |y|_p$  per  $x, y \in \mathbb{Q}$  non nulli.

E9.156 Verificate che [OXM]

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \quad (9.157)$$

per ogni  $x, y \in \mathbb{Q}$ , e dunque

$$d_p(x, z) \leq \max\{d_p(x, y), d_p(y, z)\}, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

cioè questa è una ultrametria (e dunque una distanza). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OXN'] Le proprietà 6 e (9.157) dicono che la valutazione  $p$ -adica è un valore assoluto, e anzi è una Krull valuation.

E9.158 Si mostri che la mappa di moltiplicazione è continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OXR']

E9.159 Si trovi un esempio di successione che tende a zero (ma che non assume mai il valore 0). Questo esempio mostra che la topologia associata non è la topologia discreta. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OXV'] [OXT]

E9.160 *Difficoltà:\** Si mostri, per ogni  $a/b \in \mathbb{Q}$  con  $a, b$  coprimi e  $b$  non divisibile per  $p$ , esiste  $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z}$  tale che  $|x_n - a/b|_p \rightarrow_n 0$ . Si noti che la ipotesi è necessaria. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OXX'] Si ottiene che  $\mathbb{Z}$  è denso nel disco  $\{x \in \mathbb{Q}, |x|_p \leq 1\}$ . [OXW]

E9.161 *Difficoltà:\*\** Si mostri che  $(\mathbb{Q}, d)$  non è uno spazio metrico completo. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OXZ'] [OXY]

E9.162 Si mostri che nessuna distanza  $p$ -adica su  $\mathbb{Q}$  è bi-Lipschitz equivalente alla distanza euclidea (indotta da  $\mathbb{R}$ ). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OY1'] [OYO]



### §9.o Circonferenza

[2CF]

**Definizione 9.163.**  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| = 1\}$  è la **circonferenza nel piano**.

[0Y3]

È un chiuso in  $\mathbb{R}^2$ , dunque lo possiamo pensare come uno spazio metrico completo con la distanza Euclidea  $d(x, y) = |x - y|_{\mathbb{R}^2}$ .

**Definizione 9.164.** Denotiamo con  $\mathbb{R}/2\pi$  lo spazio quoziente  $\mathbb{R}/\sim$  dove  $x \sim y \iff (x-y)/(2\pi) \in \mathbb{Z}$  è una relazione di equivalenza che rende equivalenti punti che distano un multiplo intero di  $2\pi$ . Questo spazio  $\mathbb{R}/2\pi$  viene chiamato **lo spazio dei numeri reali modulo  $2\pi$** .

[0Y4]

Come usuale dato  $t \in \mathbb{R}$  indichiamo con  $[t]$  la classe degli elementi in  $\mathbb{R}/2\pi$  equivalenti a  $t$ .

#### Esercizi

E9.165 Considerate la mappa

[0Y5]

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}/2\pi &\rightarrow S^1 \\ [t] &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

mostrate che è ben definita e bigettiva.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0Y6']

E9.166 Tramite questa bigezione trasportiamo la distanza Euclidea da  $S^1$  a  $\mathbb{R}/2\pi$  definendo

[0Y7]

$$d_e([s], [t]) = |\Phi([s]) - \Phi([t])|_{\mathbb{R}^2} .$$

Con questa scelta la mappa  $\Phi$  risulta essere un isometria fra  $(S^1, d)$  e  $(\mathbb{R}/2\pi, d_e)$  (si riveda la definizione 9.102). Dunque quest'ultimo è uno spazio metrico completo.

Con qualche semplice calcolo si ricava che

$$d_e([s], [t]) = \sqrt{|\cos(t) - \cos(s)|^2 + |\sin(t) - \sin(s)|^2} = \sqrt{2 - 2\cos(t-s)} .$$

Poi definiamo la funzione

$$d_a([s], [t]) = \inf\{|s - t - 2\pi k| : k \in \mathbb{Z}\} ,$$

mostrate che è una distanza su  $\mathbb{R}/2\pi$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0Y8']

E9.167 Mostrate che  $d_a([s], [t])$  è la lunghezza del più corto arco in  $S^1$  che collega  $\Phi([s])$  a  $\Phi([t])$ .

[0Y9]

E9.168 Mostrate che le distanze  $d_a$  e  $d_e$  sono equivalenti, dimostrando che  $\frac{2}{\pi}d_a \leq d_e \leq d_a$ .

[0YB]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0YC']

- E9.169 Prerequisiti:9.61. Si può facilmente mostrare che una funzione  $f : \mathbb{R}/2\pi \rightarrow X$  può essere vista come una funzione periodica  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow X$  di periodo  $2\pi$ , e viceversa. Questo può essere facilmente ottenuto dalla relazione  $f([t]) = \tilde{f}(t)$  dove  $t$  è un generico elemento della sua classe di equivalenza  $[t]$ . Supponendo che  $\tilde{f}$  sia periodica di periodo  $2\pi$ , la precedente relazione permette di ricavare  $f$  da  $\tilde{f}$  e viceversa. Si mostri che  $f$  è continua se e solo se  $\tilde{f}$  è continua. [OYD]
- E9.170 Prerequisiti:7.32. Sia  $(X, \tau)$  la *retta compattificata*, lo spazio topologico definito in 7.32; si mostri che è omeomorfa a  $S^1$ . [OYF]

## §10 Dimensione

[OYH]

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Sia nel seguito  $K$  un sottoinsieme di  $X$ , compatto nonvuoto, e sia  $N(\rho)$  il minimo numero di palle di raggio  $\rho$  che sono necessarie per coprire  $K$ . †84

**Definizione 10.1.** *Se esiste il limite*

[OYJ]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \quad (10.2)$$

diremo che questo limite è la **dimensione di Minkowski**  $\dim(K)$  di  $K$ .

Se il limite non esiste, potremo comunque usare il limsup e il liminf per definire la *dimensione superiore e inferiore*.

Si noti che questa definizione dipende *a priori* dalla scelta della distanza, cioè  $N = N(\rho, K, d)$  e  $\dim = \dim(K, d)$ . Si veda in particolare 10.10.

### Esercizi

E10.3 Mostrate che  $N(\rho)$  è decrescente in  $\rho$ .

[OYK]

E10.4 *Prerequisiti: 9.114. Difficoltà: \**. Mostrate che  $N(\rho)$  è limitato se e solo se  $K$  contiene solo un numero finito di punti. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OYP']  
Dunque se  $K$  è infinito si deve avere  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} N(\rho) = \infty$ .

[OYN]

E10.5 Sia definito  $N'(\rho)$  essere il minimo numero di palle di raggio  $\rho$  e centrate in  $K$  che sono necessarie per coprire  $K$ : allora

[OYQ]

$$N'(2\rho) \leq N(\rho) \leq N'(\rho).$$

Dunque la dimensione non cambia se si richiede che le palle siano centrate in punti di  $K$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OYR']

E10.6 Sia  $P(\rho)$  il numero massimo di palle di raggio  $\rho$  e centrate in  $K$  che sono disgiunte. Si mostri che

[OYS]

$$N(2\rho) \leq P(\rho) \leq N(\rho/2).$$

Dunque la dimensione si può calcolare anche come

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\log P(\rho)}{\log(1/\rho)}. \quad (10.7)$$

Una tale costruzione è nota come *ball packing* in Inglese. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OYT']

E10.8 Nell'esercizio 10.6 è importante richiedere che le palle siano centrate in punti di  $K$ . Trovate un esempio di spazio metrico  $(X, d)$  e di  $K \subseteq X$  compatto di dimensione finita, ma tale che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e ogni  $\rho > 0$ , esistono infinite palle disgiunte ciascuna contenente un solo punto di  $K$ .

[OYV]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OYW']

E10.9 Mostrare che la dimensione non cambia se si usano i dischi

[OYX]

$$D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y, d(x, y) \leq r\}$$

invece delle palle  $B(x, r)$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OYY']

E10.10 Prerequisiti: 9.8. Sia  $K \subseteq X$  compatto; sia  $\alpha > 1$ ; sia  $\tilde{d}(x, y) = \sqrt[\alpha]{d(x, y)}$ , sappiamo da 9.8 che è una distanza. Mostrate che

[OYZ]

$$\alpha \dim(K, d) = \dim(K, \tilde{d}) .$$

In particolare  $K = [0, 1]$  (l'intervallo  $K \subseteq X = \mathbb{R}$ ) con la distanza  $\tilde{d}(x, y) = \sqrt[\alpha]{|x - y|}$  ha dimensione  $\alpha$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OZO']

E10.11 Argomenti: norma. Prerequisiti: 11.10.

[OZ1]

Sia  $K$  un compatto in  $\mathbb{R}^n$ ; indichiamo con  $\dim(K, |\cdot|)$  il limite che definisce la dimensione, usando le palle della norma Euclidea. Data una norma  $\phi$  possiamo definire la distanza  $d(x, y) = \phi(x - y)$ , e con questo calcolare la dimensione  $\dim(K, \phi)$ . Si mostri che  $\dim(K, |\cdot|) = \dim(K, \phi)$ , nel senso che, se un limite esiste allora esiste anche l'altro limite, e sono uguali. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OZ2']

E10.12 Indichiamo un criterio operativo che può essere usato negli esercizi seguenti.

[OZ3]

- Se esiste una successione decrescente  $\rho_j \rightarrow 0$  e  $h_j$  interi positivi tale che bastano  $h_j$  palle di raggio  $\rho_j$  per coprire  $K$ , allora

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log h_{j+1}}{\log(1/\rho_j)} . \quad (10.13)$$

- Se viceversa esiste una successione decrescente  $r_j \rightarrow 0$ , e  $C_n \subseteq K$  famiglie finite di punti che distano almeno  $r_j$  fra loro, cioè per cui

$$\forall x, y \in C_n, x \neq y \Rightarrow d(x, y) \geq r_j , \quad (10.14)$$

allora

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log(1/r_{j+1})} . \quad (10.15)$$

dove  $l_j = |C_j|$  è la cardinalità di  $C_j$ . Si noti che i punti di  $x \in C_j$  sono centri di palle  $B(x, r_j/2)$  disgiunte, dunque  $l_j \leq P(r_j/2)$ , come definito in 10.6.

In particolare se

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log h_{j+1}}{\log(1/\rho_j)} = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log l_j}{\log(1/r_{j+1})} = \beta \quad (10.16)$$

allora l'insieme  $K$  ha dimensione  $\beta$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OZ5'] [UNACCESSIBLE UUID 'OZ6']

E10.17 Prerequisiti: 11.25 10.11 10.12. Difficoltà: \*. Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  compatto. Consideriamo la famiglia dei cubi chiusi di lato  $2^{-n}$  e centri nei punti della griglia  $2^{-n}\mathbb{Z}^m$ . La chiamiamo “ $n$ -tassellatura”. Sia  $N_n$  il numero di cubi della  $n$ -tassellatura che intersecano  $K$ . Mostrate che  $N_n$  è debolmente crescente. Mostrate che il seguente limite esiste [027]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N_n}{n} \quad (10.18)$$

se e solo se esiste il limite (10.2) che definisce la dimensione, e se esistono coincidono. Questo approccio al calcolo della dimensione viene chiamato *Box Dimension* in Inglese.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '028'] [UNACCESSIBLE UUID '029']

Queste quantità hanno una interpretazione nella teoria “rate-distortion”. “ $n$ ” è la posizione dell’ultima cifra significativa (in base 2) nel determinare la posizione di un punto  $x$ . “ $\log_2 N_n$ ” è il numero di “bit” necessari per identificare un qualunque  $x \in K$  con tale precisione.

E10.19 Sia  $a_n$  una successione positiva decrescente infinitesima. Sia  $K \subseteq \mathbb{R}$  dato da [02B]

$$K = \{0\} \cup \{a_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\};$$

notate che è compatto. Studiate la dimensione di  $K$  in questi casi:

- $a_n = n^{-\theta}$  con  $\theta > 0$ ;
- $a_n = \theta^{-n}$  con  $\theta > 1$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '02C']

E10.20 Siano  $1 \leq d \leq n$  interi. Sia  $[0, 1]^d$  un cubo di dimensione  $d$ , lo vediamo come un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  ponendo [02D]

$$K = [0, 1]^d \times \{(0, 0 \dots 0)\}$$

cioè

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_d \leq 1, x_{d+1} = \dots = x_n = 0\}$$

Si mostri che la dimensione di  $K$  è  $d$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '02F']

E10.21 Si mostri che la dimensione della (immagine della) curva frattale di Koch è  $\log 4 / \log 3$ . (Si veda ad esempio [54] per la definizione). [02G]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '02H']

E10.22 Si mostri che la dimensione dell’insieme di Cantor è  $\log(2) / \log(3)$ . [02J]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '02K']

E10.23 Prerequisiti: 12.21, 11.35. Dentro nello spazio di Banach  $X = C^0([0, a])$  dotato della norma  $\|\cdot\|_\infty$  consideriamo [02M]

$$K = \{f, f(0) = 0, \forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\}$$

dove  $L > 0, a > 0$  sono fissati.

Si stimi  $N(\rho)$  per  $\rho \rightarrow 0$

---

E10.24 Argomenti:ultrametrica.Prerequisiti:9.144.

[OZP]

Sia  $\lambda > 0$ . Definiamo lo spazio ultrametrico delle successioni come in Sez. §9.m.a: sia  $I$  finito, di cardinalità  $p$ ; sia  $X = I^{\mathbb{N}}$  lo spazio delle successioni; sia  $c$  come in eqn. (9.145); sia  $d(x, y) = \lambda^{-c(x,y)}$ . Per gli esercizi 9.149 e 9.146  $(X, d)$  è compatto.

Si mostri che la dimensione di  $(X, d)$  è  $\log p / \log \lambda$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0ZQ']

E10.25 Difficoltà:\*.Esibite un compatto  $K \subset \mathbb{R}$  per cui non esiste il limite (10.2).

[OZR]

---

<sup>†84</sup>Per il teorema di Heine-Borel 9.110 sappiamo che  $N(\rho) < \infty$

## §11 Spazi normati

[02T]

Sia nel seguito  $X$  uno spazio vettoriale basato sul campo reale  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 11.1** (Norma). Una norma è un'operazione che mappa un vettore  $v \in X$  in un numero reale  $\|v\|$ , che soddisfa [02V]

1.  $\|v\| \geq 0$  e  $\|v\| = 0$  se e solo se  $v = 0$ ;
2. per ogni  $v \in X$  e  $t \in \mathbb{R}$  si ha  $|t| \|v\| = \|tv\|$  (diremo che la norma è assolutamente omogenea);
3. (Disuguaglianza triangolare) per ogni  $v, w \in X$  si ha

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad ;$$

questa dice che un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due.

**Nota 11.2.** Molti dei risultati negli esercizi successivi si generalizzano al caso di "norme asimmetriche", in cui la seconda richiesta sia sostituita da questa: per ogni reale  $t \geq 0$  si ha  $t\|v\| = \|tv\|$ . (In questo caso diremo che la norma è positivamente omogenea). [02X]

### Esercizi

E11.3 Sia  $X$  uno spazio vettoriale e  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che è positivamente omogenea, cioè: per ogni  $v \in X$  e  $t \geq 0$  si ha  $tf(v) = f(tv)$ . [02X]

Mostrate che  $f$  è convessa se e solo se vale la disuguaglianza triangolare: per ogni  $v, w \in X$  si ha

$$f(v + w) \leq f(v) + f(w) \quad .$$

In particolare, una norma è sempre una funzione convessa.

E11.4 Notate che se  $v, w \in X$  sono linearmente dipendenti e hanno lo stesso verso (cioè si può scrivere  $v = \lambda w$  o  $w = \lambda v$ , per  $\lambda \geq 0$ ), allora si ha [02Y]

$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \quad .$$

In particolare, una norma non è una funzione strettamente convessa, perché

$$\|v/2 + v/2\| = \frac{1}{2}\|v\| + \frac{1}{2}\|v\| \quad .$$

E11.5 Prerequisiti: 11.7, 14.57, 11.3. Difficoltà: \*. Diremo che lo spazio normato  $(X, \|\cdot\|)$  è strettamente convesso<sup>†85</sup> se le seguenti proprietà equivalenti valgono. [02Z]

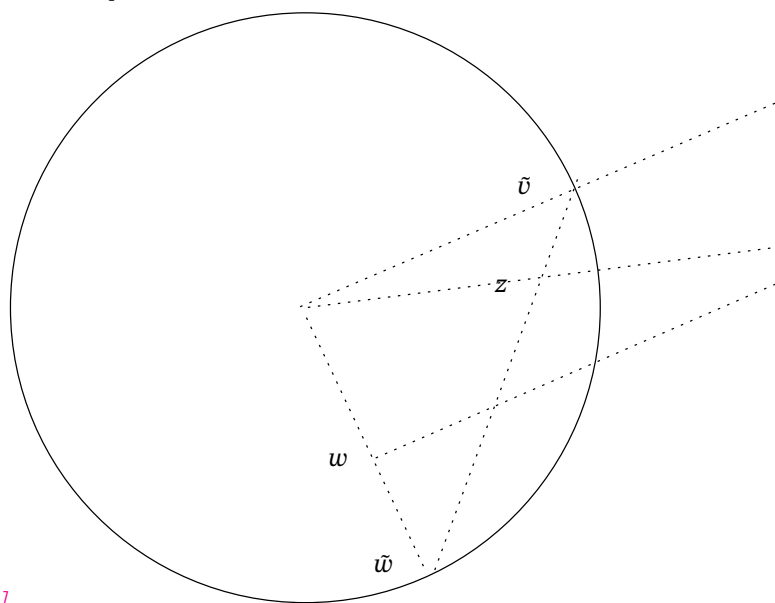
- Il disco  $D = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  è strettamente convesso. <sup>†86</sup>
- La sfera  $\{x \in X, \|x\| = 1\}$  non contiene segmenti non-banali (cioè, segmento di lunghezza positiva).

<sup>†85</sup>Si veda [33] per ulteriori proprietà.

<sup>†86</sup>La definizione è in 14.57.

- Per  $v, w \in D$  con  $\|v\| = \|w\| = 1$  e  $v \neq w$ , per ogni  $t$  con  $0 < t < 1$  si ha che  $\|tv + (1-t)w\| < 1$ .
- Per ogni  $v, w \in X$  che sono linearmente indipendenti si ha  $\|v + w\| < \|v\| + \|w\|$ .

Dimostrate che le quattro precedenti clausole sono equivalenti.



Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '102']

E11.6 Sia  $X$  uno spazio vettoriale normato con norma  $\|\cdot\|$ , mostrate che l'operazione [105]  
somma  $+$  :  $X \times X \rightarrow X$  è continua.

E11.7 Prerequisiti: 9.43. [106]

Sia di nuovo  $X$  uno spazio vettoriale normato con norma  $\|\cdot\|$ . Sia  $B(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : \|x - y\| < r\}$  la palla; sia  $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}$  il disco; sia  $S(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : \|x - y\| = r\}$  la sfera. Si mostri che  $\overline{B(x, r)} = D(x, r)$ , che  $B(x, r) = D(x, r)^\circ$ , e che  $\partial B(x, r) = \partial D(x, r) = S(x, r)$ . Si mostri inoltre che  $B(x, r)$  non è chiuso e  $D(x, r)$  non è aperto.

E11.8 Prerequisiti: 9.39. Sia  $X$  uno spazio vettoriale, siano  $\phi, \psi$  due norme su esso. Mo- [107]  
strate che le topologie generate da  $\phi$  e  $\psi$  coincidono, se e solo se esistono  $0 < a < b$  tali che

$$\forall x, \quad a\psi(x) \leq \phi(x) \leq b\psi(x) . \quad (11.9)$$

(Quando la relazione (11.9) sussiste, diremo che le norme sono “equivalenti”).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '108']

E11.10 Vogliamo mostrare che “le norme in  $\mathbb{R}^n$  sono tutte equivalenti”. [109]

Sia  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  la norma euclidea. Sia  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  una norma: si può mostrare che  $\phi$  è una funzione convessa 11.3, e dunque che è una funzione continua per 14.33. Usate questo fatto per dimostrare che esistono  $0 < a < b$  tali che

$$\forall x, \quad a\|x\| \leq \phi(x) \leq b\|x\| . \quad (11.11)$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10B']



**§11.a Norme nello spazio Euclideo**

[2CK]

**Definizione 11.12.** Dato  $p \in [1, \infty]$ , si definiscono le norme  $\|x\|_p$  su  $\mathbb{R}^n$  con

[10C]

$$\|x\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} & p \neq \infty \\ \max_{i=1}^n |x_i| & p = \infty \end{cases} \quad (11.13)$$

(Il fatto che queste siano norme si dimostra con la 11.21).

**Esercizi**

E11.14 Mostrate che  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ .

[10D]

E11.15 Prerequisiti: 16.65. Dati  $t, s \in [1, \infty]$  con  $s > t$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  mostrate che  $\|x\|_s \leq \|x\|_t$ . Inoltre mostrate che  $\|x\|_s < \|x\|_t$  se  $n \geq 2$  e  $x \neq 0$  e  $x$  non è multiplo di uno dei vettori della base canonica  $e_1, \dots, e_n$ .

[10F]

Suggerimenti:

1. usate che  $1 + t^p \leq (1 + t)^p$  per  $p \geq 1$  e  $t \geq 0$ ; o
2. usate i moltiplicatori di Lagrange; o
3. ricordiamo che  $f(a + b) > f(a) + f(b)$  quando  $a \geq 0, b > 0, f(0) = 0$  e  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è strettamente convessa e continua in 0 (si veda l'esercizio 14.49), dunque derivate  $\frac{d}{dt}(\log \|x\|_t)$  e ponete  $f(z) = z \log(z)$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10G']

E11.16 Dati  $s, t \in [1, \infty]$  con  $s < t$  mostrate che  $n^{-1/s} \|x\|_s \leq n^{-1/t} \|x\|_t$  (dove si intende  $n^{-1/\infty} = 1$ ). (Notate che questa è una disuguaglianza fra medie).

[10J]

(Sugg. Ponete  $\alpha = t/s$  e  $y_i = |x_i|^s$ , poi usate la convessità di  $f(y) = y^\alpha$ . Altro suggerimento: usate 11.17.) Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10K']

E11.17 Siano dati  $p, q \in [1, \infty]$  tali che  $1/p + 1/q = 1$  e  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ; si mostri la **disuguaglianza di Hölder** in questa forma

[10M]

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad (11.18)$$

In quali casi si ha uguaglianza?

Suggerimenti: assumete  $x_i, y_i \geq 0$ ; per i casi con  $p, q < \infty$  potete:

- usare la disuguaglianza di Young (14.50 o 23.16);
- usare i moltiplicatori di Lagrange;
- partire dal caso  $n = 2$  e porre  $x_2 = tx_1$  e  $y_2 = ay_1$ ; per i casi  $n \geq 3$  usare induzione.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10N']

E11.19 Prerequisiti: 11.17. Si deduca la versione

[10P]

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad ; \quad (11.20)$$

dalla (11.18). In quale caso vale l'uguaglianza?

E11.21 Prerequisiti:11.17. Dato  $p \in [1, \infty]$  si mostri la **disuguaglianza di Minkowski** [10Q]

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad (11.22)$$

Se ne deduce che  $\|x\|_p$  sono norme.

Per  $p \in (1, \infty)$  trovate una semplice condizione (necessaria e sufficiente) che comporti l'uguaglianza; confrontatela con 11.4; deducete che  $\mathbb{R}^n$  con la norma  $\|\cdot\|_p$  per  $p \in (1, \infty)$  è uno spazio normato strettamente convesso (vedere 11.5). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10R']

E11.23 Prerequisiti:11.3,14.55,11.15. Sia  $r > 0$ ; se  $p \in [1, \infty]$  allora la palla  $B_r^p = \{\|x\|_p < r\}$  è convessa; inoltre  $B_r^p \subseteq B_{\tilde{r}}^{\tilde{p}}$  se  $\tilde{p} > p$ . Nel caso  $n = 2$  del piano, studiare graficamente la forma delle palle al variare di  $p$ . Vi sono punti che si trovano sulla frontiera di tutte le palle? Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10T']

E11.24 Se  $r > 0$  e  $p \in (1, \infty)$  allora la sfera  $\{\|x\|_p = r\}$  è una superficie regolare. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10W']

E11.25 Prerequisiti:(11.13). Dotiamo  $\mathbb{R}^n$  della norma  $\|x\|_\infty$ : mostrare che in dimensione 2 il disco  $\{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_\infty \leq 1\}$  è un quadrato, e in dimensione 3 è un cubo, etc etc. Ora dotiamo  $\mathbb{R}^n$  della norma  $\|x\|_1$ : mostrare che in dimensione 2 il disco  $\{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_1 \leq 1\}$  è un rombo cioè precisamente un quadrato ruotato di 45 gradi; e in dimensione 3 il disco è un'ottaedro.

E11.26 Trovate una norma in  $\mathbb{R}^2$  tale che la palla sia un poligono regolare di  $n$  lati. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10Z']

## §11.b Isometrie [2CH]

Riscriviamo la definizione 9.102 nel caso di spazi normati.

**Definizione 11.27.** Se  $M_1, M_2$  sono spazi vettoriali con norme  $\|\cdot\|_{M_1}$  e rispettivamente  $\|\cdot\|_{M_2}$ , allora  $\varphi$  è un isometria quando [110]

$$\forall x, y \in M_1, \|x - y\|_{M_1} = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{M_2} \quad (11.28)$$

(riscrivendo la definizione di distanza usando le norme).

La confronteremo con questa definizione.

**Definizione 11.29.** Siano  $B_1, B_2$  due spazi vettoriali normati. Una funzione  $f : B_1 \rightarrow B_2$  è un'isometria lineare se è lineare e se [111]

$$\|z\|_{B_1} = \|f(z)\|_{B_2} \quad \forall z \in B_1 \quad (11.30)$$

Se  $\varphi$  è lineare allora la definizione di equazione (11.28) è equivalente alla definizione di isometria lineare vista in equazione (11.30) (basta porre  $z = x - y$ ). Questo spiega perché entrambi vengono chiamate "isometrie".

Per il teorema di Mazur–Ulam [58] se  $M_1, M_2$  sono spazi vettoriali (su campo reale) dotati di norma e  $\varphi$  è una isometria surgettiva, allora  $\varphi$  è affine (che vuol dire che  $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(0)$  è lineare).

Ci chiediamo ora se vi possono essere isometrie che non sono mappe lineari, o più in generale mappe affini.

<sup>†87</sup>Si intende che se  $p = 1$  allora  $q = \infty$ ; e viceversa.

**Esercizi**

E11.31 Supponiamo che la sfera  $\{x \in M_2, \|x\|_{M_2} = 1\}$  non contenga segmenti non-banali: allora ogni funzione che soddisfa (11.28) è necessariamente affine. [112]

(Si veda anche l'esercizio 11.5).

E11.32 La condizione che  $\varphi$  sia surgettiva non si può togliere dal Teorema di Mazur-Ulam. Trovate un esempio. [114]

*Sugg. Per via dell'esercizio 11.31, la sfera  $\{x \in M_2, \|x\|_{M_2} = 1\}$  dovrà contenere segmenti.*

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '115']

**§11.c Convergenza totale** [2CJ]

**Definizione 11.33.** Sia nel seguito  $X$  uno spazio vettoriale basato sul campo reale  $\mathbb{R}$ , con norma  $\|\cdot\|$ . Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di elementi di  $X$ . Si dice che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  converge totalmente quando  $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$ . [116]

**Esercizi**

E11.34 Si mostri che se le serie di  $(f_n)_n, (g_n)_n$  convergono totalmente, allora la serie di  $(f_n + g_n)_n$  converge totalmente. [117]

E11.35 Argomenti: convergenza totale. Prerequisiti: 9.12, 9.13, 9.14. [118]

Sia  $V$  uno spazio vettoriale dotato di una norma  $\|x\|$ ; dunque  $V$  è anche uno spazio metrico con la metrica  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Mostrate che le due asserzioni seguenti sono equivalenti.

- $(V, d)$  è completo.
- Per ogni successione  $(v_n)_n \subset V$  tale che  $\sum_n \|v_n\| < \infty$ , si ha che la serie  $\sum_n v_n$  converge.

*(La seconda viene a volte chiamata “criterio di convergenza totale”)*

Uno spazio vettoriale normato  $(V, \|\cdot\|)$  per cui lo spazio metrico associato  $(V, d)$  è completo, è detto **spazio di Banach**.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '119']

**§11.d Norme di applicazioni lineari** [2CM]

Siano nel seguito  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  spazi normati; sia  $A : X \rightarrow Y$  un'applicazione lineare; definiamo la **norma indotta** come

$$\|A\|_{X,Y} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y.$$

**Esercizi**

E11.36 Mostrate che  $\|A\|_{X,Y} < \infty$  se e solo se  $A$  è continua. [11B]

E11.37 Notate che se  $X$  ha dimensione finita allora ogni applicazione lineare è continua, e [11C]

$$\|A\|_{X,Y} = \max_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y .$$

E11.38 Sia  $\mathcal{L}(X, Y)$  lo spazio di tutte le applicazioni lineari continue. Mostrate che  $\|\cdot\|_{X,Y}$  è una norma in  $\mathcal{L}(X, Y)$ . [11D]

E11.39 Sia  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  un ulteriore spazio normato, e  $B : Y \rightarrow Z$  una applicazione lineare. Definiamo similmente [11F]

$$\|B\|_{Y,Z} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in Y, \|y\|_Y \leq 1} \|By\|_Z ;$$

mostrate che

$$\|AB\|_{X,Z} \leq \|A\|_{X,Y} \|B\|_{Y,Z} .$$

**§11.e Norme di matrici** [2CN]

Siano  $p, q \in [1, \infty]$ ; usiamo nel seguito le norme  $|x|_p$  definite in eqn. (11.13).

**Definizione 11.40.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matrice; considerandola come una applicazione lineare fra gli spazi normati  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_p)$  e  $(\mathbb{R}^m, |\cdot|_q)$ , definiamo di nuovo la norma indotta come [11G]

$$\|A\|_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \mathbb{R}^n, |x|_p \leq 1} |Ax|_q \tag{11.41}$$

(Notate che il massimo è sempre raggiunto in un punto con  $|x|_p = 1$ ).

La norma  $\|A\|_{2,2}$  è detta la norma spettrale. .

**Definizione 11.42.** Definiamo inoltre le norme [11H]

$$\|A\|_{F-\tilde{p}} = \begin{cases} \sqrt[\tilde{p}]{\sum_{i,j} |A_{i,j}|^{\tilde{p}}} & \tilde{p} < \infty \\ \max_{i,j} |A_{i,j}| & \tilde{p} = \infty \end{cases} ,$$

per  $\tilde{p} \in [1, \infty]$ . Il caso  $\tilde{p} = 2$  è detto norma di Frobenius.

**Esercizi**

E11.43 Prerequisiti: 11.10. Notate che le norme  $\|A\|_{p,q}$  e  $\|A\|_{F-\tilde{p}}$  sono tutte equivalenti. [11J]

E11.44 Prerequisiti: 11.39. Consideriamo matrici quadrate, cioè  $n = m$ . Sappiamo da 11.39 che le norme  $\|A\|_{p,q}$  sono submoltiplicative, cioè  $\|AB\|_{p,q} \leq \|A\|_{p,q} \|B\|_{p,q}$ . [11K]

Mostrate che anche la norma di Frobenius  $\|A\|_{F-2}$  è submoltiplicativa.

Notate che per una norma submoltiplicativa si ha che  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  per ogni  $k$  naturale.

E11.45 Mostrate che [11M]

$$\|A\|_{1,1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |A_{i,j}| ,$$

$$\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| .$$

E11.46 Se  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  possiamo definire le norme indotte [11N]

$$\|A\|_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \mathbb{C}^n, |x|_p \leq 1} |Ax|_q . \quad (11.47)$$

Mostrate che  $\|A\|_{p,q} = \|\bar{A}\|_{p,q}$ .

E11.48 Mostrate che se  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  si ha [11P]

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n, |x|_2 \leq 1} |Ax|_2 = \max_{x \in \mathbb{C}^n, |x|_2 \leq 1} |Ax|_2 .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '11Q']

### §11.f Somma di Minkowski [2CP]

Sia nel seguito  $X$  uno spazio vettoriale normato con norma  $\|\cdot\|$ .

**Definizione 11.49.** Sia  $X$  uno spazio vettoriale, e siano  $A, B \subseteq X$ . Definiamo la **somma di Minkowski**  $A \oplus B \subseteq X$  come [11R]

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\} .$$

Nel seguito, dati  $A \subseteq X, z \in X$  indicheremo con  $A + z = \{b + z : b \in B\}$  la traslazione di  $A$  nella direzione  $z$ .

#### Esercizi

E11.50 Prerequisiti: 11.49. Mostrate che la somma è associativa ed è commutativa; e che la somma ha un unico elemento neutro, che è l'insieme  $\{0\}$  costituito dalla sola origine. [11S]

E11.51 Prerequisiti: 11.49. Se  $A$  è aperto mostrate che  $A \oplus B$  è aperto. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '11V'] [11T]

E11.52 Prerequisiti: 11.49. Se  $A, B$  sono compatti mostrate che  $A \oplus B$  è compatto. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '11X'] [11W]

E11.53 Prerequisiti: 11.49. Se  $A$  è chiuso e  $B$  è compatto, mostrate che  $A \oplus B$  è chiuso. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '11Z'] [11Y]

E11.54 Prerequisiti: 11.49. Mostrate un esempio dove  $A, B$  sono chiusi ma  $A \oplus B$  non è chiuso. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '121'] [120]

E11.55 Prerequisiti: 11.49. Se  $A, B$  sono convessi mostrate che  $A \oplus B$  è convesso. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '123'] [122]

Si vedano anche gli esercizi 5.29 e 9.70.

## §11.g Morfologia matematica

[2CQ]

Sia nel seguito  $X$  uno spazio vettoriale normato con norma  $\| \cdot \|$ .

**Definizione 11.56.** Per  $A, B \subseteq X$  sottoinsiemi, ricordiamo la definizione della somma di Minkowski  $A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$  vista in 11.49.

[124]

Fissato ora un insieme  $B$ , definiamo

- la **dilatazione** di un insieme  $A \subseteq X$  essere  $A \oplus B$ ;
- l'**erosione** di un insieme  $A \subseteq X$  come

$$A \ominus B = \{z \in X : (B + z) \subseteq A\} \quad ;$$

- la **chiusura**  $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$ ;
- l'**apertura**  $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$ .

Dove, dati  $B \subseteq X, z \in X$ , abbiamo indicato con  $B + z = \{b + z : b \in B\}$  la traslazione di  $B$  nella direzione  $z$ . Nelle precedenti operazioni  $B$  è noto come “elemento strutturale”, e nelle applicazioni spesso  $B$  è un disco o una palla.

Siano nel seguito  $A, B, C \subseteq X, w, z \in X$ . Alcuni dei seguenti esercizi sono tratti da [29].

### Esercizi

E11.57 Prerequisiti: 11.56.

[125]

Mostrate le seguenti identità:

$$A \oplus B = \bigcup_{y \in B} (A + y)$$

$$A \ominus B = \bigcap_{y \in B} (A - y)$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '126']

E11.58 Prerequisiti: 11.57, 11.56.

[127]

Sia  $\tilde{B} = \{-b : b \in B\}$ ; mostrate che  $(A \oplus B)^c = A^c \ominus \tilde{B}$ , dove  $A^c = X \setminus A$  è il complementare. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '128']

E11.59 Prerequisiti: 11.56, 11.57.

[129]

Mostrate che le quattro operazioni sono monotone: se  $A \subseteq C$  allora  $A \oplus B \subseteq C \oplus B$ ,  $A \ominus B \subseteq C \ominus B$ ,  $A \bullet B \subseteq C \bullet B$  e  $A \circ B \subseteq C \circ B$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12B']

E11.60 Prerequisiti: 11.56, 11.51, 11.58. Se  $A$  è chiuso mostrate che  $A \ominus B$  è chiuso. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12D']

[12C]

E11.61 Prerequisiti: 11.56.

[12F]

Mostrate che la erosione gode della proprietà invariante in questo senso:

$$(A + z) \ominus (B + z) = A \ominus B.$$

E11.62 Prerequisiti: 11.56. [12G]

Inoltre, l'erosione soddisfa  $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$ . *Soluzione nascosta:*

[UNACCESSIBLE UUID '12H']

E11.63 Prerequisiti: 11.56. [12J]

Mostrate che la dilatazione gode della proprietà distributiva rispetto all'unione:

$$(A \cup C) \oplus B = (A \oplus B) \cup (C \oplus B).$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12K']

E11.64 Prerequisiti: 11.56, 11.63, 11.58. Mostrate che la erosione gode della proprietà distributiva rispetto all'intersezione: [12M]

$$(A \cap C) \ominus B = (A \ominus B) \cap (C \ominus B).$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12N']

E11.65 Prerequisiti: 11.56, 11.58. Sia  $\tilde{B} = \{-b : b \in B\}$ . Mostrate che [12P]

$$(A \cdot B)^c = (A^c \circ \tilde{B}).$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12Q']

E11.66 Prerequisiti: 11.56. [12R]

Mostrate che

$$A \subseteq (C \ominus B)$$

se e solo se

$$(A \oplus B) \subseteq C.$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12S']

E11.67 Prerequisiti: 11.56. [12T]

Ricordiamo che l'operazione  $A \cdot B = (A \oplus B) \ominus B$  si chiama "chiusura".

- Mostrate che  $A \subseteq A \cdot B$ .
- Sia  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $B = B_r = \{\|x\| < r\}$  una palla, trovate un esempio di insieme  $A$  aperto non vuoto limitato per cui  $A \cdot B = A$ .
- Sia  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $B = B_r$  una palla, trovate un esempio per cui  $A \cdot B \neq A$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12V']

E11.68 Prerequisiti: 11.56, 11.57. [12W]

L'apertura è data anche da  $A \circ B = \bigcup_{x \in X, B+x \subseteq A} (B+x)$ , il che significa che è il luogo delle traslazioni dell'elemento strutturale  $B$  all'interno dell'insieme  $A$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12X']

E11.69 Prerequisiti: 11.56. Nel seguito  $A, B, \hat{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ . [12Y]

- Trovate un esempio dove  $B \subsetneq \hat{B}$  e  $A \circ B \subsetneq A \circ \hat{B}$ .
- Trovate un esempio dove  $B \subsetneq \hat{B}$  e  $A \circ \hat{B} \subsetneq A \circ B$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '122']

E11.70 Prerequisiti: 11.56, 11.68. Se  $A$  è convesso e  $\hat{B}$  è l'inviluppo convesso (vedere 14.15) di  $B$  mostrate che  $A \circ B \subseteq A \circ \hat{B}$ . Mostrate con un esempio che l'uguaglianza potrebbe non valere. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '131'] [130]

E11.71 Prerequisiti: 11.56, 11.68. Se  $A, B$  sono convessi mostrate che  $A \circ B$  è convesso. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '133'] [132]



## §12 Semicontinuità, limiti destri e sinistri

[137]

### §12.a Semi continuità

[2CV]

Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico. Definiamo "liminf" e "limsup" generalizzando la definizione precedentemente presentata in 5.37 per il caso  $X = \mathbb{R}$ .

**Definizione 12.1.** Sia  $E \subseteq X$ ,  $x_0 \in X$  punto di accumulazione di  $E$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  funzione. Si definiscono [2GW]

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{U \text{ intorno di } x_0} \sup_{x \in U \cap E} f(x) \quad (12.2)$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{U \text{ intorno di } x_0} \inf_{x \in U \cap E} f(x) \quad (12.3)$$

dove il primo "inf" (risp. il "sup") si esegue rispetto alla famiglia di tutti gli intorno  $U$  di  $x_0$  (sempre del tipo "col buco").<sup>†88</sup>

**Definizione 12.4.** Una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice semicontinua inferiormente (abbreviata s.c.i.) se [138]

$$\forall x_0 \in D(X) \quad , \quad \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

e viceversa si dice semicontinua superiormente (abbreviata s.c.s.) se

$$\forall x_0 \in D(X) \quad , \quad \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0) .$$

( $D(X)$  sono i punti di accumulazione in  $X$ ).

Si noti che  $f$  è semicontinua inferiormente se e solo se  $(-f)$  è semicontinua superiormente: dunque in molti esercizi successivi vedremo solo i casi s.c.i.

### Esercizi

E12.5 Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x) = 1$  se  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $f(0) = 0$  e  $f(x) = 1/q$  se  $|x| = p/q$  con  $p, q$  numeri interi primi tra loro con  $q \geq 1$ . Mostrare che  $f$  è continua su  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  e discontinua in ogni  $t \in \mathbb{Q}$ . [139]

Mostrate che la funzione descritta è s.c.s. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '13B']

E12.6 Prerequisiti: 12.5. [13C]

Costruire una funzione monotona con la stessa proprietà di quella vista nell'esercizio 12.5.

E12.7 Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ; le seguenti asserzioni sono equivalenti: [13D]

1.  $f$  è semicontinua inferiormente,
2. per ogni  $t$ , si ha che il sottolivello

$$S_t = \{x \in X, f(x) \leq t\}$$

è chiuso,

<sup>†88</sup>Se non si vuole specificare "intorni col buco", si può scrivere  $x \in U \cap E, x \neq x_0$  nel secondo termine.

3. l'epigrafico

$$E = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}, f(x) \leq t\}$$

è chiuso in  $X \times \mathbb{R}$ .

Si noti che la seconda condizione comporta che  $f$  è continua da  $(X, \tau)$  in  $\mathbb{R}, \tau_+$  dove  $\tau_+ = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  è l'insieme delle semirette, che è una topologia (facile verifica).

Si formuli poi l'equivalente teorema per le funzioni *semicontinue superiormente*.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '13F']

E12.8 Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  sono semicontinue inferiormente, allora  $f + g$  è s.c.i. Soluzione [13G]  
nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '13H']

E12.9 Sia  $I$  una famiglia di indici; poi, per  $n \in I$ ,  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  siano funzioni s.c.i., [13J]  
definiamo  $f \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \in I} f_n$  allora  $f$  è s.c.i. (a valori  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ).<sup>†89</sup> Soluzione  
nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '13K']

E12.10 Viceversa, data  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  s.c.i., si mostri che esiste sempre una [13M]  
successione crescente di funzioni  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue tali che  $f_n(x) \rightarrow_n f(x)$ .  
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '13N']

E12.11 Argomenti: inf-convoluzione. Difficoltà:\*. Nel caso in cui  $(X, d)$  sia uno spazio [13P]  
metrico e  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sia s.c.i. limitata dal basso, sia

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in X} \{f(y) + nd(x, y)\}$$

la *inf-convoluzione*: si mostri che la successione  $f_n$  è una successione crescente di  
funzioni Lipschitziane con  $f_n(x) \rightarrow_n f(x)$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID  
'13Q']

E12.12 Data  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , si definisce [13R]

$$f^*(x) = f(x) \vee \limsup_{y \rightarrow x} f(y) \quad ;$$

si mostri che  $f^*(x)$  è la più piccola funzione semi continua superiore che è maggiore  
o uguale a  $f$  in ogni punto.

Similmente si definisce

$$f_*(x) = f(x) \wedge \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$$

e si ha  $-(f^*) = (-f)_*$ , e che dunque  $f_*(x)$  è la più grande funzione semi continua  
inferiore che è minore o uguale a  $f$  in ogni punto.

Si noti infine che  $f^* \geq f_*$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '13S']

E12.13 Argomenti: oscillazione. [13T]

Data una qualunque  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , si definisce la *funzione oscillazione*  $\text{osc}(f)$

$$\text{osc}(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f^*(x) - f_*(x)$$

<sup>†89</sup>Si noti che questo vale anche quando  $n \in I$  famiglia più che numerabile di indici; e vale in particolare  
quando le  $f_n$  sono continue

1. Si noti che  $\text{osc}(f) \geq 0$ , e che  $f$  è continua in  $x$  se e solo se  $\text{osc}(f)(x) = 0$ .
2. Si mostri che  $\text{osc}(f)$  è semicontinua superiore.
3. Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico, si noti che

$$\text{osc}(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup\{|f(y) - f(z)|, d(x, y) < \varepsilon, d(x, z) < \varepsilon\} .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '13V']

E12.14 Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione; sia  $\bar{x} \in X$  un punto di accumulazione; sia infine  $U_n$  una famiglia di intorni aperti di  $\bar{x}$  con  $U_n \supseteq U_{n+1}$ . Allora esiste una successione  $(x_n) \subset X$  con  $x_n \in U_n$  e  $x_n \neq \bar{x}$  e tale che [13W]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) .$$

(Si noti che in generale non pretendiamo né ci aspettiamo che  $x_n \rightarrow \bar{x}$ ). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '13X']

E12.15 Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione; sia  $\bar{x} \in X$  un punto di accumulazione; Sia  $A$  l'insieme di tutti i limiti  $\lim_n f(x_n)$  (quando esistono) per tutte le successioni  $(x_n) \subset X$  tali che  $x_n \rightarrow \bar{x}$ ; allora [13Y]

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \leq \inf A ;$$

inoltre se  $(X, \tau)$  soddisfa il primo assioma di numerabilità, allora l'uguaglianza vale e  $\inf A = \min A$ .

E12.16 Sia  $f_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  funzione monotona (debolmente crescente) e continua a destra. Sia poi  $f_2 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  data da [13Z]

$$f_2(s) = \sup\{t \geq 0 : f_1(t) > s\}$$

(con la convenzione che  $\sup \emptyset = 0$ ) e poi ancora  $f_3 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  data da

$$f_3(s) = \sup\{t \geq 0 : f_2(t) > s\} :$$

allora  $f_1 \equiv f_3$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '140']

## §12.b Funzioni regolate [2CT]

### Definizione 12.17. [141]

Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo. Le funzioni  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  **regolate** sono le funzioni che ammettono in ogni punto limite destro e limite sinistro. †90

(Si noti in particolare che ogni funzione monotona è regolata, e ogni funzione continua è regolata.)

**Esercizi**

E12.18 Si mostri che una funzione regolata  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è limitata. [142]

E12.19 Prerequisiti: 12.13. Sia  $I = [a, b]$  intervallo chiuso e limitato. Si mostri che [143]

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è regolata se e solo se
- per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme finito di punti  $P \subset I$  tale che, per ogni  $J \subseteq I$ ,  $J$  intervallo aperto che non contiene alcun punto di  $P$ , si ha che l'oscillazione di  $f$  in  $J$  è minore di  $\varepsilon$ .

E12.20 Sia  $V$  l'insieme delle funzioni  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  costanti a tratti, che è lo spazio vettoriale generato dalle funzioni caratteristiche  $\mathbb{1}_J$  degli intervalli  $J \subseteq I$ . Si mostri che la chiusura di  $V$  secondo la convergenza uniforme coincide con lo spazio delle funzioni regolate. [144]

Dunque lo spazio delle funzioni regolate dotato della norma  $\| \cdot \|_\infty$  è uno spazio di Banach.

Si vedano anche gli esercizi 15.7, 15.8, 15.9 e 17.8.

**§12.c Trasformata di sup** [2CR]

**Definizione 12.21.** Sia  $I = \mathbb{R}^+$  oppure  $I = \mathbb{R}$  nel seguito, per semplicità. [2CS]

Sia  $\varepsilon > 0$ ; data  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  limitata<sup>†91</sup>, definiamo la “trasformata sup” come la funzione  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$g(x) = \sup_{y \in (x, x+\varepsilon)} f(y) . \tag{12.22}$$

Riassumiamo questa trasformazione con la notazione  $g = F(\varepsilon, f)$ .

**Esercizi**

E12.23 Prerequisiti: 12.21. Mostrate che  $g$  è regolata. [145]

E12.24 Prerequisiti: 12.21. Mostrate che  $g$  è semicontinua inferiore. [146]

E12.25 Prerequisiti: 12.21. Mostrate che  $f = g$  se e solo se  $f$  è monotona debolmente decrescente e continua a destra. [147]

E12.26 Prerequisiti: 12.21. Data [148]

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x = 4 \\ 0 & x \neq 4 \end{cases}$$

trovate  $f$  tale che  $g = F(1, f)$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '149']

E12.27 Prerequisiti: 12.21. Mostrate che se  $f$  è continua allora  $g$  è continua. [14B]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '14C']

E12.28 Prerequisiti: 12.21, 11.35. Sia  $C_b = C_b(I)$  lo spazio delle funzioni  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue e limitate. Questo è uno spazio di Banach (uno spazio normato completo) con la norma  $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ . [14D]

Consideriamo la mappa  $F : [0, \infty) \times C_b \rightarrow C_b$  che trasforma  $g = F(\varepsilon, f)$ , come definito nella eqn. (12.22).

Mostrate che  $F$  è continua.

E12.29 Prerequisiti: 12.21. Come cambiano i precedenti esercizi se si definisce invece [14F]

$$g(x) = \sup_{y \in [x, x+\varepsilon]} f(y) ? \quad (12.30)$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '14G']

---

<sup>†90</sup>Negli estremi ovviamente si richiede uno solo dei due limiti.

<sup>†91</sup>L'ipotesi "limitata" è di comodo, i risultati successivi valgono anche senza questa ipotesi, con semplici modifiche.

---

## §13 Continuità

[14J]

### §13.a Funzioni continue

[2DP]

**Definizione 13.1.** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione; sia  $x \in A$ ;  $f$  è detta **continua in  $x$**  se

[2DN]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in A, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

$f$  è detta **continua** se è continua in ogni punto.

L'insieme di tutte le funzioni continue  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è denotato con  $C(A)$ ; è uno spazio vettoriale.

Ulteriori informazioni si possono trovare in Cap. 3 in [5] o Cap. 4 of [23].

### Esercizi

E13.2 Sia  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Si mostri che è limitata dall'alto <sup>+92</sup> [14K]  
se e solo se  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} f(x) < +\infty$ .

E13.3 Prerequisiti: 9.96. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Si mostri che l'insieme [14M]  
dei punti di discontinuità eliminabile (cioè i punti  $z$  per cui si ha  $\lim_{x \rightarrow z} f(x) \neq f(z)$ ,  
cf. [61]) è al più numerabile.

E13.4 Prerequisiti: 9.96. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Si mostri che l'insieme [14N]  
di punti di discontinuità del secondo tipo è al più numerabile (cioè i punti  $z$  dove  
esistono i limiti laterali ma  $\lim_{x \rightarrow z^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow z^-} f(x)$ , cf. [61]).

E13.5 Prerequisiti: 5.8. Fissato  $\alpha > 1$  definiamo, per  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha^x$  come in 5.8. Mostrate [21N]  
che è una funzione continua e che è un omeomorfismo fra  $\mathbb{R}$  e  $(0, \infty)$ . L'inversa di  
 $y = \alpha^x$  è la funzione **logaritmo**  $x = \log_{\alpha} y$ .

E13.6 Prerequisiti: 9.83. Difficoltà: \*. [14P]  
Sia  $C \subset \mathbb{R}$  chiuso e sia  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  continua; mostrate che esiste sempre  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
continua che estende  $f$ , cioè  $g|_C = f$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '14Q']

E13.7 Difficoltà: \*\*. Trovate una funzione continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che non è monotona in [14R]  
nessun intervallo (aperto nonvuoto).

E13.8 Prerequisiti: integrale di Riemann. [14T]

Data  $f = f(x, y) : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e posto

$$g(x) = \int_0^1 f(x, y) dy \quad ,$$

mostrare che  $g$  è continua.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '14V']

E13.9 Data  $f = f(x, y) : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e posto [14W]

$$g(x) = \max_{y \in [0, 1]} f(x, y)$$

mostrare che  $g$  è continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '14X']

E13.10 Siano  $x_n, y_n$  successioni reali strettamente positive con limite zero; esiste una funzione continua e monotona  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  tale che  $f(0) = 0$  e  $\forall x > 0, f(x) > 0$ , e tale che  $\forall n, f(x_n) < y_n$  (da cui  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ). [14Y]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '14Z']

E13.11 Sia data una funzione  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  tale che  $g(0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ ; allora esiste una funzione continua e monotona  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  tale che  $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  e  $f \geq g$ . [150]

E13.12 Dimostrare che se una funzione monotona è definita su un sottoinsieme denso di un intervallo aperto  $I$ , e ha immagine densa in un altro intervallo aperto  $J$ , allora si prolunga a una funzione continua monotona tra i due intervalli  $I, J$  aperti. [151]

(Cosa succede se  $I$  è chiuso ma  $J$  è aperto?)

E13.13 Prerequisiti: categorie di Baire Sec. §9.k. Difficoltà: \*. [152]

Si mostri che non esiste una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che è continua sui razionali e discontinua sugli irrazionali. (Sugg. Si mostri che gli irrazionali  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  non sono un  $F_\sigma$  in  $\mathbb{R}$ , usando il teorema di Baire.)

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '153']

### §13.b Funzioni uniformemente continue [20Q]

**Definizione 13.14.** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione;  $f$  è detta **uniformemente continua** se [155]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Più in generale, dati  $(X_1, d_1)$  e  $(X_2, d_2)$  spazi metrici, data una funzione  $f : X_1 \rightarrow X_2$ ,  $f$  è detta **uniformemente continua** se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X_1, d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon .$$

Si vede facilmente che una funzione *uniformemente continua* è continua in ogni punto.

#### Esercizi

E13.15 Prerequisiti: 13.14. Sia  $f : X_1 \rightarrow X_2$  con  $(X_1, d_1)$  e  $(X_2, d_2)$  spazi metrici. [156]

Una funzione  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  monotona (debolmente) crescente, con  $\omega(0) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega(t) = 0$ , tale che

$$\forall x, y \in X_1, d_2(f(x), f(y)) \leq \omega(d_1(x, y)), \quad (13.16)$$

<sup>192</sup>cioè esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $\forall x \in (0, 1]$  si ha  $f(x) < c$

è detta **modulo di continuità** per la funzione  $f$ . (Notate che  $f$  può avere molti moduli di continuità).

Per esempio se la funzione  $f$  è Lipschitziana cioè esiste  $L > 0$  tale che

$$\forall x, y \in X_1, d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y)$$

allora  $f$  soddisfa la eqz. (13.16) ponendo  $\omega(t) = Lt$ .

Vedremo ora che l'esistenza di un modulo di continuità è equivalente alla uniforme continuità di  $f$ .

- Se  $f$  è uniformemente continua, mostrate che la funzione

$$\omega_f(t) = \sup\{d_2(f(x), f(y)) : x, y \in X_1, d_1(x, y) \leq t\} \quad (13.17)$$

è il più piccolo modulo di continuità.<sup>†93</sup>

- Notate che il modulo definito in (13.17) potrebbe non essere continuo, e potrebbe essere infinito per  $t$  grande — trovate esempi a riguardo.
- Mostrate inoltre che se  $f$  è uniformemente continua si può trovare un modulo che è continuo dove è finito.
- Viceversa è facile verificare che se  $f$  ha un modulo di continuità, allora è uniformemente continua.

Se non conoscete la teoria degli spazi metrici, potete dimostrare i precedenti risultati nel caso in cui  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I \subseteq \mathbb{R}$ . (Si veda anche l'esercizio 13.25, che mostra che in questo caso il modulo  $\omega$  definito in (13.17) è continuo ed è finito).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '157'] [UNACCESSIBLE UUID '158'] [UNACCESSIBLE UUID '159']

E13.18 Sia  $(X, d)$  spazio metrico, sia  $\mathcal{F}$  l'insieme delle funzioni  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continue, si mostri che  $\mathcal{F}$  è uno spazio vettoriale. [15C]

Questo vale più in generale se  $f : X \rightarrow X_2$  dove  $X_2$  è uno spazio vettoriale normato (a cui associamo la distanza derivata dalla norma).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15D']

E13.19 Difficoltà:\* Siano  $(X_1, d_1)$  e  $(X_2, d_2)$  spazi metrici, con  $(X_2, d_2)$  completo. Sia  $A \subset X_1$  e  $f : A \rightarrow X_2$  una funzione uniformemente continua. Si mostri che esiste una funzione uniformemente continua  $g : \bar{A} \rightarrow X_2$  che estende  $f$ ; inoltre l'estensione  $g$  è unica. [15F]

Si noti che se  $\omega$  è un modulo di continuità per  $f$  allora è anche un modulo di continuità per  $g$ . (Si assuma che  $\omega$  sia continuo, o almeno che sia semicontinuo superiore).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15G'] [UNACCESSIBLE UUID '15H']

E13.20 Prerequisiti: 13.19. Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  limitato e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Si mostri che  $f$  è uniformemente continua se e solo esiste una funzione continua  $g : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$  che estende  $f$ ; inoltre l'estensione  $g$  è unica. [15J]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15K']



E13.21 Sia  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Si mostri che è uniformemente continua se e solo se esiste finito il limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15N'] [15M]

E13.22 Sia  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e tale che esista finito il limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Si mostri che è uniformemente continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15Q'] [15P]

E13.23 Sia  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, si mostri che queste due asserzioni sono equivalenti. [15R]

- Esiste  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua e tale che esiste finito il limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$ .
- $f$  è uniformemente continua.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15S']

E13.24 Si trovi un esempio di  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua e limitata, ma non uniformemente continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15V'] [15T]

E13.25 Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo, e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua. Sia il modulo di continuità  $\omega$ , definito tramite la eqn. (13.17) come nell'esercizio 13.15. Si mostri che  $\omega$  è subaddittiva cioè [15W]

$$\omega(t) + \omega(s) \geq \omega(t + s) \quad .$$

Sapendo che  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega(t) = 0$  se ne conclude che  $\omega$  è continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15X']

E13.26 Prerequisiti:13.25. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua; si mostri che [15Z]

$$\limsup_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)|/|x| < \infty$$

o equivalentemente che esiste una costante  $C$  tale che  $|f(x)| \leq C(1 + |x|)$  per ogni  $x$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '160']

E13.27 Prerequisiti:9.40. Siano  $(X_1, d_1)$ ,  $(X_2, d_2)$  e  $(Y, \delta)$  tre spazi metrici; consideriamo il prodotto  $X = X_1 \times X_2$  dotato della distanza  $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ .<sup>†94</sup> Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione con le seguenti proprietà: [161]

- Per ogni fissato  $x_1 \in X_1$  la funzione  $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$  è continua (come funzione da  $X_2$  a  $Y$ );
- esiste un modulo di continuità  $\omega$  tale che

$$\forall x_1, \tilde{x}_1 \in X_2, \forall x_2 \in X_2, \delta(f(x_1, x_2), f(\tilde{x}_1, x_2)) \leq \omega(d_1(x_1, \tilde{x}_1))$$

(potremmo definire questa proprietà dicendo che la funzione  $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$  è uniformemente continua, con costanti indipendenti dalla scelta di  $x_2$ ).

Si mostri allora che  $f$  è continua.

Si veda anche il punto 3 dell'esercizio 17.8.

### §13.c Funzioni Lipschitziane & Hölderiane

[2DR]

**Definizione 13.28.** Sia  $A \subset \mathbb{R}$ . Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **Lipschitziana** se esiste  $L > 0$  tale che  $\forall x, y \in A$ ,

[162]

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| .$$

Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **Hölderiana** se esistono  $L > 0$  e  $\alpha \in (0, 1]$  tale che  $\forall x, y \in A$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha .$$

La costante  $\alpha$  è detta l'ordine.

Come nel caso della "uniforme continuità", questa nozione si estende alle mappe fra spazi metrici.

#### Esercizi

E13.29 Prerequisiti: 13.15. Mostrate che le funzioni Lipschitziane, e le Hölderiane, sono uniformemente continue; che cosa si può dire del loro modulo di continuità? [163]

E13.30 Sia  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto. Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile. Si mostri che  $f'$  è limitata su  $I$  se e solo se  $f$  è Lipschitziana. [164]

E13.31 Sia  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo. Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che esiste  $\alpha > 1$  per cui  $\forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$  (cioè  $f$  è Hölderiana di ordine  $\alpha > 1$ ): si mostri che  $f$  è costante. [165]

E13.32 Sia data  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e una decomposizione di  $[a, b]$  in intervallini  $I_1 = [a, t_1], I_2 = [t_1, t_2], \dots, I_n = [t_{n-1}, b]$  tale che la restrizione di  $f$  su ciascun  $I_k$  è Lipschitziana di costante  $C$ . Si mostri che  $f$  è Lipschitziana di costante  $C$ . [166]

Similmente con le funzioni Hölderiane.

E13.33 Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Hölderiana con esponente  $\alpha \leq 1$ . Si mostri che  $f$  è Hölderiana con esponente  $\beta$  per ogni  $\beta < \alpha$ . [167]

Si noti che questo non è tecnicamente vero per  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

E13.34 Si costruisca  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua ma non Hölderiana. *Soluzione nascosta:* [169]  
[UNACCESSIBLE UUID '16B'] [UNACCESSIBLE UUID '16C']

E13.35 Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  lineare è Lipschitziana. [16D]

E13.36 Per ognuna delle seguenti funzioni, dire se è continua, uniformemente continua, Hölderiana (e con quale esponente), o Lipschitziana. [16F]

- $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(1/x)$ .
- $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{1/x}$ .
- $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x^2)/x$
- $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|^\beta$  con  $\beta > 0$ .
- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x^\beta)$  con  $\beta > 0$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '16H']

E13.37 Dato  $L \in (0, 1)$  se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa [16J]

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

allora esiste un unico “punto fisso” cioè un punto  $x$  per cui  $f(x) = x$ .

E13.38 Trovate una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che [16K]

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ma per cui non esiste un “punto fisso”, cioè un punto  $x$  per cui  $f(x) = x$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '16M']

### §13.d Funzioni discontinue [2DS]

Sia nel seguito  $(X, d)$  uno spazio metrico.

**Definizione 13.39.** Un insieme  $E$  si dice un  $F_G$  se è unione numerabile di chiusi. [2CX]  
(Si riveda l'esercizio 9.48).

#### Esercizi

E13.40 Notate che ogni insieme aperto  $A \subset X$  non vuoto è un  $F_G$ . (Sugg usate 9.69). [16N]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '16P']

E13.41 Prerequisiti: 12.13, 12.7. Data una generica  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , si mostri che l'insieme  $E$  [16Q]  
dei punti dove  $f$  è discontinua è un  $F_G$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '16R']

E13.42 Prerequisiti: 13.39. Difficoltà: \*. [16S]

Supponiamo che  $(X, d)$  ammetta un sottoinsieme  $D$  che è denso ma ha parte interna vuota. <sup>†95</sup>

Dato un  $E \subset X$  che è un  $F_G$ , si costruisca una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  per cui  $E$  è l'insieme dei punti di discontinuità.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '16T']

<sup>†93</sup>Notate che la famiglia su cui si calcola l'estremo superiore contiene sempre i casi  $x = y$ , dunque  $\omega(t) \geq 0$ .

<sup>†94</sup>Sappiamo da 11.10 e 9.40 che vi sono diverse possibili scelte di distanze, che però sono fra loro equivalenti.

<sup>†95</sup>Cioè, sia  $D$  che il complementare  $X \setminus D$  sono densi.  $X = \mathbb{R}$  soddisfa tale requisito, prendendo ad esempio  $D = \mathbb{Q}$ .

---

## §14 Funzioni e insiemi convessi

[16V]

Presenteremo ora alcuni risultati riguardo alla convessità. Per semplicità useremo  $\mathbb{R}^n$  come spazio ambiente, ma quasi tutti i risultati valgono in un qualunque spazio vettoriale.

### §14.a Insiemi convessi

[2F0]

**Definizione 14.1.** Dati  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ , dati  $t_1, \dots, t_k \geq 0$  con  $t_1 + \dots + t_k = 1$ , la somma

[16W]

$$x_1 t_1 + \dots + x_k t_k$$

è una combinazione convessa dei punti  $x_1, \dots, x_k$ .

**Nota 14.2.** Se  $k = 2$  allora la combinazione convessa si scrive usualmente come  $(tx + (1-t)y)$  con  $t \in [0, 1]$ ; l'insieme di tutti questi punti è il segmento che collega  $x$  a  $y$ .

[23P]

**Definizione 14.3.** Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme; si dice convesso se

[16X]

$$\forall t \in [0, 1], \forall x, y \in C, (tx + (1-t)y) \in C$$

cioè se il segmento che collega ogni  $x, y \in C$  è tutto compreso in  $C$ .

(Notiamo che  $\emptyset$  è un convesso, e che ogni sottospazio vettoriale o affine di  $\mathbb{R}^n$  è convesso).

Gli insiemi convessi godono di tantissime proprietà interessanti, questa che segue è solo una piccola lista.

### Topologia

#### Esercizi

E14.4 Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme; mostrate che è convesso se e solo se contiene ogni combinazione convessa dei suoi punti, cioè: per ogni  $k \geq 1$ , per ogni scelta di  $x_1, \dots, x_k \in C$ , per ogni scelta  $t_1, \dots, t_k \geq 0$  con  $t_1 + \dots + t_k = 1$ , si ha

[16Y]

$$x_1 t_1 + \dots + x_k t_k \in C \quad .$$

E14.5 Argomenti: *simpleso*.

[16Z]

Dati  $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ , sia

$$\left\{ \sum_{i=0}^k x_i t_i : \sum_{i=0}^k t_i = 1 \forall i, t_i \geq 0 \right\} \quad (14.6)$$

l'insieme di tutte le possibili combinazioni, provare che questo insieme è convesso.

Quando i vettori  $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0$  sono linearmente indipendenti, l'insieme sopra definito è un *simpleso* di dimensione  $k$ .

Si mostri che se  $n = k$  allora il simpleso ha parte interna non vuota e uguale a

$$\left\{ \sum_{i=0}^n x_i t_i : \sum_{i=0}^n t_i = 1 \forall i, t_i > 0 \right\} \quad (14.7)$$

E14.8 Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  convesso contenente almeno due punti, sia  $V$  il più piccolo spazio affine che contiene  $A$  (si mostri che questo concetto è ben definito); e, visto  $A$  come sottoinsieme di  $V$ , si mostri che  $A$  ha parte interna non vuota. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '171'] [170]

E14.9 Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  è convesso,  $x \in A^\circ$  e  $y \in A$  allora il segmento che li collega è contenuto in  $A^\circ$ , salvo eventualmente per l'estremo  $y$ , cioè  $\forall t \in (0, 1), tx + (1-t)y \in A^\circ$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '173'] [172]

E14.10 *Prerequisiti:* 14.9, 9.23. Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  è convesso,  $x \in A^\circ$  e  $z \in \partial A$  allora il segmento che li collega è contenuto in  $A^\circ$ , salvo eventualmente per l'estremo  $z$  (cioè  $\forall t \in (0, 1), tx + (1-t)z \in A^\circ$ ). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '175'] [174]

E14.11 Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  convesso, si mostri che, sia la sua apertura, quanto la sua chiusura, sono ancora convessi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '177'] [176]

E14.12 *Prerequisiti:* 9.47, 14.10. Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  convesso con parte interna nonvuota, si mostri che  $\overline{A} = \overline{(A^\circ)}$  (la chiusura della parte interna di  $A$ ). Trovate poi un semplice esempio di  $A$  per cui  $\overline{A} \neq \overline{(A^\circ)}$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '179'] [178]

E14.13 *Prerequisiti:* 7.13. *Difficoltà:* \*. Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  convesso, si mostri che  $A^\circ = (\overline{A})^\circ$  (la parte interna della chiusura di  $A$ ). [17B]

*Usando 14.18 si mostra facilmente che  $A^\circ \supseteq (\overline{A})^\circ$ ; solo che questo risultato fa comodo in una delle possibili dimostrazioni di 14.18 (!); una dimostrazione alternativa usa i semplici come intorni, cf 14.5. Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '170']

E14.14 Siano  $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$  insiemi convessi, per  $i \in I$ : dimostrate che [059]

$$\bigcap_{i \in I} C_i$$

è convesso.

**Definizione 14.15.** Sia dunque  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme non vuoto, l'**inviluppo convesso** di  $A$  l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono  $A$ . Per via di 14.14,  $\text{co}(A)$  è il più piccolo insieme convesso contenente  $A$ . [2G4]

Si vedano anche gli esercizi 11.55, 11.70 e 11.71.

### §14.a.a Proiezione, separazione

#### Esercizi

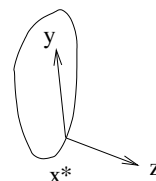
E14.16 *Argomenti:* proiezione. *Difficoltà:* \*. *Note:* Questo è il noto "teorema della proiezione", che vale per  $A$  convesso chiuso in uno spazio di Hilbert; se  $A \subset \mathbb{R}^n$  allora la dimostrazione è più semplice, e è un utile esercizio.. [17D]

Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  chiuso convesso nonvuoto e  $z \in \mathbb{R}^n$ , si mostri che esiste un unico punto di minimo  $x^*$  per il problema

$$\min_{x \in A} \|z - x\|.$$

Si mostri che  $x^*$  è il minimo se e solo se

$$\forall y \in A, \langle z - x^*, y - x^* \rangle \leq 0.$$



$x^*$  è chiamato “la proiezione di  $z$  su  $A$ ”.

(Notate che quest’ultima condizione dice semplicemente che l’angolo deve essere ottuso).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17G']

E14.17 Argomenti:separazione. Prerequisiti:14.16.

[17H]

Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  chiuso convesso non-vuoto e  $z \notin A$ , sia  $x^*$  definito come nell’esercizio precedente 14.16; definite  $\delta = \|z - x^*\|$ ,  $v = (z - x^*)/\delta$  e  $a = \langle v, x^* \rangle$ . Si dimostri che  $v, a$  e  $v, a + \delta$  definiscono due iperpiani paralleli che separano fortemente  $z$  da  $A$ , nel senso che  $\langle z, v \rangle = a + \delta$  ma  $\forall x \in A, \langle x, v \rangle \leq a$ .

E14.18 Argomenti:separazione. Difficoltà:\*

[17J]

Questo risultato vale in contesti molto generali, ed è una conseguenza del “teorema di Hahn–Banach” (che fa uso del Lemma di Zorn); se  $A \subset \mathbb{R}^n$  si può però dimostrare in modo elementare, vi invito a provarci.

Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  aperto convesso nonvuoto e  $z \notin A$ , si mostri che esiste un iperpiano  $P$  che separa  $z$  da  $A$ , nel senso che  $z \in P$  mentre  $A$  è contenuto in uno dei due semispazi chiusi che hanno  $P$  come bordo. Equivalentemente, in forma analitica, esistono  $a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$  tali che  $\langle z, v \rangle = a$  ma  $\forall x \in A, \langle x, v \rangle < a$ ; e

$$P = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v \rangle = a\}.$$

L’iperpiano  $P$  così definito è detto iperpiano di supporto di  $z$  per  $A$ .

Vi sono (almeno) due dimostrazioni possibili. Una possibile dimostrazione si fa per induzione su  $n$ ; potete assumere senza perdita di generalità che  $z = e_1 = (1, 0 \dots 0), 0 \in A, a = 1$ ; tenete presente che l’intersezione di un convesso aperto con  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$  è un convesso aperto in  $\mathbb{R}^{n-1}$ ; questa dimostrazione è complessa ma non usa nessun prerequisito. Una seconda dimostrazione usa 14.11 e 14.17 se  $z \notin \partial A$ ; se  $z \in \partial A$  usa anche 14.12 per trovare  $(z_n) \subset (A^c)^\circ$  con  $z_n \rightarrow z$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17K']

E14.19 Prerequisiti:14.18,11.51. Se  $A, B$  sono convessi disgiunti, con  $A$  aperto, mostrate che esiste un iperpiano che separa  $A$  e  $B$ , cioè esistono  $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$  e  $c \in \mathbb{R}$  tale che

[17M]

$$\forall x \in A, \langle x, v \rangle < c \text{ ma } \forall y \in B, \langle y, v \rangle \geq c; \quad (14.20)$$

mostrate inoltre che se anche  $B$  è aperto, allora si può avere separazione stretta (cioè disuguaglianza stretta nell’ultimo termine in (14.20)).

(Suggerimento: dati  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  convessi nonvuoti, si mostri che

$$A - B \stackrel{\text{def}}{=} \{x - y, x \in A, y \in B\}$$

è convesso; si mostri che se  $A$  è aperto allora  $A - B$  è aperto, come in 11.51.)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17N']

- E14.21 Trovate un esempio di  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  convessi aperti con  $\overline{A}, \overline{B}$  disgiunti, e tali che vi è un unico iperpiano che li separa (cioè una “unica” scelta di  $v, c$  che soddisfa (14.20); “unica”, a meno di moltiplicare  $v, c$  per una stessa costante positiva). [17P]  
*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '17Q']
- E14.22 Prerequisiti: 14.18. Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  è convesso,  $x \in A^\circ$  e  $y \in \partial A$ , allora la retta che li collega, proseguendo oltre  $y$ , rimane fuori da  $\overline{A}$  (cioè  $\forall t > 1, ty + (1-t)x \notin \overline{A}$ ). [17R]  
*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '17S']
- E14.23 Argomenti: separazione, supporto. Prerequisiti: 14.8, 14.18, 14.13. [17T]  
 Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  convesso nonvuoto e  $z \in \partial A$ , si dimostri che esistono  $v \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$  tali che  $\langle z, v \rangle = a$  e  $\forall x \in A, \langle x, v \rangle \leq a$ . L'iperpiano così definito è detto *iperpiano di supporto* di  $z$  per  $A$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '17V']
- E14.24 Difficoltà: \*. Dato un insieme  $A \subset \mathbb{R}^2$  convesso limitato aperto nonvuoto, mostrate che  $\partial A$  è sostegno di un arco semplice chiuso (e anche Lipschitz). [17W]  
*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '17X']

### §14.b Funzione convessa

**Definizione 14.25.** Sia  $C \subset \mathbb{R}^n$  un convesso, e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.  $f$  si dice convessa se [17Y]

$$\forall t \in [0, 1], \forall x, y \in C, f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) .$$

$f$  si dice strettamente convessa se inoltre

$$\forall t \in (0, 1), \forall x, y \in C, x \neq y, f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) .$$

**Definizione 14.26.**  $f$  si dice (strettamente) concava se  $-f$  è (strettamente) convessa. [17Z]

Le funzioni convesse godono di tantissime proprietà interessanti, questa che segue è solo una piccola lista.

#### ...definizioni equivalenti

##### Esercizi

E14.27 Sia  $C \subset \mathbb{R}^n$  un convesso. Sia  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  convessa; siano  $x_1, \dots, x_n \in C$  e  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$  tali che  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ . Si mostri che [180]

$$\sum_{i=1}^n t_i x_i \in C$$

e

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) .$$

E14.28 Sia  $C \subset \mathbb{R}^n$  un convesso. Sia  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ , si mostri che è convessa, se e solo se l'epigrafico [181]

$$\{(x, y) \mid x \in C, f(x) \leq y\}$$

è un sottoinsieme convesso di  $C \times \mathbb{R}$ .

### Proprietà

Questa che segue è una lista di proprietà per funzioni convesse  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  con  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ovviamente queste proprietà valgono anche quando  $n = 1$ ; ma quando  $n = 1$  le dimostrazioni sono in genere più facili, si veda la sezione successiva.

### Esercizi

E14.29 Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un convesso, e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa. Dato  $l \in \mathbb{R}$ , si definisca l'insieme di sottolivello come [182]

$$L_l = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq l\} .$$

Mostrate che  $L_l$  è un insieme convesso (possibilmente vuoto). Deducete che i punti di minimo di  $f$  sono un insieme convesso (possibilmente vuoto). Mostrate che se  $f$  è strettamente convessa vi può essere al più un punto di minimo.

E14.30 Sia  $C \subset \mathbb{R}^n$  un convesso; siano  $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$  convesse, dove  $i \in I$  (una famiglia non vuota, e arbitraria, di indici), e definiamo  $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ , dove supponiamo (per semplicità) che  $f(x) < \infty$  per ogni  $i$ : si mostri che  $f$  è convessa. [183]

E14.31 Prerequisiti: 14.28, 14.23. Difficoltà: \*. Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un convesso, sia  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa, sia fissato  $z \in C^\circ$ : si mostri che esiste  $v \in \mathbb{R}^n$  tale che [184]

$$\forall x \in C, f(x) \geq f(z) + \langle v, x - z \rangle . \quad (14.32)$$

Il piano così definito è detto *piano di supporto* per  $f$  in  $z$ . Note: È preferibile non assumere che  $f$  sia continua nel dimostrare questo risultato, in quanto questo risultato si usa in genere per dimostrare che  $f$  è continua. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '185']

E14.33 Prerequisiti: 11.12, 11.10, 14.31. Difficoltà: \*. [186]

Sia  $C \subset \mathbb{R}^n$  un convesso aperto, e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa, si mostri che  $f$  è continua.

Note: Nel caso di dimensione  $n = 1$ , la dimostrazione è molto più facile, si veda 14.41.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '187']

E14.34 Argomenti: sottodifferenziale. Prerequisiti: 14.31. Difficoltà: \*. [188]

Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un convesso aperto, e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa; dato  $z \in C$ , si definisce il *sottodifferenziale*  $\partial f(z)$  come l'insieme dei  $v$  per cui la relazione (14.32) vale (cioè,  $\partial f(z)$  contiene i vettori  $v$  usati per definire i piani di supporto a  $f$  in  $z$ ).

$\partial f(z)$  gode di interessanti proprietà.

- $\partial f(z)$  è localmente limitato: se  $z \in C$  e  $r > 0$  è tale che  $B(z, 2r) \subset C$  allora esiste  $L > 0$  tale che  $\forall y \in B(z, r), \forall v \in \partial f(y)$  si ha  $|v| \leq L$ . In particolare, per ogni  $z \in C$  si ha che  $\partial f(z)$  è un insieme limitato.
- Mostrate che  $\partial f$  è *continua superiormente* in questo senso: se  $z \in C$  e  $(z_n)_n \subset C$  e  $v_n \in \partial f(z_n)$  e se  $z_n \rightarrow_n z$  e  $v_n \rightarrow_n v$  allora  $v \in \partial f(z)$ . In particolare, per ogni  $z \in C$ ,  $\partial f(z)$  è un insieme chiuso.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '189']

E14.35 Argomenti: minimi. Prerequisiti: 14.34. Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un convesso, e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa. Mostrate che  $z \in C^\circ$  è un minimo se e solo se  $0 \in \partial f(z)$ . [18B]



E14.36 Prerequisiti: 14.31, 14.34. Note: Un viceversa del 14.30. [18C]

Sia  $C \subset \mathbb{R}^n$  un convesso aperto; sia  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  convessa; esistono successioni  $(a_h)_h \subseteq \mathbb{R}, (v_h)_h \in \mathbb{R}^n$  per  $h \in \mathbb{N}$ , tali che  $f(x) = \sup_{h \in \mathbb{N}} (a_h + v_h \cdot x)$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '18D']

### §14.c Caso reale

Sia  $I \subset \mathbb{R}$ , allora  $I$  è convesso se e solo è un intervallo (si veda 9.80). Nel seguito considereremo  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $I = (a, b)$  è un intervallo aperto.

#### Esercizi

E14.37 Si mostri che  $f(x)$  è convessa se e solo se la mappa  $R(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$  è [18F]  
monotona debolmente crescente in  $x$ .<sup>†96</sup> Inoltre  $f$  è strettamente convessa se e solo se  $R$  è strettamente crescente. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '18G']

E14.38 Si mostri che per una funzione convessa  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  vi sono solo tre [18H]  
possibilità:

- $f$  è strettamente crescente
- $f$  è strettamente decrescente
- vi sono due valori  $l_- \leq l_+$  tale che  $f$  è strettamente crescente in  $[l_+, b)$ ,  $f$  è strettamente decrescente in  $(a, l_-]$ , e l'intervallo  $[l_-, l_+]$  sono tutti i punti di minimo di  $f$ ;

se inoltre  $f$  è strettamente convessa allora vi è al più un solo punto di minimo.

E14.39 Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  convessa. Si mostri che per ogni intervallo chiuso  $I \subset (a, b)$  [18J]  
esiste una costante  $C$  tale che  $f|_I$  risulta Lipschitziana con costante  $C$ . Si mostri un esempio di funzione continua e convessa definita su un intervallo chiuso che non è Lipschitziana.

E14.40 Si mostri che una funzione continua  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa se e soltanto [18K]  
se per ogni  $u, v \in (a, b)$  si ha

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{f(u)+f(v)}{2} .$$

#### §14.c.a Convessità e derivate

##### Esercizi

E14.41 Prerequisiti: 14.37. Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  convessa. [18M]

1. Si mostri che in ogni punto esistono la derivata destra  $d^+(x)$  e sinistra  $d^-(x)$  (In particolare  $f$  è continua).
2. Si mostri che  $d^-(x) \leq d^+(x)$ ,
3. mentre per  $x < y$  si ha  $d^+(x) \leq R(x, y) \leq d^-(y)$ .
4. Si deduca che  $d^+(x)$  e  $d^-(x)$  sono monotone debolmente crescenti.

<sup>†96</sup>Si noti che  $R(x, y)$  è simmetrica.

5. Si mostri che  $d^+(x)$  è continua a destra, mentre  $d^-(x)$  è continua a sinistra.
6. Inoltre si mostri che  $\lim_{s \rightarrow x^-} d^+(s) = d^-(x)$ , mentre  $\lim_{s \rightarrow x^+} d^-(s) = d^+(x)$ .  
In particolare  $d^+$  è continua in  $x$  se e solo se  $d^-$  è continua in  $x$  se e solo se  $d^-(x) = d^+(x)$ .  
Dunque  $d^+, d^-$  sono, per così dire, la stessa funzione monotona, solo che nei punti di discontinuità  $d^+$  assume il valore dei limiti destri mentre  $d^-$  il valore dei limiti sinistri.
7. Usate il precedente per mostrare che  $f$  è derivabile in  $x$  se e solo se  $d^+$  è continua in  $x$ , se e solo se  $d^-$  è continua in  $x$ .
8. Si mostri dunque che  $f$  è derivabile salvo che in un numero al più numerabile di punti.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '18N']

E14.42 Prerequisiti: 14.37. Se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile, allora  $f$  è convessa se e solo se  $f'$  è debolmente crescente. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '18Q'] [18P]

E14.43 Prerequisiti: 14.37, 14.42. Se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile, allora  $f$  è strettamente convessa se e solo se  $f'$  è strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '18S'] [18R]

E14.44 Prerequisiti: 14.37, 14.42. Se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile due volte, allora  $f$  è convessa se e solo se  $f'' \geq 0$  in ogni punto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '18V'] [18T]

E14.45 Prerequisiti: 14.44. [18W]

Sia  $J \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto non vuoto, e  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile due volte e convessa. Si mostri che i seguenti fatti sono equivalenti:

1.  $f$  è strettamente convessa,
2. l'insieme  $\{x \in J : f''(x) = 0\}$  ha parte interna vuota,
3.  $f'$  è monotona strettamente crescente.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '18X']

Si veda anche l'esercizio 15.13 per il rapporto fra integrale e convessità.

### §14.c.b Funzioni convesse a valori estesi

Consideriamo funzioni convesse che possono anche assumere valore  $+\infty$ . Sia  $I$  un intervallo.

#### Esercizi

E14.46 Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  convessa, si mostri che  $J = \{x \in I : f(x) < \infty\}$  è un intervallo. [18Y]

E14.47 Note: un altro viceversa del 14.30. [18Z]

Fissato  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo e data  $f : I \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  convessa e semicontinua inferiore, esistono successioni  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  tali che  $f(x) = \sup_n (a_n + b_n x)$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '190']

### §14.d Ulteriori proprietà e esercizi

#### Esercizi

E14.48 Sia  $C \subset \mathbb{R}^n$  un convesso,  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa e monotona debolmente crescente: si provi che  $f \circ g$  è convessa. [191]

E14.49 Sia  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  concava, tale che  $f(0) = 0$  e  $f$  continua in zero. [192]

- Si provi che  $f$  è *subadditiva*, cioè

$$f(t) + f(s) \geq f(t + s)$$

per ogni  $t, s \geq 0$ . Se inoltre  $f$  è strettamente concava e  $t > 0$  allora

$$f(t) + f(s) > f(t + s).$$

- Si provi che se  $\forall x, f(x) \geq 0$  allora  $f$  è debolmente crescente.
- Il viceversa? Trovate un esempio di  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  con  $f(0) = 0$ , continua, monotona crescente e subadditiva, ma non concava.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '193']

E14.50 Si mostri la disuguaglianza di Young: dati  $a, b > 0$ ,  $p, q > 1$  tali che  $1/p + 1/q = 1$  allora [194]

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (14.51)$$

con uguaglianza se e solo se  $a^p = b^q$ ; usando la concavità del logaritmo.

Si veda anche 23.16. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '195']

E14.52 Sia  $\alpha \in (0, 1)$ , si mostri che  $x^\alpha$  è  $\alpha$ -Hölderiana (possibilmente usando i risultati precedenti). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '197'] [196]

Si veda anche l'esercizio 15.29.

#### §14.d.a Funzione distanza

##### Esercizi

E14.53 Argomenti: funzione distanza, insiemi convessi. Prerequisiti: 9.69, 14.55. Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  chiuso nonvuoto, sia  $d_A$  la *funzione distanza* definita nell'esercizio 9.69, cioè  $d_A(x) = \inf_{y \in A} |x - y|$ . Si mostri che  $A$  è un insieme convesso se e solo se  $d_A$  è una funzione convessa. [198]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '199']

E14.54 Argomenti: funzione distanza, insiemi convessi. Prerequisiti: 9.69, 14.16. [19B]

Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  convesso chiuso, si definisce la *funzione distanza*  $d_A(x)$  come sopra in 9.69; sia  $z \notin A$  e  $x^*$  la proiezione di  $z$  su  $A$  (cioè il punto di minima distanza nella definizione di  $d_A(z)$ ); posto  $v = (z - x^*)/|z - x^*|$  si mostri che  $v \in \partial f(z)$ ; dove  $\partial f$  è il *sottodifferenziale* definito in 14.34.

**§14.d.b Funzioni e insiemi strettamente convessi**

**Esercizi**

E14.55 Sia  $C \subset \mathbb{R}^n$  un convesso,  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa e  $r \in \mathbb{R}$ : allora  $\{x \in C, f(x) < r\}$  e  $\{x \in C, f(x) \leq r\}$  sono insiemi convessi (eventualmente vuoti). [19C]

**Nota 14.56.** È vero anche il viceversa: dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  un convesso chiuso, esiste sempre una funzione convessa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $A = \{x : f(x) \leq 0\}$ : ad esempio si può usare  $f = d_A$ , come visto in 14.54 nella sezione precedente. [23N]

Ci si chiede ora, cosa accade se  $f$  è strettamente convessa?

**Definizione 14.57.** Un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  convesso chiuso è detto **strettamente convesso** se, per ogni  $x, y \in A$  con  $x \neq y$  e ogni  $t \in (0, 1)$  si ha [19D]

$$(tx + (1 - t)y) \in A^\circ \quad .$$

(Notate che un insieme strettamente convesso necessariamente ha parte interna non vuota).

**Nota 14.58.** Dagli esercizi 14.9 e 14.10 segue che se  $x \in A^\circ$  o  $y \in A^\circ$  allora  $(tx + (1 - t)y) \in A^\circ$ : dunque la definizione è “interessante” quando  $x, y \in \partial A$ . [19F]

**Esercizi**

E14.59 Prerequisiti: 14.33. Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione strettamente convessa e  $r \in \mathbb{R}$  allora  $A = \{x, f(x) \leq r\}$  è un insieme chiuso e strettamente convesso (eventualmente vuoto). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '19H'] [19G]

## §15 Integrale di Riemann

[19K]

La teoria necessaria per lo svolgimento dei successivi esercizi si può trovare nel Cap. 1 in [5] o Cap. 6 in [23].

### Esercizi

E15.1 Sia  $p$  un polinomio (con coefficienti complessi); sia  $\theta \in \mathbb{C}, \theta \neq 0$ . Definiamo  $f(x) = -\int_0^x e^{-\theta t} p(t) dt$ . Si mostri che  $f(x) = e^{-\theta x} q(x) - q(0)$  dove  $q$  è un polinomio che ha lo stesso grado di  $p$ . Si determini la mappa lineare (cioè la matrice) che trasforma i coefficienti di  $p$  nei coefficienti di  $q$ ; e la sua inversa. [19M]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '19N'] [UNACCESSIBLE UUID '19P']

E15.2 *Note:* Simile al punto 8 dall'esercizio 17.8. Supponiamo che  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  siano Riemann integrabili, e sia inoltre  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . [19Q]

Trovate un esempio in cui  $f_n \rightarrow_n f$  puntualmente,  $f$  è limitata, ma  $f$  non è Riemann integrabile.

Mostrate che, se la convergenza è uniforme, allora  $f$  è Riemann integrabile e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx \quad .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '19R']

E15.3 *Prerequisiti:* 15.2, 17.4. [19S]

Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo con estremi  $a, b$ ; siano  $f, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue non negative tali che  $f_n(x) \nearrow_n f$  puntualmente (cioè per ogni  $x$  e  $n$  si ha  $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  e  $\lim_n f_n(x) = f(x)$ ); si mostri allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad .$$

(Nota se l'intervallo è aperto o semiaperto o illimitato allora gli integrali di Riemann si intendono in senso generalizzato; in questo caso il membro destro può anche valere  $+\infty$ ). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '19T']

Il precedente risultato prende il nome di *Teorema di Convergenza Monotona* e vale in ipotesi molto generali; nel caso di integrali di Riemann si può però vedere come conseguenza dei risultati 15.2 e 17.4.

E15.4 Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann integrabile e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, mostrate che  $g \circ f$  è Riemann integrabile. [19V]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '19W']

E15.5 Dire quali di queste funzioni  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sono Riemann integrabili: [19Y]

1. la funzione caratteristica dell'insieme di Cantor.
2.  $f(0) = 0, f(x) = \sin(1/x)$
3.  $f(0) = 0$  e

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2 + |\sin(1/x)|}$$

4.  $f(x) = 0$  se  $x$  è irrazionale,  $f(x) = \cos(1/m)$  se  $x = n/m$  con  $n, m$  primi fra loro.
5.  $f(x) = 0$  se  $x$  è irrazionale,  $f(x) = \sin(1/m)$  se  $x = n/m$  con  $n, m$  primi fra loro.

E15.6 Prerequisiti:teorema fondamentale del calcolo integrale. [1B0]

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ , mostrate che

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s) ds .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1B2'] Notate che per questo risultato non è necessario ipotizzare che  $g$  sia monotona.

E15.7 Prerequisiti:funzioni regolate Sez. §12.b. [1B3]

Si mostri che una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  regolata è Riemann integrabile.

E15.8 Prerequisiti:funzioni regolate Sez. §12.b. [1B4]

Si trovi una funzione Riemann integrabile  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  che non è regolata.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1B5']

E15.9 Difficoltà:\*. Vi può essere una funzione Riemann integrabile  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  che [1B6]

non è regolata (cioè, non ammette limiti destri e sinistri) in nessun punto? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1B7']

E15.10 Se  $f, g : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$  sono Riemann integrabili, allora  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  [1B8]

è Riemann integrabile.

E15.11 Si trovi una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  semicontinua inferiore, limitata, ma non [1B9]

Riemann integrabile.

E15.12 Definiamo la funzione Beta come [1BC]

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt .$$

1. Mostrate che l'integrale esiste (finito) se e solo se  $x, y > 0$ .
2. Notate che  $B(x, y) = B(y, x)$
3. Mettete in relazione  $B(n, m)$  con  $B(n-1, m+1)$ . Calcolate dunque il valore di  $B(n, m)$  per  $n, m$  naturali positivi.
4. Usate il risultato ottenuto per calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t)^9 \cos(t)^7 dt .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1BD']

E15.13 Prerequisiti:funzioni convesse.Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo aperto, e  $x_0 \in I$ . Si [1BF]

dimostri che questi due fatti sono equivalenti:

1.  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa.
2. Esiste  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotona (debolmente) crescente, e tale che  $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(s) \, ds$ ,

e si verifichi che si può scegliere  $f$  essere la derivata destra (o sinistra) di  $F$ .

E15.14 Si esibisca una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile tale che la derivata della funzione  $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$  non è  $f$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1BH'] [1BG]

E15.15 Si calcolino esplicitamente <sup>†97</sup> formule primitive per [1BJ]

$$\frac{1}{\sin(x)^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{1}{2+\sin(x)}.$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1BK']

E15.16 Definiamo la funzione Gamma  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  come [1BM]

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

- Mostrate che  $\Gamma(x)$  è ben definita per  $x > 0$  reale.
- Mostrate che  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  e deducete che  $\Gamma(n+1) = n!$  per  $n \in \mathbb{N}$ .
- Mostrate che  $\Gamma(x)$  è analitica.

(Potete dare per buono che le derivate di  $\Gamma$  sono  $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\log t)^n t^{x-1} e^{-t} \, dt$ ; si ottengono per derivazione sotto segno di integrale.)

E15.17 Calcolate [1BN]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n}$$

vedendolo come una somma approssimante di un integrale di Riemann.

E15.18 *Prerequisiti:* 16.46. Sia  $a \in \mathbb{R}$ , sia  $I$  intervallo aperto con  $a \in I$ , sia  $\varphi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua. [1BP]

Definiamo ricorsivamente  $\varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  per  $n \geq 1$  tramite  $\varphi_n(x) = \int_a^x \varphi_{n-1}(t) \, dt$ ; si mostri che

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n \varphi_0(t) \, dt \quad (15.19)$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1BQ']

E15.20 *Prerequisiti:* 15.18. *Note:* Si veda anche in Apostol [4]. [1BR]

Sia  $a \in \mathbb{R}$ , sia  $I$  intervallo aperto con  $a \in I$ ; supponendo che  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sia di classe  $C^{n+1}$ , mostrate la **formula di Taylor con resto integrale**

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt.$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1BS']

E15.21 Prerequisiti: 14.37, 15.13. Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo aperto. Sia  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato e contenuto in  $I$ . Presi  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x \neq y$ , sia [1BT]

$$R(x, y) = \frac{1}{y-x} \int_x^y g(s) \, ds$$

(con la usuale convenzione che  $\int_x^y g(s) \, ds = -\int_y^x g(s) \, ds$ , in modo che  $R(x, y) = R(y, x)$ ). Se  $g$  è monotona, si mostri che  $R(x, y)$  è monotona in ciascuna variabile. Se  $g$  è continua e  $R(x, y)$  è monotona in ciascuna variabile, si mostri che  $g$  è monotona.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1BV']

E15.22 Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che [1BW]

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = 0$$

per ogni  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua: mostrate allora che  $f \equiv 0$ .

E15.23 Torniamo all'esercizio 6.54: eseguendo formalmente il prodotto di Cauchy della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$  con se stessa, si ottiene la serie  $\sum_n (-1)^n c_n$  con  $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ ; mostrate che  $c_n \rightarrow \pi$ . [1BX]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1BY']

E15.24 Difficoltà:\*. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e limitata, mostrate che [1BZ]

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x^2 + y^2} \, dx = f(0)$$

(Sugg. si cominci dal caso  $f$  costante.)

E15.25 Siano  $n, m \geq 1$  interi, e definiamo [1C0]

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^n (\log x)^m \, dx \quad ;$$

ponete in relazione  $I_{n,m}$  con  $I_{n,m-1}$ ; usate la relazione per calcolare esplicitamente

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n \, dx .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1C1']

E15.26 Prerequisiti: 15.25. Difficoltà:\*\*. Mostrate le identità [1C2]

$$\int_0^1 x^{-x} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \quad (= \sim 1.291285997 \dots) \quad (15.27)$$

$$\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-n} \quad (= \sim 0.783430510712 \dots) \quad (15.28)$$

(Sugg.: usate lo sviluppo in serie di potenze di  $e^z$  e ponete  $z = x \log(x)$ ; usate l'esercizio 15.25 precedente.)



E15.29 Difficoltà:\*. Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann integrabile e  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convessa: [1C3]  
mostrate che

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x) \, dx\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(x)) \, dx \quad . \quad (15.30)$$

Questo risultato è noto come **diseguaglianza di Jensen**.

E15.31 Difficoltà:\*. Supponiamo che  $f : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$  sia continua e decrescente e [1C4]  
 $\int_0^1 f(t) \, dt < \infty$  allora  $\lim_{r \rightarrow 0} r f(r) = 0$ .

E15.32 Difficoltà:\*. Sia  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ . Siano  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Si ha che [2GT]

$$\begin{aligned} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \cdots \int_0^{a_n} \cos(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n = \\ = 2^n \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{2}\right) \prod_{i=1}^n \sin\left(\frac{a_i}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \cdots \int_0^{a_n} \sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n = \\ = 2^n \sin\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{2}\right) \prod_{i=1}^n \sin\left(\frac{a_i}{2}\right) \end{aligned}$$

Altri esercizi riguardo all'integrazione secondo Riemann si trovano in [13.8](#), [16.45](#), [17.8](#) (parte 8).

<sup>197</sup>Tratto dal libro di Giaquinta e Modica [9], pag. 162 e seguenti.

---

## §16 Funzioni derivabili

[1C5]

**Definizione 16.1.** Sia nel seguito  $A \subseteq \mathbb{R}$  un aperto.

[2D0]

Dicendo che  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile intenderemo derivabile in ogni punto.

Ricordiamo che, dato  $k \geq 1$  intero,  $f$  è di classe  $C^k$  se  $f$  è derivabile  $k$ -volte e la derivata  $f^{(k)}$  è continua; e  $f$  è di classe  $C^\infty$  se  $f$  è derivabile infinite volte. (Alle volte scriveremo  $f \in C^k$  per indicare che  $f$  è di classe  $C^k$ , e  $f \in C^\infty$  se è di classe  $C^\infty$ ).

Per poter risolvere i seguenti esercizi potrebbe essere necessario conoscere alcuni risultati fondamentali in Analisi e Calcolo Differenziale, che si possono per esempio trovare in [23, 5]; specificatamente:

- il teorema di Lagrange<sup>†98</sup>: Teorema 5.10 in [23], o [65].
- la regola di De l'Hôpital, e i suoi corollari: Teorema 5.13 in [23], Sez. 7.12 in [5] o [25, 64];
- il Teorema di Taylor, e le diverse forme dei resti: Teorema 5.15 in [23], Cap. 7 in [5] o [66].

### Esercizi

E16.2 Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto. Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile, e  $x, y \in I$  con  $x < y$ . Mostrare che se  $f'(x) \cdot f'(y) < 0$  allora esiste  $\xi \in I$  con  $x < \xi < y$  tale che  $f'(\xi) = 0$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1C7']

[1C6]

E16.3 Prerequisiti:16.2.Note:Proprietà di Darboux.

[1C8]

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un aperto, e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile; vogliamo mostrare che per ogni intervallo  $I \subset A$  l'immagine  $f'(I)$  è un intervallo.

Mostrate dunque questo risultato. Per ogni  $x, y \in I$  con  $x < y$ , poniamo  $a = f'(x)$ ,  $b = f'(y)$ ; assumiamo per semplicità che  $a < b$ ; sia poi  $c$  con  $a < c < b$ : allora esiste  $\xi \in I$  con  $x < \xi < y$  tale che  $f'(\xi) = c$ .

(Mostrate infine che questa proprietà effettivamente implica che l'immagine  $f'(I)$  di un intervallo  $I$  è un intervallo).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1C9']

E16.4 Prerequisiti:16.3.

[1CB]

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto. Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile e tale che  $f'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ : mostrate allora che  $f'(t)$  ha sempre lo stesso segno.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1CC']

E16.5 Prerequisiti:16.3.Difficoltà:\*

[1CD]

Si trovi una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  limitata che mappa intervalli in intervalli, ma per cui non esiste  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in ogni punto e con  $f = g'$ .

(Notate che  $f$  non può essere continua, per via del Teorema Fondamentale del Calcolo).

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1CF']

E16.6 Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile, con  $f' = f$ : si mostri in maniera elementare che esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(x) = \lambda e^x$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1CH'] [1CG]

E16.7 Si trovi una  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile la cui derivata sia limitata ma non sia continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1CK'] [1CJ]

E16.8 Si trovi una  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e derivabile<sup>†99</sup> la cui derivata sia illimitata. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1CN'] [1CM]

E16.9 Difficoltà:\* Si trovi una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile e tale che l'immagine di  $[0, 1]$  secondo  $f'$  è  $f'([0, 1]) = (-1, 1)$ . [1CP]

Prima di cercare l'esempio, fate questa riflessione. Ricordiamo la proprietà di Darboux 16.3: l'immagine di un intervallo  $I$  secondo  $f'$  è un intervallo  $f'(I)$ ; questa non dice però che l'immagine di  $f'([0, 1])$  debba essere un intervallo chiuso e limitato. Se però si sapesse inoltre che  $f'$  è continua, cosa potreste dire di  $f'([0, 1])$ ? Cosa ne deducete a priori dunque sull'esempio cercato?

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1CQ']

E16.10 Sia  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervallo aperto. Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile: mostrare che  $f'$  è continua se e solo se per ogni  $x$  [1CV]

$$f'(x) = \lim_{(s,t) \rightarrow (x,x), s \neq t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1CW']

E16.11 Sia  $f$  derivabile in  $(a, b)$  sia  $x_0 \in (a, b)$  e  $x_0 < \alpha_n < \beta_n, \beta_n \rightarrow x_0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Si mostri che se la successione  $\frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}$  è limitata allora [1CX]

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \rightarrow_n f'(x_0)$$

Si mostri con un esempio che tale conclusione è falsa se la condizione data non è verificata.

E16.12 Si supponga che una data funzione  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sia derivabile in ogni punto di  $(a, b)$  tranne che in  $x_0$ , e che esista finito il limite  $\lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$ . Si mostri che  $f$  è derivabile anche in  $x_0$  e che  $f(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$ . [1CZ]

E16.13 Prerequisiti: 9.96. Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili in ogni punto. Si mostri che  $\max\{f, g\}$  è derivabile salvo su un insieme al più numerabile. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1D2'] [UNACCESSIBLE UUID '1D3'] [1D1]

E16.14 Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile e tale che se  $f(t) = 0$  allora  $f'(t) = 0$ . Mostrare che la funzione  $g(t) = |f(t)|$  è derivabile. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1D6'] [1D4]

E16.15 Sia  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  un polinomio con tutte radici reali e coefficienti tutti non nulli. Si mostri che il numero di radici positive (contate [1D7]

<sup>†98</sup>Anche noto come *Teorema del valor medio* o *Teorema dell'incremento finito*.

<sup>†99</sup>Si intende: la derivata  $f'(x)$  esiste ed è finita per ogni  $x \in [-1, 1]$ ; agli estremi  $x = -1, 1$  si calcolano solo le derivate destra e rispettivamente sinistra.

con molteplicità) è uguale al numero di cambiamenti di segno nella successione dei coefficienti di  $p$ . (Sugg. si ragioni per induzione su  $n$ , utilizzando il fatto che tra due radici consecutive di  $p$  esiste una radice di  $p'$ .) Questo risultato è noto come *Criterio di Cartesio*.

E16.16 Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e derivabile, e  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Mostrare che se  $f'(a) = f'(b)$  allora esiste  $\xi$  con  $a < \xi < b$  tale che [1D9]

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

## §16.a Derivate successive [2D1]

### Esercizi

E16.17 Sia  $I$  un intervallo aperto e  $x_0 \in I$ , sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $I$  e tale che esista la derivata seconda  $f''$  in  $x_0$ : allora si mostri che esiste il limite [1DD]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)}{t^2}$$

e che coincide con  $f''(x_0)$ .

Si trovi poi un semplice esempio di  $f$  derivabile in  $(-1, 1)$  e tale che non esista la derivata seconda  $f''$  in  $x_0 = 0$ , ma esista il precedente limite.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DF']

E16.18 5 Sia  $n \geq 1$  intero. Sia  $I$  un intervallo aperto e  $x_0 \in I$ , siano  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni derivabili  $n - 1$  volte nell'intervallo e la cui derivata  $(n - 1)$ -esima è derivabile in  $x_0$ . [1DG]

Si mostri allora che il prodotto  $fg$  è derivabile  $n - 1$  volte nell'intervallo e la sua derivata  $(n - 1)$ -esima è derivabile in  $x_0$ . Si scriva una formula esplicita per la derivata  $n$ -esima  $(fg)^{(n)}$  in  $x_0$  del prodotto delle due funzioni, (formula che impieghi le derivate della sola  $f$  e della sola  $g$ ).

(Se non la trovate, guardate in Wikipedia la Regola di Leibniz [63]).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DH']

E16.19 Difficoltà:\*. Sia  $n \geq 1$  intero. Siano  $I, J$  intervalli aperti con  $x_0 \in I, y_0 \in J$ . Siano poi date  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $g(I) \subseteq J$ ,  $f, g$  sono derivabili  $n - 1$  volte nei rispettivi intervalli, la loro derivata  $(n - 1)$ -esima è derivabile in  $x_0$  (risp.  $y_0$ ) e infine  $g(x_0) = y_0$ . [1DJ]

Si mostri che la funzione composta  $f \circ g$  è derivabile  $n - 1$  volte nell'intervallo e la sua derivata  $(n - 1)$ -esima è derivabile in  $x_0$ .

Si scriva una formula esplicita per la derivata  $n$ -esima  $(f \circ g)^{(n)}$  in  $x_0$  della composizione delle due funzioni, (formula che impieghi le derivate della sola  $f$  e della sola  $g$ ).

(Se non la trovate, leggete la pagina wikipedia (in Inglese) [56]; oppure, vedete questa presentazione: <https://drive.google.com/drive/folders/1746bdJ89ZyuciaEqvIMlGZ7kKHVekhb>).



Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DK']

E16.20 Prerequisiti: 16.19, 2.326. Si mostri che la funzione [1DM]

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (16.21)$$

è di classe  $C^\infty$ , e per  $x > 0$  si ha

$$\varphi^{(n)}(x) = e^{-1/x} \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} \frac{n! (-1)^{m+n}}{m! x^{m+n}},$$

$$\binom{n-1}{m-1} = \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!}.$$

mentre  $\varphi^{(n)}(x) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}, x \leq 0$ .

Procedete similmente per

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (16.22)$$

anche in questo caso  $\psi \in C^\infty$  e  $\psi^{(n)}(0) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ; ma in questo caso  $\psi(x) = 0 \iff x = 0$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DN'] [UNACCESSIBLE UUID '1DP'] [UNACCESSIBLE UUID '1DQ']

E16.23 Sia dato  $N$  intero positivo. Si trovi un esempio di funzione  $C^\infty$  con  $\varphi(x) = 0$  per  $x < 0$  mentre  $\varphi^{(n)}(x) > 0$  per  $0 \leq n \leq N$  e  $x > 0$ . [1DR]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DS'] Notiamo però che non si può richiedere che tutte le derivate siano positive, a causa dell'esercizio 19.2.

E16.24 Cosa si può mettere al posto di "???" in modo che la funzione [1DT]

$$g(x) = \begin{cases} ??? & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{se } x \geq 1, \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

sia di classe  $C^\infty$ ?

Più in generale, come si possono raccordare due funzioni  $C^\infty$  in modo da ottenere una funzione  $C^\infty$ ? Date  $f_0, f_1 \in C^\infty$  mostrate <sup>†100</sup> che esiste una funzione  $f \in C^\infty$  che soddisfa

$$f(x) = f_0(x) \quad \text{se } x \leq 0, \\ f(x) = f_1(x) \quad \text{se } x \geq 1.$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DV']

E16.25 Difficoltà:\*. Siano  $f_0, f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_0, f_1 \in C^\infty$  con  $f_0', f_1' > 0$  e  $f_1(1) > f_0(0)$ : allora si può interpolare con una funzione  $f \in C^\infty$  che soddisfi [1DW]

$$f(x) = f_0(x) \quad \text{se } x \leq 0 \\ f(x) = f_1(x) \quad \text{se } x \geq 1$$

in modo che l'interpolante abbia  $f' > 0$ .

Cosa succede se  $f_1(1) = f_0(0)$ ?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DX']

<sup>†100</sup>Possibilmente con una semplice costruzione basata sull'esempio 16.20.

E16.26 Prerequisiti:16.20. Si trovi un esempio di funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \in C^\infty$  e tale, che posto  $A = \{x : f(x) = 0\}$  il luogo di zeri, si abbia che 0 è l'unico punto di accumulazione di  $A$ , cioè  $D(A) = \{0\}$ . Si confronti questo esempio con la Prop. 6.8.4 negli appunti [3]; e con l'esempio 19.7. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1F0'] [1DZ]

E16.27 Difficoltà:\*.Note:Lemma di Hadamard. [1F1]

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^\infty$  e tale che  $f(0) = 0$ . Sia, per  $x \neq 0$ ,  $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)/x$ . Si mostri che  $g$  si prolunga, assegnando un opportuno valore a  $g(0)$ , e che la funzione prolungata è  $C^\infty$ . Che rapporto c'è fra  $g^{(n)}(0)$  e  $f^{(n+1)}(0)$ ?

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1F2']

E16.28 Prerequisiti:16.27.Difficoltà:\*. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  una funzione di classe  $C^\infty$  tale che  $f(0) = 0$ ,  $f(x) > 0$  per  $x \neq 0$ , e  $f''(0) \neq 0$ : si mostri che [1F4]

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{f(x)} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è di classe  $C^\infty$ . *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1F5']

E16.29 Difficoltà:\*. Dati  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$  e dati numeri reali  $a_{i,h}$  (con  $i, h = 0, \dots, n$ ) si mostri che esiste un polinomio  $p(x)$  tale che  $p^{(i)}(x_h) = a_{i,h}$ . [1F7]

Questa considerazione è alla base della teoria dell'interpolazione secondo Hermite, si veda [57].

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1F8']

E16.30 Prerequisiti:funzioni convesse.Note:Esercizio 1 del compito Marzo 2010. [1F9]

Consideriamo le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ , tali che per ogni fissato  $n \geq 0$ ,  $f^{(n)}(x)$  abbia segno costante (e cioè non si annulli mai)<sup>†101</sup>. Associamo a ogni tale funzione la sequenza dei segni che vengono assunti da  $f, f', f'' \dots$

Quali sono le possibili sequenze di segni, e quali invece sono le sequenze impossibili? (Per es. presa  $f(x) = e^x$ , a questa si associa la sequenza + + + + ..., che è dunque una sequenza possibile.)

Si veda anche l'esercizio 19.2.

Si vedano anche gli esercizi 14.44 e 14.45 sul rapporto fra convessità e proprietà delle derivate.

## §16.b Sviluppo di Taylor [2D2]

**Definizione 16.31** (Simboli di Landau). Sia  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  e  $I$  un intorno di  $a$ . Siano  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremo che " $f(x) = o(g(x))$  per  $x$  tendente ad  $a$ " se<sup>†102</sup> [1FB]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in I \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad .$$

Questa notazione si legge come "f è o piccolo di g".

<sup>†101</sup>Si intende che  $f^{(0)} = f$ .

<sup>†102</sup>Considerate che  $J = \{x \in I : |x - a| < \delta\}$  è un intorno di  $a$ .

Se  $g(x) \neq 0$  per  $x \neq a$ , allora equivalentemente si può scrivere

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad .$$

Diremo che “ $f(x) = O(g(x))$  per  $x$  tendente ad  $a$ ” se se esistono una costante  $c > 0$  e un intorno  $J$  di  $a$  per cui  $\forall x \in J, |f(x)| \leq c|g(x)|$ .

Di nuovo, se  $g(x) \neq 0$  per  $x \neq a$ , allora equivalentemente si può scrivere

$$\limsup_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty \quad ,$$

Questa notazione si legge come “ $f$  è  $O$  grande di  $g$ ”.

Per maggiori informazioni, e altre notazioni, si veda [52].

Questa notazione è usualmente accreditata a Landau.

Nel seguito per semplicità consideriamo solo il caso in cui  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ; inoltre negli sviluppo di Taylor si ha sempre che  $g(x) = (x - a)^n$  con  $n \geq 1$  intero. <sup>†103</sup>

**Nota 16.32.** *Attenzione! I simboli “o piccolo” e “O grande” sono usati in modo diverso da altri simboli della Matematica. Infatti essi possono rappresentare funzioni diverse, anche nello stesso contesto! Ad esempio se scriviamo* [1FC]

$$\sin(x) = x + o(x) \quad , \quad \cos(x) = 1 + o(x)$$

i due simboli “ $o(x)$ ” a destra e a sinistra rappresentano funzioni diverse. Particolare cura dunque va messa nel mostrare le proprietà usate nel calcolo. Quando sono presenti molti tali simboli, è preferibile sostituirli con altri simboli di funzioni, come si vede negli esempi successivi.

Vediamo due esempi. Sia  $a = 0$  per semplicità.

**Esempio 16.33.** *Enunciamo in maniera informale questa proprietà.* [1FD]

$$\text{Se } n \geq m \geq 1 \text{ allora } o(x^n) + o(x^m) = o(x^m).$$

Per dimostrarla la convertiamo in un enunciato preciso. Innanzitutto la riscriviamo così.

$$\text{Se } f(x) = o(x^n) \text{ e } g(x) = o(x^m) \text{ allora } f(x) + g(x) = o(x^m).$$

Dunque la dimostriamo. Come ipotesi abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)x^{-n} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} g(x)x^{-m} = 0$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^m} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-m} \frac{f(x)}{x^n} + 0 = 0.$$

**Esempio 16.34.** *Enunciamo in maniera informale questa seconda proprietà* [1FF]

<sup>†103</sup>Alcuni tesi usano anche la notazione  $o(1)$  per indicare una quantità infinitesima per  $x \rightarrow a$ , ma questo può generare confusione .

Se  $n \geq 1$  allora  $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$ .

La riscriviamo così.

Se  $f(x) = o(x^n)$  e  $g(x) = o(x^n + f(x))$  allora  $g(x) = o(x^n)$ .

Notiamo che, per  $x \neq 0$  piccolo,  $x^n + f(x)$  è non nullo, in quanto esiste un intorno in cui  $|f(x)| \leq |x^n|/2$ . Come ipotesi abbiamo che  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)x^{-n} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)/(x^n + f(x)) = 0$  allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n + f(x)} \frac{x^n + f(x)}{x^n}$$

ma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n + f(x)} = 0$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n + f(x)}{x^n} = 1 \quad .$$

### Esercizi

E16.35 Sia  $a = 0$  per semplicità. Riscrivete le successive relazioni e dimostratele. [1FG]

- Se  $n \geq m \geq 1$  allora

$$O(x^n) + O(x^m) = O(x^m), \quad o(x^n) + o(x^m) = o(x^m), \quad x^n + O(x^m) = O(x^m) \quad .$$

- Se  $n > m \geq 1$  allora

$$O(x^n) + o(x^m) = o(x^m), \quad x^n + o(x^m) = o(x^m).$$

- Per  $n, m \geq 1$

$$\begin{aligned} x^n O(x^m) &= O(x^{n+m}) \\ x^n o(x^m) &= o(x^{n+m}) \\ O(x^n) O(x^m) &= O(x^{n+m}) \\ o(x^n) O(x^m) &= o(x^{n+m}) \end{aligned}$$

•

$$\int_0^y O(x^n) dx = O(y^{n+1}) \quad \int_0^y o(x^n) dx = o(y^{n+1}) \quad .$$

E16.36 Si scriva il polinomio di Taylor di  $f(x)$  intorno a  $x_0 = 0$ , sfruttando “il calcolo di Landau degli  $o(x^n)$ ” visto sopra. [1FJ]

$f(x)$	=	$p(x) + o(x^4)$
$(\cos(x))^2$	=	$+o(x^4)$
$(\cos(x))^3$	=	$+o(x^4)$
$\cos(x)e^x$	=	$+o(x^4)$
$\cos(\sin(x))$	=	$+o(x^4)$
$\sin(\cos(x))$	=	$+o(x^4)$
$\log(\log(e+x))$	=	$+o(x^3)$
$(1+x)^{1/x}$	=	$+o(x^3)$



(Per sviluppare gli ultimi due sarà necessaria un po' di fantasia; per ridurre i conti, si sviluppino gli ultimi due solo fino a  $o(x^3)$ ).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FK']

E16.37 Si trovi un' approssimazione razionale di  $\cos(1)$  con errore minore di  $1/(10!) \sim 2 \cdot 10^{-7}$  Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FN']

E16.38 Si scriva lo sviluppo di Taylor di  $(1+x)^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ . (Se ne deduca una generalizzazione del simbolo binomiale  $\binom{\alpha}{k}$ ). La serie di Taylor costruita con questi coefficienti è a volte detta *serie binomiale*, e converge per  $|x| < 1$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FQ']

E16.39 Prerequisiti: 15.20. Note: Da un'idea nel libro di Apostol [4], Capitolo 7.3. Scrivere lo sviluppo di Taylor (intorno a  $x_0 = 0$ ) per  $-\log(1-x)$  integrando [1FR]

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \frac{x^n}{(1-x)} \quad (16.40)$$

e confrontare il "resto"

$$\int_0^x \frac{t^n}{(1-t)} dt \quad (16.41)$$

così ottenuto con il "resto integrale" di  $f(x) = -\log(1-x)$  (come presentato in esercizio 15.20).

Procedere similmente per  $\arctan(x)$  integrando

$$1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} - (-1)^n x^{2n+2}/(1+x^2) \quad (16.42)$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FS']

E16.43 Prerequisiti: 15.20, 16.39. Difficoltà: . Valutare per quali  $r > 0$  si ha che il resto di Taylor di  $f(x) = -\log(1-x)$  è infinitesimo in  $n$ , uniformemente per  $|x| < r$ ; questo, usando il resto visto in (16.41), usando il resto integrale oppure usando il resto di Lagrange. [1FT]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FV']

Si veda anche l'esercizio 15.20.

### §16.c Derivate parziali e totali, differenziali [2D3]

#### Esercizi

E16.44 Verificate che le seguenti derivate parziali esistono e calcolatele: [1FX]

$$\frac{\partial}{\partial x}(4xy + 3x^2y - zy^2), \quad \frac{\partial}{\partial y}(4xy + 3x^2y - zy^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{ze^{x+|y|}}{1+x^2|y|}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{ze^{x+|y|}}{1+x^2|y|}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FY']

E16.45 Prerequisiti: integrale di Riemann, 15.2. Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo aperto con  $0 \in I$ . [1FZ]  
 Data  $f = f(x, y) : I \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che anche  $\frac{\partial}{\partial x} f$  esiste ed è continua, posto

$$g(x) = \int_0^1 f(x, y) \, dy \quad ,$$

mostrate che  $g$  è di classe  $C^1$ , e che

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \, dy .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1G0'] [UNACCESSIBLE UUID '1G1']

E16.46 Prerequisiti: integrale di Riemann, 13.9, 13.8, 16.45. Sia [1G2]

$$h(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, z) \, dz$$

dove  $a, b, f$  sono funzioni di classe  $C^1$ : mostrate che  $h$  è di classe  $C^1$  e calcolate la derivata.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1G3']

E16.47 Le seguenti funzioni sono differenziabili in  $(0, 0)$ ? [1G4]

$$f_1(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } x > 0 \\ x + ye^{-x^2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f_3(x, y) = (\arctan(y + 1))^{x+1}, \quad f_4(x, y) = \max\{x^2, y^2\} .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1G5']

E16.48 Prerequisiti: 2.326. Sia  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ . Ricordiamo che, per il Teorema di Schwarz, invertendo le operazioni di derivazione parziale di  $f$ , il risultato non cambia. Sia  $N(n, k)$  il numero di derivate parziali (potenzialmente diverse) di ordine  $n$ : mostrate che  $N(n, k) = \binom{n+k-1}{k-1}$  (che è un polinomio a coefficienti interi nella variabile  $n$ , di ordine  $k - 1$ ). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1G7'] [1G6]

E16.49 Sia  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto non vuoto, sia  $\bar{x} \in W$ . Sia poi  $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ . Sia  $\nabla\psi(\bar{x})$  il vettore riga di coordinate  $\frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\bar{x})$  (che è il gradiente di  $\psi$ , caso particolare della “matrice Jacobiana”); lo abbreviamo a  $D = \nabla\psi(\bar{x})$  per semplicità; sia  $H$  la matrice Hessiana di componenti  $H_{h,k} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_h} \psi(\bar{x})$ ; si mostri la validità della formula di Taylor al secondo ordine [1G8]

$$\psi(\bar{x} + v) = \psi(\bar{x}) + Dv + \frac{1}{2} v^t H v + o(|v|^2)$$

(notate che il prodotto  $Dv$  è una matrice  $1 \times 1$  che identifichiamo con un numero reale, e similmente per  $v^t H v$ ).

E16.50 Prerequisiti: 16.49. Siano  $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti non vuoti, e sia  $G : V \rightarrow W$  di classe  $C^2$ . Sia  $\bar{y} \in V$  e  $\bar{x} = G(\bar{y}) \in W$ . Sia poi  $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ ; posto  $\tilde{\psi} = \psi \circ G$ , confrontare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di  $\psi$  e di  $\tilde{\psi}$  (centrati rispettivamente in  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ ). Supponendo inoltre che  $G$  sia un diffeomorfismo, verificare che

- $\bar{x}$  è un punto stazionario per  $\psi$  se e solo se  $\bar{y}$  è punto stazionario anche per  $\tilde{\psi}$ ,
- e in questo caso gli Hessiani di  $\psi$  e di  $\tilde{\psi}$  sono simili (cioè le matrici sono uguali a meno di cambio di coordinate).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GC']

### §16.d Teorema di funzione implicita

Useremo il Teorema di Funzione Implicita, nella versione a più variabili (Teorema 7.7.4 in [3]). Lo riportiamo qui per comodità, con alcune piccole modifiche nelle notazioni.

**Teorema 16.51** (Teorema delle funzioni implicite in  $\mathbb{R}^n$ ). *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua, con  $A$  aperto, e sia  $\bar{x} = (\bar{x}', \bar{x}_n) \in A$  tale che  $\partial_{x_n} f$  esiste in un intorno di  $\bar{x}$ , è continua in  $\bar{x}$  e  $\partial_{x_n} f(\bar{x}) \neq 0$ . Poniamo  $\bar{a} = f(\bar{x})$ .*

*Esiste allora un intorno "cilindrico"  $U$  di  $\bar{x}$*

$$U = U' \times J$$

dove

$$U' = B(\bar{x}', \alpha)$$

è la palla aperta in  $\mathbb{R}^{n-1}$  centrata in  $\bar{x}'$  di raggio  $\alpha > 0$ , e

$$J = (\bar{x}_n - \beta, \bar{x}_n + \beta)$$

con  $\beta > 0$ . Per questo intorno si ha che  $U \cap f^{-1}(\{\bar{a}\})$  coincide con il grafico  $x_n = g(x')$ , con  $g : U' \rightarrow J$  continua.

Questo significa che, per ogni  $x = (x', x_n) \in U$ , si ha  $f(x) = \bar{a}$  se e solo se  $x_n = g(x')$ .

Inoltre, se  $f$  è di classe  $C^k$  su  $A$  per qualche  $k \in \mathbb{N}^*$ , allora  $g$  è di classe  $C^k$  su  $U'$  e vale

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x') = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x', g(x'))}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x', g(x'))} \quad \forall x' \in U', \forall i, 1 \leq i \leq n-1 \quad . \quad (16.52)$$

### Esercizi

E16.53 Consideriamo la seguente funzione di 2 variabili di classe  $C^\infty$

$$f(x, y) = x^3 + y^4 - 1 \quad .$$

Verificate che  $\{f = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$  non sia vuoto; indi, per ogni punto del piano dove questa si annulla discutete se si può applicare il teorema di

funzione implicita, e dunque se l'insieme  $\{f = 0\}$  è localmente grafico di funzione  $C^\infty$ . Studiate inoltre l'insieme  $\{f = 0\}$ : è compatto? Quante componenti connesse vi sono?

(Tenere presente quanto mostrato in 16.63).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GG']

E16.54 Ripetete lo studio dell'esercizio 16.53 precedente per la funzione [1GJ]

$$f(x, y) = \sin(x + y) + x^2 \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GK'] [UNACCESSIBLE UUID '1GN']

E16.55 Note: Esercizio 2, Compito scritto del 30 Giugno 2017. Ripetete lo studio dell'esercizio precedente per la funzione [1GJ]

$$f(x, y) = 1 + 4x + e^x y + y^4 \quad .$$

Mostrare che il luogo di zeri non è compatto.

E16.56 Sia  $A \subset \mathbb{R}^3$  aperto e siano  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabili, e tali che in  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$  si ha che  $\nabla f(p_0), \nabla g(p_0)$  sono linearmente indipendenti e che  $f(p_0) = g(p_0) = 0$ : mostrare che l'insieme  $E = \{f = 0, g = 0\}$  è una curva in un intorno di  $p_0$ . [1GQ]

(Sugg. considerate che il prodotto vettore  $w = \nabla f(p_0) \times \nabla g(p_0)$  è nonnullo se e solo se i vettori sono linearmente indipendenti — infatti è formato dai determinanti dei minori della matrice Jacobiana; assumendo senza perdita di generalità che  $w_3 \neq 0$ , mostrate che  $E$  è localmente il grafico di una funzione  $(x, y) = \gamma(z)$ .)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GR']

E16.57 Note: Compito scritto 4 Luglio 2018. La figura 5 mostra l'insieme  $E = \{(x, y) : ye^x + xe^y = 1\}$ . [1GS]

Si dimostrino rigorosamente le seguenti proprietà:

- (i) in ogni punto  $(x_0, y_0) \in E$  sono soddisfatte le ipotesi del Teorema della funzione implicita;
- (ii)  $E \cap \{(x, y) : x > 0\}$  coincide con il grafico, nella forma  $y = f(x)$ , di un'unica funzione  $f$  definita su  $(0, +\infty)$ ;
- (iii)  $E$  è connesso;
- (iv)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
- (v) Mostrate (almeno intuitivamente) che esiste  $x_0 > 0$  con la proprietà che  $f$  è decrescente per  $0 < x < x_0$ , crescente per  $x > x_0$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GV']

E16.58 Sia  $E$  l'insieme di rette orizzontali [1GW]

$$E = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, 1/n) : x \in \mathbb{R}\} \quad .$$

Trovate una funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y)$  di classe  $C^1$  tale che  $E = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$ .

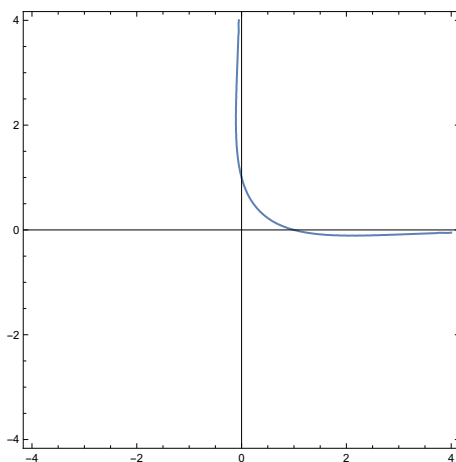


Figura 5: Figura per esercizio 16.57.

Dimostrate che necessariamente  $\partial_y f(0, 0) = 0$ .

Sia ora  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ . Notate che esiste una funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $g(0) = 0$  e  $f(x, g(x)) = 0$ ! Difatti la funzione  $g \equiv 0$  è l'unica funzione con tali caratteristiche. Dunque una parte della tesi nel teorema di funzione implicita è soddisfatta.

Spiegate dunque precisamente perché la tesi del teorema di funzione implicita non è soddisfatta.

### §16.d.a Estensioni

Vediamo ora alcune varianti del teorema “standard”.

#### Esercizi

E16.59 Prerequisiti: 13.28.

[1GX]

Lavoriamo nelle ipotesi del teorema 16.51. Mostrate che se  $f(\cdot, y)$  è Lipschitziana di costante  $L$  per ogni fissato  $y$  cioè

$$|f(x'_1, y) - f(x'_2, y)| \leq L|x'_1 - x'_2| \quad \forall x'_1, x'_2 \in U', y \in J$$

(e  $L > 0$  non dipende da  $x'_1, x'_2, y$ ) allora  $g$  è Lipschitziana di costante  $L'$ . Che rapporto vi è fra le costanti  $L$  e  $L'$ ?

Similmente se  $f$  è Hölderiana.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GY']

E16.60 Nelle stesse ipotesi del precedente teorema 16.51, mostrate che esistono  $\varepsilon > 0$  e una funzione continua  $\tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $I = (\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon)$  e  $V = U' \times I$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$ , tali che

[1GZ]

$$\forall (x', a) \in V, \quad (x', \tilde{g}(x', a)) \in U \quad \text{e} \quad f(x', \tilde{g}(x', a)) = a. \quad (16.61)$$

Viceversa se  $x \in U$  e  $a = f(x)$  e  $a \in I$  allora  $x_n = \tilde{g}(x', a)$ .

Notate che la precedente relazione significa che, per ogni fissato  $x' \in U'$ , la funzione  $\tilde{g}(x', \cdot)$  è l'inversa della funzione  $f(x', \cdot)$  (quando definite su opportuni intervalli aperti).

Dunque si ha anche che la funzione  $\tilde{g}$  è sempre differenziabile rispetto ad  $a$ , e la derivata parziale è

$$\frac{\partial}{\partial a} \tilde{g}(x', a) = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_n} f(x', \tilde{g}(x', a))} .$$

Le altre derivate invece (ovviamente) sono come nel teorema 16.51.

La regolarità di  $\tilde{g}$  è la stessa di  $g$ : se  $f$  è Lipschitziana allora  $\tilde{g}$  è Lipschitziana; se  $f \in C^k(U)$  allora  $\tilde{g} \in C^k(V)$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1H0']

E16.62 Nelle stesse ipotesi dell'esercizio 16.60, assumiamo inoltre che  $f \in C^1(A)$ . [1H1]

- Decomponiamo  $y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n$  come già fatto per  $x$ . Definiamo la funzione  $G : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  come  $G(y) = (y', \tilde{g}(y))$ . Sia  $W = G(V)$  l'immagine di  $V$ , mostrate che  $W \subseteq U$  e che  $W$  è aperto.
- Mostrate che è  $G : V \rightarrow W$  è un diffeomorfismo; e che la sua inversa è la mappa  $F(x) = (x', f(x))$ .
- Poniamo  $\tilde{f} = f \circ G$ . Mostrate che  $\tilde{f}(x) = x_n$ .

(Questo esercizio sarà usato, insieme al 16.50, per affrontare i problemi vincolati in sezione §16.e). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1H2']

E16.63 Prerequisiti: 7.61, 7.62, 9.96, 9.97, 16.24, 16.51, 20.7 e 20.14. [1H3]

Difficoltà: \*\*.

Per questo esercizio sono necessarie definizioni e risultati presentati nel capitolo §20.

Sia  $r \geq 1$  intero, o  $r = \infty$ . Sia  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^r$ , e tale che  $\nabla F \neq 0$  in ogni punto in cui  $F = 0$ .

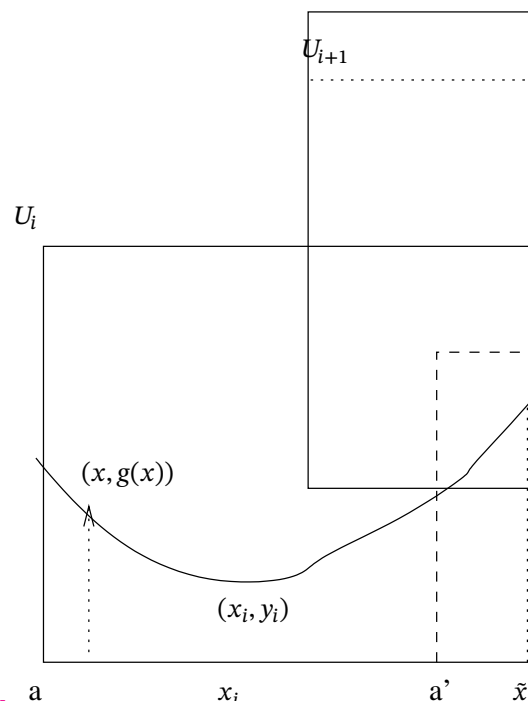
Sappiamo da che 7.61 che  $\{F = 0\}$  è l'unione disgiunta di componenti connesse, da 7.62 che ogni componente connessa è un chiuso.

Mostrate che, per ogni componente connessa  $K$ , vi è un aperto  $A \supseteq K$  tale che  $K = A \cap \{F = 0\}$ , e che dunque vi è un numero al più numerabile di componenti connesse.

Mostrate che ogni componente connessa è il sostegno di una curva semplice immersa e di classe  $C^r$ , di uno dei seguenti due tipi:

- la curva è chiusa, oppure
- la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  non è chiusa e è illimitata (cioè  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\gamma(t)| = \infty$ ).

Il primo caso si verifica se e solo se la componente connessa è un compatto.



Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1H4'] [UNACCESSIBLE UUID '1H5']

### §16.e Problemi vincolati

[2D5]

**Definizione 16.64.** Sia ora  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto e  $f, \varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni reali di classe  $C^1$  su  $A$ . Fissato  $a \in \mathbb{R}$  definiamo poi l'insieme di livello

[1F6]

$$E_a = \{x \in A : \varphi(x) = a\}$$

assumiamo che  $E_a$  sia non vuoto, e che  $\nabla \varphi(x) \neq 0$  per ogni  $x \in E_a$ .

Chiamiamo **punto di minimo locale di  $f$  vincolato a  $E_a$**  un punto di  $E_a$  che sia di minimo locale per  $f|_{E_a}$ ; e similmente per i massimi.

Per risolvere i seguenti esercizi potrà essere utile applicare i risultati visti in 16.49, 16.50, 16.62.

#### Esercizi

E16.65 Prerequisiti: 16.64, 16.62. Siano  $f, \varphi$  di classe  $C^1$  nell'aperto  $A$ , e sia  $\bar{x}$  un punto di minimo locale per  $f$  vincolato ad  $E_a$  (dunque  $\varphi(\bar{x}) = a$ ). Mostrate che esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $\nabla f(\bar{x}) + \lambda \nabla \varphi(\bar{x}) = 0$ ; questo  $\lambda$  è detto **il moltiplicatore di Lagrange**.

[1H8]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1H9']

E16.66 Prerequisiti: 16.64, 16.50, 16.65. Siano  $f, \varphi$  di classe  $C^2$  nell'aperto  $A$ , e sia  $\bar{x}$  un punto di minimo vincolato per  $f$  vincolato ad  $E_a$ ; sia  $\lambda$  il moltiplicatore di Lagrange; definiamo  $h = f(x) + \lambda \varphi(x)$ , allora

[1HB]

$$\forall v, v \cdot \nabla \varphi(x) = 0 \implies v \cdot H v \geq 0$$

dove  $H$  è la matrice Hessiana di  $h$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HC']

E16.67 Nelle stesse ipotesi, vediamo un “vice versa”. Siano  $f, \varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  nell’aperto  $A$ , e siano  $\bar{x} \in E_a$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  tali che  $\nabla f(\bar{x}) + \lambda \nabla \varphi(\bar{x}) = 0$ ; si abbia [1HD]

$$\forall v, v \cdot \nabla \varphi(x) = 0 \implies v \cdot Hv > 0$$

dove

$$h(x) = f(x) + \lambda \varphi(x)$$

e  $H$  è la matrice Hessiana di  $h$  in  $\bar{x}$ . Si mostri allora che  $\bar{x}$  è un punto di minimo locale vincolato per  $f$  rispetto a  $E_a$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HF']

### §16.e.a Vincoli con disequaglianze

Consideriamo ora un diverso tipo di vincolo.

**Definizione 16.68.** Sia [2BH]

$$F_a = \{x \in A : \varphi(x) \leq a\} \quad ;$$

assumiamo sempre che  $F_a$  sia non vuoto e che  $\nabla \varphi(x) \neq 0$  per ogni  $x \in E_a$ .

Chiamiamo **punto di minimo locale di  $f$  vincolato a  $F_a$**  un punto di  $F_a$  che sia di minimo locale per  $f|_{F_a}$ ; e similmente per i massimi.

#### Esercizi

E16.69 Prerequisiti: 16.68, 16.64. Mostrate che  $\partial F_a = E_a$  e che  $F_a$  coincide con la chiusura della sua parte interna. (Le operazioni di chiusura e frontiera vanno eseguite all’interno di  $A$ , visto come spazio topologico!) [1HG]

E16.70 Prerequisiti: 16.68. Mostrate che condizione necessaria perché  $x \in A$  sia minimo locale di  $f$  vincolato a  $F_a$  è che, [1HH]

- o  $\varphi(x) < a$  e  $\nabla f(x) = 0$ ,
- oppure  $\varphi(x) = a$  e  $\nabla f(x) + \lambda \nabla \varphi(x) = 0$  con  $\lambda \geq 0$ .

Queste sono le condizioni di **Karush–Kuhn–Tucker**.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HJ']

E16.71 Prerequisiti: 16.68. Nel caso  $n = 1$ , supponiamo che  $A$  sia un intervallo aperto, mostrate che se  $\varphi(x) = a$  e  $f'(x)\varphi'(x) < 0$  allora il punto  $x$  è punto di minimo locale per  $f$  vincolato a  $F_a$ . [1HK]

E16.72 Prerequisiti: 16.68. Trovate un semplice esempio nel caso  $n = 2$  in cui il punto  $x$  non è di minimo locale per  $f$  vincolato a  $F_a$ , ma  $\varphi(x) = a$  e  $\nabla f(x) + \lambda \nabla \varphi(x) = 0$  con  $\lambda > 0$ . [1HM]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HN']



## §17 Limiti di funzioni

[1HQ]

**Definizione 17.1.** Si consideri un insieme  $A$ , una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e una successione di funzioni  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremo che  $f_n$  converge a  $f$  puntualmente se

[2DT]

$$\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad .$$

Diremo che  $f_n$  converge a  $f$  uniformemente se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad .$$

Ulteriori informazioni si possono trovare nel Cap. 6 di [3], Cap. 11 di [5] o Cap. 7 di [23].

**Definizione 17.2.** Siano  $(X_1, d_1)$  e  $(X_2, d_2)$  spazi metrici. Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni  $f : X_1 \rightarrow X_2$ , diremo che è una **famiglia equicontinua** se vale una di queste proprietà equivalenti.

[1HR]

- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \mathcal{F}$

$$\forall x, y \in X_1, d_1(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \quad .$$

- Esiste  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una fissata funzione monotona debolmente crescente per cui  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega(t) = \omega(0) = 0$  (che è detta “modulo di continuità” <sup>†104</sup>) per cui

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall x, y \in X_1, d_2(f(x), f(y)) \leq \omega(d_1(x, y)) \quad . \quad (17.3)$$

- Esiste  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una fissata funzione continua con  $\omega(0) = 0$  che soddisfa (17.3).

(Per l'equivalenza fra le ultime due può essere utile 13.11.)

### Esercizi

E17.4 Note: Questo risultato è noto come “lemma del Dini”.

[1HS]

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, sia  $I \subset X$  un compatto e siano  $f, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue e tali che  $f_n(x) \searrow_n f(x)$  puntualmente (cioè per ogni  $x \in I$  e  $n$  si ha  $f(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$  e  $\lim_n f_n(x) = f(x)$ ). Si mostri allora che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HT']

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HV']

Negli esercizi successivi vedremo che se anche una sola delle ipotesi viene a mancare, allora esistono controesempi.

E17.5 Trovate un esempio di funzioni  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue e limitate e tali che  $f_n(x) \searrow_n 0$  puntualmente, ma non  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente.

[1HW]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HX']

E17.6 Trovate un esempio di  $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue e limitate e tali che  $f_n(x) \rightarrow_n 0$  puntualmente ma non  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente.

[1HY]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HZ']

E17.7 Trovate un esempio di funzioni  $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue e limitate e tali che  $f_n(x) \searrow_n f(x)$  puntualmente a  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  (cioè per ogni  $x$  e  $n$  si ha  $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq 1$  e  $\lim_n f_n(x) = f(x)$ ) ma  $f$  non è continua e non si ha convergenza  $f_n \rightarrow f$  uniforme. [1J1]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J2']

E17.8 Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo. Quali di queste classi  $\mathcal{F}$  di funzioni  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sono chiuse per convergenza uniforme? Quali sono chiuse per convergenza puntuale? [1J3]

1. Le funzioni continue e monotone (debolmente) crescenti su  $I = [0, 1]$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J4']

2. Le funzioni convesse su  $I = [0, 1]$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J5']

3. Data  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una fissata funzione continua con  $\omega(0) = 0$  (che è detta “modulo di continuità”), sia

$$\mathcal{F} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)\}$$

(questa è detta una famiglia di funzioni equicontinue, come spiegato nella definizione 17.2.)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J6']

4. Dato  $N \geq 0$  fissato, la famiglia di tutti i polinomi di grado minore o uguale a  $N$ , visti come funzioni  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J7']

5. Le funzioni regolate su  $I = [0, 1]$ .<sup>†105</sup>

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J9']

6. Le funzioni uniformemente continue e limitate su  $I = \mathbb{R}$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JB']

7. Le funzioni Hoelderiane su  $I = [0, 1]$ , cioè

$$\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists b > 0, \exists \alpha \in (0, 1] \forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq b|x - y|^\alpha\}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JC'] [UNACCESSIBLE UUID '1JD']

8. Le funzioni Riemann integrabili su  $I = [0, 1]$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JF']

E17.9 Ci chiediamo se le classi precedenti  $\mathcal{F}$  godono di una “proprietà di rigidità”, cioè se da una convergenza più “debole” nella classe segue una convergenza più “forte”. Dimostrate le seguenti proposizioni. [1JG]

1. Siano  $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue e monotone (debolmente) crescenti, definite su un intervallo  $I = [a, b]$  chiuso e limitato. Se vi è un insieme denso  $J$  in  $I$  e con  $a, b \in J$ , per cui  $\forall x \in J, f_n(x) \rightarrow_n f(x)$ , allora  $f_n \rightarrow_n f$  uniformemente.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JH']

<sup>†104</sup>Riguardo alla nozione di “modulo di continuità” si veda anche 13.15.

<sup>†105</sup>Le funzioni  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  regolate sono le funzioni che ammettono in ogni punto limite destro e limite sinistro finiti. Si veda la Sezione §12.b.

2. Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  intervallo aperto. Siano  $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}$  convesse su  $A$ . Se vi è un insieme  $J$  denso in  $A$  tale che  $\forall x \in J, f_n(x) \rightarrow_n f(x)$ , allora per ogni  $[a, b] \subset A$  si ha che  $f_n \rightarrow_n f$  uniformemente su  $[a, b]$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JJ']

3. Siano  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  una successione equicontinua di funzioni <sup>†106</sup> definite su un intervallo  $I = [a, b]$  chiuso e limitato, e sia  $\omega$  il loro modulo di continuità. Se vi è un insieme  $J$  denso in  $[a, b]$  tale che  $\forall x \in J, f_n(x) \rightarrow_n f(x)$ , allora,  $f$  si estende da  $J$  a  $I$  in modo da essere continua (con modulo  $\omega$ ), e  $f_n \rightarrow_n f$  uniformemente su  $[a, b]$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JK']

4. Siano  $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  polinomi di grado minore o uguale a  $N$ , visti come funzioni definite su un intervallo  $I = [a, b]$  chiuso e limitato; siano fissati  $N + 1$  punti distinti  $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq b$ ; supponiamo che, per ogni  $x_i, f_n(x_i) \rightarrow_n f(x_i)$ : allora  $f_n$  convergono a  $f$  uniformemente, e così ogni loro derivata  $D^k f_n \rightarrow_n D^k f$  uniformemente.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JM']

Si cerchino inoltre controesempi per simili proposizioni quando applicate alle altre classi di funzioni viste nell'esercizio precedente.

E17.10 Prerequisiti: 17.2, 17.8 punto 6. Difficoltà: \*. [1JN]

Se  $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sono uniformemente continue su un insieme  $I \subset \mathbb{R}$ , e  $f_n \rightarrow_n f$  uniformemente su  $I$ , allora  $f$  è uniformemente continua, e la famiglia  $(f_n)_n$  è equicontinua.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JP']

E17.11 Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e siano  $g_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le traslate di  $f$ , definite (per  $t \in \mathbb{R}$ ) da  $g_t(x) = f(x - t)$ . Si mostri che  $g_t$  tende puntualmente a  $f$  per  $t \rightarrow 0$  se e solo se  $f$  è continua; e che  $g_t$  tende uniformemente a  $f$  per  $t \rightarrow 0$  se e solo se  $f$  è uniformemente continua. [1JQ]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JR']

E17.12 Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un aperto, sia  $\hat{x}$  un punto di accumulazione per  $I$  <sup>†107</sup>, sia  $f_m : I \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni limitate che convergono uniformemente a  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Supponiamo che per ogni  $m$  esista  $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f_m(x)$  allora [1JS]

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \hat{x}} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$$

nel senso che se uno dei due limiti esiste allora esiste anche l'altro, e sono uguali. (Il precedente risultato vale anche per limiti destri o limiti sinistri).

Mostrate con un semplice esempio che se il limite non è uniforme allora la precedente uguaglianza non vale.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JT'] (Si veda anche l'esercizio 6.8).

E17.13 Sia  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo compatto, siano  $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Mostrate che i due seguenti fatti sono equivalenti. [1JV]

<sup>†106</sup>La definizione è in 17.2

<sup>†107</sup>Includendo anche il caso in cui  $I$  è superiormente illimitato e  $\hat{x} = +\infty$ , oppure il caso in cui  $I$  è inferiormente illimitato e  $\hat{x} = -\infty$ .

- a. Per ogni  $x \in X$  e per ogni successione  $(x_n)_n \subset I$  per cui  $x_n \rightarrow_n x$  si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$ ;  
 b.  $f_n \rightarrow_n f$  uniformemente su  $I$ .

Trovate indi un esempio dove  $I = [0, 1)$ , il primo punto vale, ma  $f_n$  non tende uniformemente a  $f$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JW']

## §17.a Sul Teorema di Ascoli–Arzelà

Vediamo ora alcuni esercizi che ricostruiscono il famoso Teorema di Ascoli–Arzelà.

### Esercizi

E17.14 Prerequisiti:17.8 punto 6,17.10. Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme. Sia  $X$  l'insieme delle funzioni  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  limitate e uniformemente continue. Dotiamo  $X$  della distanza  $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$ . Mostrate che lo spazio metrico  $(X, d_\infty)$  è completo. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JY'] In particolare,  $X$  è un sottospazio vettoriale chiuso nello spazio  $C_b(I)$  delle funzioni continue e limitate. [1JX]

E17.15 Prerequisiti:17.2,17.8.6,17.10.Difficoltà:\*\*. [1K0]

Sia  $(X, d_\infty)$  come nell'esercizio 17.14 precedente. Sia ora  $\mathcal{F} \subseteq X$  una famiglia di funzioni, supponiamo che  $\mathcal{F}$  sia totalmente limitata (come definito in 9.110): mostrate allora che la famiglia  $\mathcal{F}$  è equicontinua.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1K1']

E17.16 Prerequisiti:17.2,9.115, 17.9.3.Difficoltà:\*. [1K2]

Sia ora invece  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo chiuso e limitato. Siano  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue, e supponiamo che la successione  $(f_n)$  sia equicontinua e limitata (cioè  $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ ). Si mostri che esiste una sottosuccessione  $f_{n_k}$  che converge uniformemente.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1K3']

E17.17 Prerequisiti:17.2,9.110,9.121,17.16,17.15.Difficoltà:\*\*. Note:Una versione del teorema di Ascoli–Arzelà. [1K4]

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo chiuso e limitato. Sia  $C(I)$  l'insieme delle funzioni  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Dotiamo  $C(I)$  della distanza  $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$ . Sappiamo che lo spazio metrico  $(C(I), d_\infty)$  è completo.

Sia  $\mathcal{F} \subseteq C(I)$ : le seguenti sono equivalenti.

1.  $\mathcal{F}$  è compatto
2.  $\mathcal{F}$  è chiusa, è equicontinua e limitata (cioè  $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_\infty < \infty$ ).

## §18 Serie di potenze

[1K6]

La teoria necessaria per lo svolgimento dei successivi esercizi si può trovare nel Cap. 6 di [3], Sez. 11.6 in [5] o Cap. 8 di [23].

### Esercizi

E18.1 Una serie di potenze  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ha raggio di convergenza positivo se e solo se esiste  $\ell > 0$  per cui  $|a_k| \leq \ell^k$  per ogni  $k \geq 1$ . [1K7]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1K8']

E18.2 Siano  $c_k$  numeri complessi, e  $a_k = |c_k|$ ; si noti che le serie di potenze  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  hanno lo stesso raggio di convergenza  $R$ . [1K9]

Posta, per  $t > 0$  reale  $\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ , si noti che questa formula definisce una funzione monotona  $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ; si mostri che il raggio di convergenza  $R$  coincide con l'estremo superiore dei  $t \geq 0$  per cui  $\tilde{f}(t) < \infty$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1KB'] Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1KC']

E18.3 Prerequisiti: 6.70. Data  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  con  $a_k \geq 0$  e con il raggio di convergenza  $r > 0$ , dimostrate che  $\lim_{t \rightarrow r^-} f(t) = f(r)$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1KF'] [1KD]

E18.4 Trovate due esempi di serie  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  con  $a_k > 0$  e con raggio di convergenza  $r$  positivo e finito, per cui [1KG]

- $f(r) < \infty$
- $f(r) = \infty$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1KH']

E18.5 [1KJ]

Trovate un esempio di serie  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  con  $a_k \in \mathbb{R}$  e con raggio di convergenza  $r$  positivo e finito, per cui esiste finito il limite  $\lim_{t \rightarrow r^-} f(t)$ , ma la serie non converge in  $t = r$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1KK']

Notate che (per il Lemma di Abel) se la serie converge in  $t = r$  allora esiste il limite  $\lim_{t \rightarrow r^-} f(t) = f(r)$ .

E18.6 Siano  $b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Supponendo che  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  con raggio di convergenza  $r$  positivo e  $t \in (-r, r)$ , si determinino i coefficienti  $a_k$  in modo da soddisfare le seguenti equazioni differenziali. [1KM]

1.  $f'(t) = f(t)$  e  $f(0) = b$ ,
2.  $f'(t) = t^2 f(t)$  e  $f(0) = b$ ,
3.  $f''(t) = t^2 f(t)$  e  $f(0) = b, f'(0) = 0$ ,
4.  $t f''(t) + f'(t) + t f(t) = 0$  e  $f(0) = b, f'(0) = 0$ ,
5.  $t^2 f''(t) + t f'(t) + (t^2 - m^2) f(t) = 0$   $m \geq 2$  intero,  $f(0) = f'(0) = \dots f^{(m-1)}(0) = 0$ , e  $f^{(m)}(0) = b$ .

(Le ultime due sono dette *Equazioni di Bessel*). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1KP'] [UNACCESSIBLE UUID '27G']

Si vedano anche gli esercizi 19.3, 23.20, 23.22 e 23.19.

## §18.a Somma e prodotto, composizione e inversa

[2D6]

### Esercizi

E18.7 *Prerequisiti:* 18.2. Consideriamo le serie di potenze

[1KQ]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m,$$

con raggio di convergenza non nullo, rispettivamente  $r_f$  e  $r_g$ .

Si mostri che la funzione prodotto  $h(x) = f(x)g(x)$  si può esprimere in serie di potenze

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

dove

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j};$$

con raggio di convergenza  $r_h \geq \min\{r_f, r_g\}$ . (Si noti la somiglianza con il prodotto di Cauchy, discusso in sezione §6.c.c)

Può succedere che  $r_h > \min\{r_f, r_g\}$ ?

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1KR']

E18.8 *Prerequisiti:* 18.1. *Difficoltà:* \*. Sia  $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$  con  $b_0 = g(0) \neq 0$ : si esprima formalmente la funzione reciproca  $f(x) = 1/g(x)$  come serie di potenze e si calcolino i coefficienti a partire dai coefficienti  $b_m$ ; se il raggio di convergenza di  $g$  è non nullo si mostri che il raggio di convergenza di  $f$  è non nullo e che  $f(x) = 1/g(x)$  laddove le due serie  $f(x), g(x)$  convergono. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1KT']

[1KS]

E18.9 *Prerequisiti:* 18.2, 16.19. *Difficoltà:* \*.

[1KV]

Consideriamo le serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m,$$

con raggio di convergenza non nullo, rispettivamente  $r_f$  e  $r_g$ . Supponiamo che  $g(0) = 0 = b_0$ . Siano  $I_f, I_g \subset \mathbb{C}$  dischi centrati in zero con raggi minori rispettivamente di  $r_f$  e  $r_g$ : le precedenti serie dunque definiscono funzioni  $f : I_f \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : I_g \rightarrow \mathbb{C}$ . A meno di rimpicciolire  $I_g$ , assumiamo che  $g(I_g) \subset I_f$ .

Si mostri che la funzione composta  $h = f \circ g : I_g \rightarrow \mathbb{C}$  si può esprimere come serie di potenze  $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  (con raggio di convergenza almeno  $r_g$ ); si mostri come i coefficienti  $c_k$  possono essere calcolati dai coefficienti  $a_k, b_k$ . *Soluzione nascosta:*

[UNACCESSIBLE UUID '1KW'] [UNACCESSIBLE UUID '1KX'] [UNACCESSIBLE UUID '1KY']

E18.10 Difficoltà:\*. Sia  $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$  con raggio di convergenza non nullo  $r_g$ . [1KZ]  
 Sia  $I_g \subset \mathbb{C}$  un disco centrato in zero di raggio minore di  $r_g$ ; abbiamo dunque definito una funzione  $g : I_g \rightarrow \mathbb{C}$ . assumiamo  $g(0) = 0$  e  $g'(0) \neq 0$ ; Assumendo che l'inversa  $f(y) = g^{-1}(y)$  si possa esprimere in serie di Taylor  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , calcolate i coefficienti della serie di  $f$  partendo da quelli di  $g$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1M0']

E18.11 Prerequisiti:18.10.Difficoltà:\*\*. [1M1]

Definendo  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  dove i coefficienti  $a_n$  sono stati ricavati nel precedente esercizio 18.10, si provi a mostrare che il raggio di convergenza  $f$  è positivo. †108

## §18.b Exp,sen,cos [2D7]

### Esercizi

E18.12 Prerequisiti:18.2,18.7, 5.7, 5.8. È uso definire [1M3]

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

per  $z \in \mathbb{C}$ . Vogliamo riflettere su questa definizione.

- Innanzitutto, per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , possiamo effettivamente definire

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

(si noti infatti che il raggio di convergenza è infinito — come si verifica facilmente usando il criterio della radice 6.22).

- Notiamo che  $f(0) = 1$ ; definiamo  $e = f(1)$  che è il *numero di Nepero* †109
- Si mostri che  $f(z+w) = f(z)f(w)$  per  $z, w \in \mathbb{C}$ .
- Si verifica facilmente che  $f(x)$  è monotona crescente per  $x \in (0, \infty)$ ; usando la relazione precedente, si ottiene che è monotona crescente per  $x \in \mathbb{R}$ .
- Si mostri poi che, per  $n, m > 0$  interi,  $f(n/m) = e^{n/m}$  (per la definizione di  $e^{n/m}$  si riveda 5.7).
- Si deduca che, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  (per la definizione di  $e^x$  si riveda 5.8)

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1M4']

E18.13 Prerequisiti:6.70. [1M5]

Dato  $z \in \mathbb{C}$ , mostrate che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N = e^z \quad (18.14)$$

e che il limite è uniforme sui compatti. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1M6']

E18.15 Se  $z = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ , possiamo allora calcolare l'esponenziale complesso come prodotto  $e^z = e^x e^{iy}$ . Si usino gli sviluppi in serie di potenze per mostrare la identità di Eulero  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ . [1M7]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1M8']

E18.16 Viceversa si noti allora che  $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ ,  $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{i2}$ . [1M9]

E18.17 Si usi la precedente formula per verificare le note identità [1MB]

$$\sin(x + y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MC']

E18.18 Definiamo le funzioni *coseno iperbolico* <sup>+110</sup> [1MD]

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

e *seno iperbolico*

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

- Si verifichi che

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

(che giustifica il nome di “iperbolico”).

- Si verifichino gli sviluppi in serie

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

- Si verifichi che

$$\cosh' = \sinh, \quad \sinh' = \cosh$$

- Si verifichino le formule

$$\sinh(x + y) = \cosh x \sinh y + \cosh y \sinh x$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x.$$

## §18.c Esponenziale di matrici [2D8]

**Definizione 18.19.** Definiamo l'esponenziale di matrici come [1MF]

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

dove si intende che  $A^0 = \mathbb{I}$ , la matrice identità.



**Esercizi**

E18.20 Prerequisiti: Sezione . §11.d, 11.35, 11.43, 11.39, 18.13. [1MG]

Dotiamo lo spazio delle matrici  $\mathbb{C}^{n \times n}$  di una delle norme viste in Sezione §11.e.

- Mostrate che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$  converge.
- Mostrate che

$$\exp(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbb{I} + A/N)^N \quad (18.21)$$

dove  $\mathbb{I}$  è la matrice identità in  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ; e che la convergenza è uniforme in ogni intorno compatto di  $A$ . (Sugg. fate buon uso del simile risultato 18.13.)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MH']

E18.22 Se  $A$  è invertibile allora [1MJ]

$$A \exp(B) A^{-1} = \exp(ABA^{-1}) \quad .$$

E18.23 La derivata di [1MK]

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$$

è  $A \exp(tA)$ . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MM']

E18.24 Se  $A, B$  commutano, allora [1MN]

$$A \exp(B) = \exp(B)A \quad , \quad \exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \quad .$$

In particolare  $\exp(A)$  è sempre invertibile e la sua inversa è  $\exp(-A)$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MP']

E18.25 Siano [1MQ]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad :$$

calcolate

$$\exp(A) \exp(B) \quad , \quad \exp(B) \exp(A) \quad , \quad \exp(A + B) \quad ;$$

otterrete che sono tutti diversi fra loro. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MR']

E18.26 Se  $A, B$  commutano allora la derivata direzionale di  $\exp$  nel punto  $A$  in direzione  $B$  è  $B \exp(A)$ , cioè [1MS]

$$\frac{d}{dt} \exp(A + tB)|_{t=0} = B \exp(A) \quad .$$

E18.27 Difficoltà:\*. Mostrate che [1MT]

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)) \quad .$$

Sugg. usate la formula di Jacobi 23.14 per calcolare la derivata di  $\det(\exp(tA))$ ; usate il risultato precedente 18.23 — vedere anche 22.38. Un'altra dimostrazione si può ottenere passando alla forma di Jordan (usando 18.22).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MV']

E18.28 Difficoltà:\*. Nel caso generale (quando non sappiamo se  $A, B$  commutano) procediamo come segue. Definiamo  $[A, B] = AB - BA$ . [1MW]

- Posto  $B_0 = B$  e  $B_{n+1} = [A, B_n]$  si ha

$$\begin{aligned} B_n &= A^n B - nA^{n-1}BA + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}BA^2 + \dots + (-1)^n BA^n = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} A^{n-k} B A^k ; \end{aligned}$$

- definiamo ora  $Z = Z(A, B)$

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} , \quad (18.29)$$

(notate che  $Z$  è lineare in  $B$ ): si mostra che la serie precedente converge e che

$$\exp(A)B \exp(-A) = Z ; \quad (18.30)$$

- da questa infine si dimostra che

$$\exp(A) \exp(B) \exp(-A) = \exp(Z) .$$

(Queste formule si possono vedere come conseguenze della formula di Baker–Campbell–Hausdorff [51]). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MX']

E18.31 Prerequisiti:18.20. In generale (anche quando  $A, B$  non commutano) [1MY]

$$\exp(A + B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \exp(A/N) \exp(B/N) \right)^N$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MZ']

E18.32 Prerequisiti:22.37. Difficoltà:\*\*. Nel caso generale (anche quando non sappiamo se  $A, B$  commutano), possiamo esprimere  $\exp(A + sB)$  usando una espressione in serie di potenze. Definiamo [1N0]

$$C(t) = \exp(-tA)B \exp(tA)$$

e (ricorsivamente)  $Q_0 = \mathbb{1}$  (la matrice identità) e poi

$$Q_{n+1}(t) = \int_0^t C(\tau) Q_n(\tau) d\tau$$

allora si ha

$$\exp(-A) \exp(A + sB) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n Q_n(1) ; \quad (18.33)$$

questa serie converge per ogni  $s$ .

<sup>†108</sup> La dimostrazione si può trovare in Proposizione 9.1 a pg 26 nel libro di Henri Cartan [8].

<sup>†109</sup> Conosciuta come *Euler's number* o *Napier's constant* in Inglese.

<sup>†110</sup> Si veda la pagina di Wikipedia “[Derivazione delle funzioni iperboliche](#)” [46] che spiega in quale senso  $y$  è un “angolo”.

Se ne ricava in particolare che la derivata direzionale di  $\exp$  nel punto  $A$  in direzione  $B$  è

$$\frac{d}{ds} \exp(A + sB)|_{s=0} = \exp(A)Q_1(1) = \int_0^1 \exp((1 - \tau)A)B \exp(\tau A) d\tau .$$

( Sugg. usate l'esercizio 22.37 con  $Y(t, s) = \exp(-tA) \exp(t(A + sB))$  e poi ponete  $t = 1$ .)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1N1']

E18.34 Prerequisiti:18.28.Difficoltà:\*

[1N2]

Dimostrate la relazione

$$\frac{d}{dt} \exp(A + tB)|_{t=0} = \int_0^1 \exp(sA)B \exp((1 - s)A) ds .$$

usando le relazioni (18.29) e (18.30) di esercizio 18.28.

## §19 Funzioni analitiche

[1N4]

La teoria necessaria per lo svolgimento dei successivi esercizi si può trovare nel Cap. 6 di [3] o Cap. 8 di [23].

### Esercizi

E19.1 Prerequisiti: 16.20.

[1N5]

Si verifichi che la funzione  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(vista anche in 16.20) non è analitica.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1N6']

E19.2 Note: Esercizio 2 del compito Marzo 2010.

[1N7]

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo aperto non vuoto. Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$  tale che  $\forall x \in I, \forall k \geq 0$ , si ha  $f^{(k)}(x) \geq 0$ : si mostri che  $f$  è analitica.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1N9'] Si veda anche l'esercizio 16.30.

E19.3 Prerequisiti: 18.7.

[1NC]

Sia  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , si mostri che è analitica su tutto  $\mathbb{R}$ , ma il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di Taylor centrato in  $x_0$  è  $\sqrt{1+x_0^2}$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1ND'] [UNACCESSIBLE UUID '1NF']

Studiate similmente anche  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$  oppure  $f(x) = e^{1/(x^2+1)}$ .

E19.4 Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^\infty$ ; sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  e sia

[1NG]

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

la serie di Taylor; supponiamo che  $g$  abbia raggio di convergenza  $R > 0$ : dunque  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  è un funzione ben definita, dove  $J = (x_0 - R, x_0 + R)$ . Può succedere che  $f(x) \neq g(x)$  per un punto  $x \in J$ ?

E se  $f$  è analitica? <sup>†111</sup>

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1NH']

E19.5 Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo aperto non vuoto. Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ . Sia

[1NJ]

$$b_n = \sup_{x \in I} |f^{(n)}(x)| = \|f^{(n)}\|_\infty \quad ;$$

se

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{b_n} < \infty$$

<sup>†111</sup>Per "analitica" intendiamo: fissato  $x_0$  esiste una serie  $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  con raggio di convergenza non nullo tale che  $f = h$  in un intorno aperto di  $x_0$  (intorno contenuto nel disco di convergenza).

allora  $f$  è analitica.

Mostrate con un semplice esempio che la richiesta non è necessaria.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1NK'] [UNACCESSIBLE UUID '1NM']

E19.6 *Note:* Esercizio 1 Compito 30 Giugno 2017.

[1NN]

Sia  $f$  una funzione continua sull'intervallo  $[0, 1]$ . Si dimostri che la funzione

$$F(t) = \int_0^1 f(x)e^{tx} dx$$

è analitica su  $\mathbb{R}$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1NP']

E19.7 Sia  $I = (0, 1)$ , si trovi un esempio di una funzione analitica  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  non identicamente zero, ma tale che  $A = \{x \in I : f(x) = 0\}$  abbia un punto di accumulazione in  $\mathbb{R}$ . Si confronti questo esempio con la Prop. 6.8.4 negli appunti [3]; e con l'esempio 16.26.

[1NQ]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1NR']

---

## §20 Curve

[1NT]

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico.

**Definizione 20.1.** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo.

[1NV]

- Una funzione continua  $\gamma : I \rightarrow X$  è detta **curva parametrica**, o più semplicemente nel seguito curva.
- Se  $\gamma$  è iniettiva si dice che la curva è **semplice**.
- Se  $\gamma$  è un omeomorfismo con la sua immagine, si dice che la curva è **inclusa**, o anche **embedded**.
- Se  $X = \mathbb{R}^n$  e  $\gamma$  è di classe  $C^1$  e  $\gamma'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ , allora  $\gamma$  è detta una **curva immersa** o **curva regolare**.<sup>†112</sup>

Chiameremo **sostegno** o **supporto** l'immagine  $\gamma(I)$  di una curva.

Si usa anche il termine arco come sinonimo di curva; <sup>†113</sup> questo termine viene prevalentemente usato quando la curva non è (necessariamente) chiusa.

Rimandiamo lo studio delle curve chiuse alla prossima sezione.

Riportiamo due nozioni di equivalenza di curve. La prima era presente in una versione preliminare delle note [3].

**Definizione 20.2.** Siano  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalli. Siano  $\gamma : I \rightarrow X$  e  $\delta : J \rightarrow X$  due curve. Si pone  $\gamma \sim \delta$  se esiste un omeomorfismo <sup>†114</sup> crescente  $\varphi : I \rightarrow J$  tale che  $\gamma = \delta \circ \varphi$ .

[1NW]

La seconda è la definizione 7.5.4 dal capitolo 7 sezione 5 dagli appunti [3].

**Definizione 20.3.** Siano  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalli. Siano  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\delta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  due curve regolari. Si pone  $\gamma \approx \delta$  se esiste un diffeomorfismo <sup>†115</sup>  $\varphi : I \rightarrow J$  monotono crescente, tale che  $\gamma = \delta \circ \varphi$ .

[1NX]

### Esercizi

E20.4 Prerequisiti: 20.2, 20.3.

[1J8]

Mostrare che la relazione  $\gamma \sim \delta$  è una relazione di equivalenza.

Mostrare che la relazione  $\gamma \approx \delta$  è una relazione di equivalenza.

E20.5 Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Mostrate che  $f$  è continua se e solo se, per ogni curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  si ha che  $f \circ \gamma$  è continua. *Soluzione nascosta:*

[1NY]

[UNACCESSIBLE UUID '1NZ']

E20.6 Supponiamo che  $I$  sia un intervallo chiuso e limitato; usate l'esercizio 9.113 per mostrare che un arco  $\gamma : I \rightarrow X$  semplice è un omeomorfismo con la sua immagine, e dunque la curva è “embedded”.

[1P0]

Il risultato è ancora vero se  $I$  non è chiuso? E se  $I$  non è limitato?

E20.7 Prerequisiti: 20.6. Difficoltà: \*.

[1P1]

<sup>†112</sup>Negli appunti [3] si usa *curva regolare* e così anche in alcuni testi come [1].

<sup>†113</sup>Notare che però in [23] “arc” è una curva iniettiva.

<sup>†114</sup>vedere 7.73.

<sup>†115</sup>Un diffeomorfismo è una funzione bigettiva  $\varphi : I \rightarrow J$  di classe  $C^1$ , la cui inversa è di classe  $C^1$ ; in particolare  $\varphi'$  non è mai nulla, e (quando dominio e codominio sono intervalli) ha sempre lo stesso segno.

Presa una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiamo nel seguito  $\hat{I} = \{t \in \mathbb{R} : -t \in I\}$  e  $\hat{\gamma} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tramite  $\hat{\gamma}(t) = \gamma(-t)$ .

Vogliamo mostrare che, in certe ipotesi, due curve hanno lo stesso sostegno se e solo se sono equivalenti.

- Siano  $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  curve semplici, ma non chiuse, e con lo stesso sostegno. Mostrate che se  $\gamma(0) = \delta(0)$  allora  $t = 0$  oppure  $t = 1$ . Nel caso  $\gamma(0) = \delta(0)$ , mostrate che  $\gamma \sim \delta$ . Se invece  $\gamma(0) = \delta(1)$  allora  $\hat{\gamma} \sim \delta$ .
- Siano  $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  curve semplici e immerse, ma non chiuse, e con lo stesso sostegno, e sia  $\gamma(0) = \delta(0)$ : mostrate che  $\gamma \approx \delta$ . Se invece  $\gamma(0) = \delta(1)$  allora  $\hat{\gamma} \approx \delta$ .

(Per il caso di curve chiuse si veda 20.20)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1P2']

E20.8 Mostrate che  $[0, 1]$  e  $[0, 1]^2$  non sono omeomorfi. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE [1P3] UUID '1P4']

E20.9 Prerequisiti: 9.113, 20.8. Mostrate che non si può trovare una curva  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  continua e bigettiva; dunque una curva  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  che è continua e surgettiva, non può essere iniettiva: come ad esempio la curva di Peano o la curva di Hilbert. [1P5]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1P6']

E20.10 Note: Bella formula tratta da [68]. [1P7]

Sia  $S = S(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$  la sfera unitaria  $S = \{x : |x| = 1\}$ . Sia  $v, w \in S$  con  $v \neq w$  e  $v \neq -w$ ; sia  $T = \arccos(v \cdot w)$  in modo che  $T \in (0, \pi)$ ; quindi la geodetica (cioè la curva di lunghezza minima parametrizzata dall'arco)  $\gamma(t) : [0, T] \rightarrow S$  che connette  $v$  a  $w$  all'interno  $S$  è

$$\gamma(t) = \frac{\sin(T-t)}{\sin(T)}v + \frac{\sin(t)}{\sin(T)}w \quad ,$$

e la sua lunghezza è  $T$ .

(Si può presumere che, quando  $v \cdot w = 0$  cioè  $T = \pi/2$ , allora la geodetica è  $\gamma(t) = v \cos(t) + w \sin(t)$ ). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1P8']

## §20.a Curve chiuse

Aggiungiamo altre definizioni a quelle già viste in 20.1.

**Definizione 20.11.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Sia  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo chiuso e limitato. Sia  $\gamma : I \rightarrow X$  una curva parametrica. [1PB]

- Se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  si dice che la curva è **chiusa**;
- inoltre si dice che la curva è **semplice e chiusa** se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e  $\gamma$  è iniettiva quando ristretta a  $[a, b)$ .<sup>†116</sup>
- Se  $X = \mathbb{R}^n$  e  $\gamma$  è di classe  $C^1$  e è chiusa, si assume ulteriormente che  $\gamma'(a) = \gamma'(b)$ .

<sup>†116</sup>Cioè, non si richiede la iniettività negli estremi.

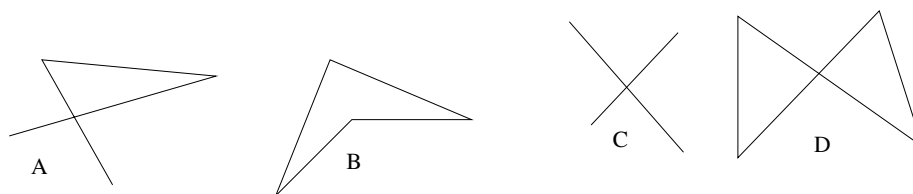


Figura 6: Insiemi dell'esercizio 20.12

### Esercizi

E20.12 Consideriamo i sottoinsiemi del piano delle seguenti figure 6: quali possono essere sostegno di una curva semplice? oppure di una curva chiusa semplice? oppure unione di sostegni di due curve semplici (possibilmente chiusi)? (*Dimostrate le vostre affermazioni.*) [1PC]

E20.13 Sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  una curva chiusa, mostrate che ammette un'estensione  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow X$  continua e periodica di periodo 1. [1PF]

E20.14 Sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva chiusa di classe  $C^1$ , mostrate che ammette un'estensione  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  periodica di periodo 1 e di classe  $C^1$ . [1PG]

E20.15 Useremo le definizioni e i risultati della Sezione §9.o, in particolare 9.169. [1PH]

Data  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow X$  continua e periodica di periodo 1, possiamo definire la mappa  $\hat{\gamma} : S^1 \rightarrow X$  tramite la relazione

$$\hat{\gamma}((\cos(t), \sin(t))) = \tilde{\gamma}(t) .$$

Mostrate che questa è una buona definizione, e che  $\hat{\gamma}$  è continua.

Usate l'esercizio 9.113 per mostrare che ogni arco semplice chiuso, se visto equivalentemente come mappa  $\hat{\gamma} : S^1 \rightarrow X$ , è un omeomorfismo con la sua immagine.

Nel seguito useremo mappe periodiche per rappresentare le curve chiuse.

### Esercizi

E20.16 Adattate la nozione di equivalenza 20.2 al caso di archi semplici e chiusi, vedendoli però come mappe  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$  continue e periodiche di periodo 1; quali ipotesi richiediamo alle mappe  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ? [1PK]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1PM']

E20.17 Prerequisiti: 20.2, 20.13. Siano  $\gamma, \delta$  curve chiuse, ma viste come mappe definite su  $\mathbb{R}$  e continue e periodiche di periodo 1. [1PN]

Vediamo una nuova relazione: si ha  $\gamma \sim_f \delta$  sse esiste un omeomorfismo crescente  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e per cui  $\gamma = \delta \circ \varphi$

Mostrate che questa è una relazione di equivalenza.

Confrontatela con la relazione  $\sim$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1PP']



E20.18 Prerequisiti: 20.3, 20.14. Siano  $\gamma, \delta$  curve chiuse e immerse, ma viste come mappe definite su  $\mathbb{R}$  e  $C^1$  e periodiche di periodo 1. [1PQ]

Vediamo una nuova relazione: si ha  $\gamma \approx_f \delta$  se esiste un diffeomorfismo crescente  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e per cui  $\gamma = \delta \circ \varphi$

Mostrate che questa è una relazione di equivalenza.

Confrontatela con la relazione  $\approx$ .

E20.19 Prerequisiti: 20.3, 20.14, 20.18. Date un semplice esempio di curve chiuse immerse per cui si ha  $\gamma \approx_f \delta$  ma non  $\gamma \approx \delta$ . [1PR]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1PS']

E20.20 Prerequisiti: 20.6. Difficoltà: \*. [1PT]

Siano  $\gamma, \delta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  curve chiuse semplici e immerse e con lo stesso sostegno; poniamo  $\hat{\gamma}(t) = \gamma(-t)$ : mostrate che o  $\gamma \approx_f \delta$  oppure  $\hat{\gamma} \approx_f \delta$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1PV']

Altri esercizi riguardo alle curve sono 10.21, 14.24, 16.63 e 23.4; si veda inoltre la Sezione §22.d.

---

## §21 Superfici

[1PZ]

### Esercizi

E21.1 Prerequisiti: 16.51. Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ ; sia  $\bar{x} \in A$  tale che  $f(\bar{x}) = 0$ , e  $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ : per il teorema di funzione implicita 16.51 l'insieme  $E = \{f = 0\}$  è un grafico in un intorno di  $\bar{x}$ , e il piano tangente a questo grafico è l'insieme degli  $x$  per cui

$$\langle x - \bar{x}, \nabla f(\bar{x}) \rangle = 0 .$$

Confrontate questo risultato col Lemma 7.7.1 negli appunti [3]: “il gradiente è ortogonale agli insiemi di livello”. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q1']

E21.2 Dato  $m > 0$ , mostrate che la relazione  $xyz = m^3$  definisce una superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Provate che i piani tangenti alla superficie nei punti del primo ottante  $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$  formano con i piani coordinati di  $\mathbb{R}^3$  un tetraedro di volume costante.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q3']

E21.3 Sia  $a > 0$ . Mostrare che la relazione  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  definisce una superficie regolare dentro il primo ottante  $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$ . Provare che i piani tangenti alla superficie tagliano i tre assi coordinati in tre punti, la somma delle cui distanze dall'origine è costante.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q5']

E21.4 Siano  $a > 0, b > 0, c > 0$ . Si determini un piano tangente all'ellissoide

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

in un punto con  $x, y, z > 0$ , in modo che il tetraedro delimitato da questo piano e dai piani coordinati abbia volume minimo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q9']

## §22 Equazioni differenziali

[1QB]

Per poter risolvere i seguenti esercizi sarà necessario conoscere alcuni risultati fondamentali, quali: il Teorema di esistenza e unicità locale <sup>†117</sup>, il Lemma di Gronwall; e in generale i metodi per analizzare, risolvere e/o studiare qualitativamente le Equazioni Differenziali. Questi si possono per esempio trovare in [26, 21, 20, 3].

### Esercizi

E22.1 Per ogni punto  $(x, y)$  del piano con  $x, y > 0$  passa un'unica ellissi  $4x^2 + y^2 = a$  (con  $a > 0$ ). Descrivete la famiglia di curve che in ogni punto sono ortogonali all'ellisse passante per quel punto. Si veda la figura 7. [1QC]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QF']

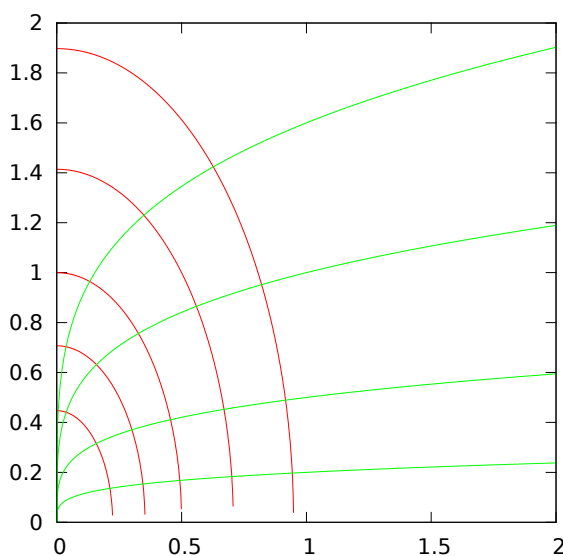


Figura 7: Ellissi (in rosso) e curve a esse ortogonali.

E22.2 Prerequisiti: 16.4. [1QH]

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo aperto.

Sia  $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  funzione continua positiva, e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile che risolve l'equazione differenziale

$$(f'(x))^2 = F(x, f(x)) \quad .$$

Mostrate allora che  $x$  è sempre crescente, nel qual caso si ha  $f'(x) = \sqrt{F(x, f(x))}$  per ogni  $x$ , oppure è sempre decrescente, nel qual caso si ha  $f'(x) = -\sqrt{F(x, f(x))}$ ; e che dunque  $f$  è di classe  $C^1$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QJ']

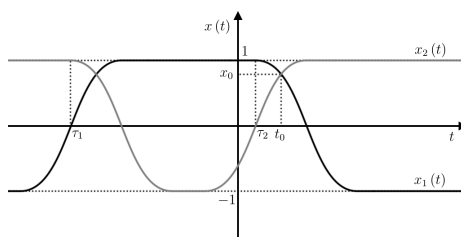


Figura 8: Figura per 22.3

E22.3 Prerequisiti:22.2.

[1QK]

Descrivete tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabili che risolvono

$$\forall x, (f'(x))^2 + (f(x))^2 = 1.$$

Mostrate che se  $-1 < f(x) < 1$  per  $x \in I$  intervallo aperto allora si ha che  $f$  è un arco di sinusoidale per  $x \in I$ .

Mostrate che tutte le soluzioni sono  $C^1$ , e che sono  $C^\infty$  a tratti.

Vedrete che  $f \equiv 1$  e  $f \equiv -1$  sono involucri delle altre soluzioni, come spiegato nella sezione §22.d.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QM']

E22.4 Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^2$  tale che  $f(0) = f(1) = 0$  e  $f'(x) = f(x)f''(x)$  per ogni  $x \in [0, 1]$ . [1QN]

Si provi che la funzione  $f$  è identicamente nulla.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QP'] [UNACCESSIBLE UUID '1QQ']

## §22.a Problemi autonomi

### Esercizi

E22.5 Prerequisiti:15.3. Siano dati  $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$  fissati e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzione limitata e continua con  $f(x_0) = 0$  ma  $f(x) > 0$  per  $x \neq x_0$ . Vogliamo studiare il problema autonomo [1QR]

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) , \\ x(t_0) = x_0 . \end{cases}$$

Notate che  $x \equiv x_0$  è una possibile soluzione. Mostrate che se, per  $\varepsilon > 0$  piccolo, <sup>†118</sup>

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{f(y)} dy = \infty \quad (22.6)$$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{1}{f(y)} dy = \infty \quad (22.7)$$

<sup>†117</sup>Anche noto come: teorema di Picard–Lindelöf theorem, o di Cauchy–Lipschitz.

<sup>†118</sup>Se la condizione vale per un  $\varepsilon > 0$  allora vale per ogni  $\varepsilon > 0$ , dato che  $f > 0$  lontano da  $x_0$ .

allora  $x \equiv x_0$  è l'unica soluzione; mentre in caso contrario esistono molte soluzioni di classe  $C^1$ ; descrivetele tutte.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QS']

Le condizioni (22.6) e (22.7) sono un caso particolare della condizione di unicità di Osgood, si veda Problem 2.25 in [26].

E22.8 Sia  $\alpha > 1$  e si consideri l'equazione [1QV]

$$\begin{cases} x'(t) = |x(t)|^\alpha, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con  $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$  fissati. Mostrate che si ha esistenza e unicità della soluzione; calcolate l'intervallo massimale di definizione; usate il metodo di separazione delle variabili per calcolare esplicitamente le soluzioni. (Essendo la equazione autonoma, si potrebbe assumere che  $t_0 = 0$ , ma l'esempio risulta forse più chiaro con un  $t_0$  generico).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QW']

E22.9 Cosa succede nell'esercizio precedente nel caso  $\alpha \in (0, 1)$ ? [1QX]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QY']

E22.10 Prerequisiti: 22.8. Sia  $\alpha > 1$  e si consideri di nuovo [1QZ]

$$\begin{cases} x'(t) = |x(t)|^\alpha, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

abbiamo visto in 22.8 che questo ammette una soluzione massimale  $x : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ . Fissato  $t \in \mathbb{R}$  mostrate che si ha  $t \in I_\alpha$  per  $\alpha > 1$  vicino a 1, e che  $\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} x(t) = e^t$ .

Notate che  $e^t$  è la unica soluzione di  $x'(t) = |x(t)|$  con  $x(0) = 1$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1R0']

## §22.b Risoluzione

### Esercizi

E22.11 Sia data  $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua; trovate le  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che risolvono [1R1]

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \Theta\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

(Sugg. si effettui il cambio di variabili  $f(x) = xh(x)$  e si trovi e risolva un'equazione differenziale per  $h(x)$ .)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1R2']

E22.12 Trovate le soluzioni del problema [1R4]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}$$

con la sostituzione  $z = y/x$ , e anche confrontandolo col problema

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y}{y}$$

## §22.c Discussioni qualitative

Per i successivi esercizi può essere utile il seguente semplice lemma di confronto.

**Lemma 22.13.** Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto, siano  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  continue con  $f \geq g$ ; sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo aperto con  $t_0 \in I$ , e siano  $x, w : I \rightarrow \mathbb{R}$  soluzioni di [1R7]

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad w(t) = g(t, w(t))$$

con  $x(t_0) \geq w(t_0)$ : allora  $x(t) \geq w(t)$  per  $t \geq t_0$ . Basta infatti notare che  $x'(t) \geq w'(t)$  e dunque  $x(t) - w(t)$  è crescente.

(Vi sono versioni molto più raffinate di questo lemma, si veda ad esempio nella sezione 8.6 negli appunti del corso [3]).

### Esercizi

E22.14 Discutete le soluzioni di [1R8]

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x) - x)^3 \\ y(0) = a \end{cases}$$

Studiate in modo qualitativo l'esistenza (locale o globale) delle soluzioni, e le proprietà di monotonia e convessità/concavità.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1R9'] [UNACCESSIBLE UUID '1RB']

E22.15 Si considera il problema di Cauchy [1RD]

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x)^2 + x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Mostrate che esiste unica la soluzione globale  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , che  $y$  è limitata e esistono finiti i limiti  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1RG'] [UNACCESSIBLE UUID '1RH']

E22.16 Discutete l'equazione differenziale [1RK]

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x) - x^2} \\ y(0) = a \end{cases}$$

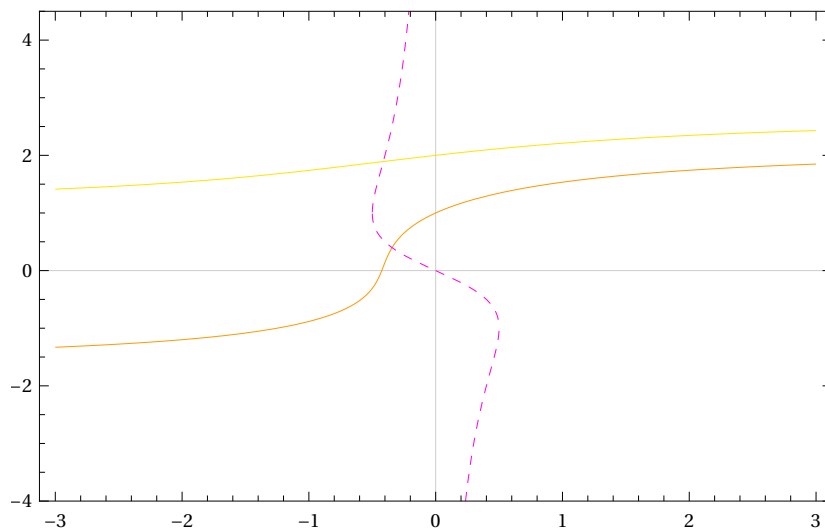
per  $a \neq 0$ , studiando in modo qualitativo l'esistenza (locale o globale) delle soluzioni, e le proprietà di monotonia e convessità/concavità. <sup>†119</sup>

Mostrate che la soluzione esiste per tutti i tempi positivi.

Mostrate che per  $a > 0$  la soluzione non si estende a tutti i tempi negativi.

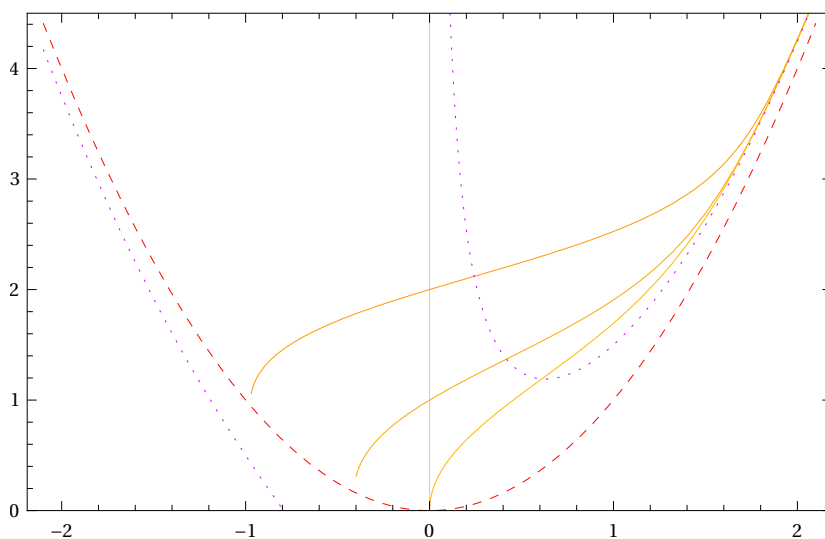
**Difficoltà:\*** Mostrate che esiste un  $\tilde{a} < 0$  critico tale che, per  $\tilde{a} < a < 0$  la soluzione non si estende a tutti i tempi negativi, mentre per  $a \leq \tilde{a}$  la soluzione esiste per tutti i tempi negativi; inoltre per  $a = \tilde{a}$  si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) - x^2 = 0$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1RP']



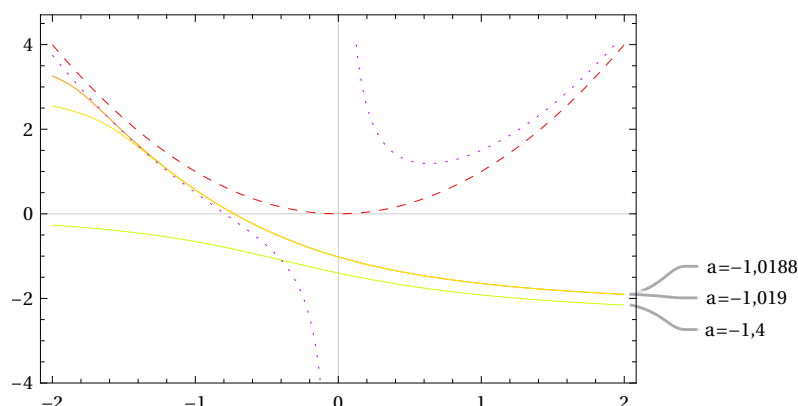
In viola tratteggiato la linea dei flessi. In giallo le soluzioni con dati iniziali  $y(0) = 1$  e  $y(0) = 2$ .

Figura 9: Esercizio 22.15.



In viola a puntini la linea dei flessi. In rosso tratteggiato la parabola dove la derivata della soluzione è infinita. In giallo le soluzioni con dati iniziali  $y(0) = 2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(0) = 1/1000$ .

Figura 10: Esercizio 22.16. Soluzioni per  $a > 0$



In viola a puntini la linea dei flessi. In rosso tratteggiato la parabola dove la derivata della soluzione è infinita. Sono disegnate le soluzioni con dati iniziali  $a = -1,4$  (“verde”),  $a = -1,0188$  (“arancione”) e  $a = -1,019$  (“gialla”). Notate che queste ultime si differenziano solo per 0,0002 come dati iniziali, sono indistinguibili nel grafico per  $x > -1$ , ma poi per  $x < -1$  si allontanano velocemente, e per  $x = -2$  valgono rispettivamente 3,25696 e 2,54856, con una differenza di circa 0,7 !

Figura 11: Esercizio 22.16. Soluzioni per  $a < 0$

E22.17 Note: Esercizio 4, compito 9 Luglio 2011. Si dimostri che il problema di Cauchy

[1RQ]

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)(y(x) - x^2) \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione  $y = y(x)$ , definita su tutto  $\mathbb{R}$  e tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0 \quad .$$

<sup>†119</sup>L'equazione differenziale è tratta dall'esercizio 13 in [2].



### §22.d Inviluppo

Data una famiglia di curve planari, vogliamo definire la *curva inviluppo*. Vediamo due possibili definizioni.

**Definizione 22.18** (Inviluppo di curve).

[23Y]

- Supponiamo che le curve nel piano siano descritte dall'equazione in forma implicita  $F(x, y, a) = 0$ ; cioè, fissato il parametro  $a$ , la curva è il luogo

$$\{(x, y) : F(x, y, a) = 0\} \quad ;$$

allora l'inviluppo si ottiene ricavando la  $a$  dalla equazione  $\frac{\partial}{\partial a} F(x, y, a) = 0$  e sostituendola nella  $F(x, y, a) = 0$ .

- Per semplicità, consideriamo curve che sono funzioni dell'ascissa. Sia  $y = f(x, a) = f_a(x)$  una famiglia di funzioni, con  $x \in I, a \in J$  (intervalli aperti), allora  $y = g(x)$  è l'inviluppo di  $f_a$  se il grafico di  $g$  è coperto dall'unione dei grafici delle  $f_a$  e la curva  $g$  è tangente a ogni  $f_a$  laddove la tocca; più precisamente, per ogni  $x \in I$  esiste  $a \in J$  per cui  $g(x) = f(x, a)$ , e inoltre, per ogni scelta di  $a$  che soddisfa  $g(x) = f(x, a)$ , si ha  $g'(x) = f'(x, a)$ .

**Nota 22.19.** La curva inviluppo ha una importante proprietà nel campo delle equazioni differenziali. Supponiamo infatti che  $y = f_a(x)$  siano soluzioni della equazione differenziale  $\Phi(y', y, x) = 0$ : allora anche  $g$  è soluzione (verifica immediata).<sup>†120</sup>

[240]

Vogliamo vedere che le due precedenti definizioni sono equivalenti, in questo senso.

#### Esercizi

E22.20 Partiamo dalla prima definizione. Supponiamo di poter applicare il Teorema di Funzione Implicita al luogo

[1RV]

$$E_a = \{(x, a) : F(x, y, a) = 0\} \quad ;$$

precisamente, supponiamo che in un punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$  si abbia che  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ . A questo aggiungiamo anche l'ipotesi  $\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \neq 0$ . Fissato  $a$ , si può esprimere  $E_a$  localmente come grafico  $y = f(x, a) = f_a(x)$ . Usiamo inoltre l'ipotesi  $\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \neq 0$  per esprimere localmente  $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$  come grafico  $a = \Phi(x, y)$ . Definito  $G(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, y, \Phi(x, y))$ , mostrate che  $G = 0$  può essere rappresentato come  $y = g(x)$ . Mostrate infine che  $g$  è l'inviluppo delle curve  $f_a$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1RW'] [UNACCESSIBLE UUID '1RX']

E22.21 Nelle ipotesi precedenti, supponendo che  $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$  e  $\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} > 0$ , mostrate che il grafico dell'inviluppo  $g$  è localmente il "bordo" dell'unione dei grafici delle  $f_a$ , nel senso che  $g(x) \geq f_a(x)$  con uguaglianza per un solo  $a$ .

[1RY]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1RZ'] [UNACCESSIBLE UUID '1S0']

E22.22 Note: Dal testo [20], a pg 84. Consideriamo le curve

[1S1]

$$y = f(x, a) = ax + \frac{a^2}{2}$$

- Trovate un'equazione differenziale risolta da tutte le curve. (Sugg. Si elimini  $a$  dal sistema  $y = f, y' = \frac{\partial}{\partial x} f$ . Il risultato può essere lasciato in forma non normale.)
- Calcolate l'involuppo; verificate che soddisfa la equazione differenziale prima ottenuta.

Si veda anche la figura 12. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1S2']

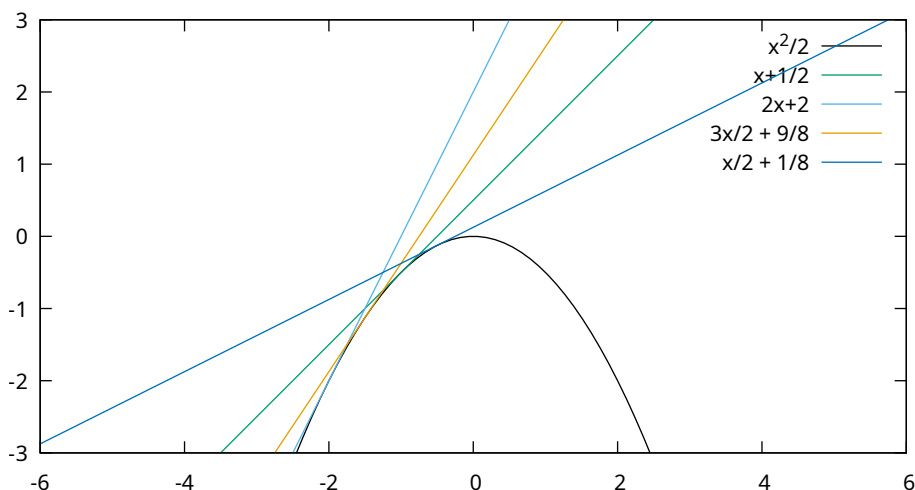


Figura 12: Soluzione di 22.22: involuppo.

E22.23 Consideriamo le ellissi  $ax^2 + y^2/a = 2$  (con  $a > 0$ ).

[1S4]

- Trovate la regione del piano coperta da queste ellissi.
- Mostrate che il bordo di questa regione è l'involuppo delle ellissi, e descrivetelo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1S5'] [UNACCESSIBLE UUID '1S6']

E22.24 Consideriamo le rette  $ax + y/a = 1$  (con  $a > 0$ ).

[1S7]

- Trovate la regione del primo quadrante coperta da queste rette.
- Mostrate che il bordo di questa regione è l'involuppo delle rette e descrivetelo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1S8']

E22.25 Consideriamo le rette

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{1-a} = 1$$

[189]

con  $x, y, a \in (0, 1)$ . Descrivete la curva involuppo.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1SB']

---

<sup>†120</sup>Con le equazioni in forma normale però questa nozione non è interessante perché si ha unicità locale e allora non vi possono essere soluzioni speciali; cioè se  $g = f_a$   $g' = f'_a$  in un punto  $x$  allora coincidono in un intorno.

## §22.e Equazioni lineari (a coefficienti costanti)

**Definizione 22.26.** Indichiamo formalmente con  $D$  l'operazione "calcolo della derivata". Dato un polinomio  $p(x)$  [23Z]

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

(che ha coefficienti  $a_i \in \mathbb{C}$ , costanti) costruiamo formalmente l'operatore lineare

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

che trasforma una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^{n+k}$  nella funzione  $p(D)f$ , di classe almeno  $C^k$ , definita puntualmente da

$$[p(D)f](x) \stackrel{\text{def}}{=} a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) \quad .$$

### Esercizi

E22.27 Dati due polinomi  $p(x), q(x)$  e il polinomio prodotto  $r(x) = p(x)q(x)$ , mostrate che  $p(D)[q(D)f] = r(D)f$  [15C]

E22.28 Posta  $f(x) = e^{\lambda x}$ , notate che [15D]

$$[p(D)f](x) = p(\lambda)f(x) \quad .$$

Possiamo dunque considerare gli esponenziali  $e^{\lambda x}$  come autovettori di  $p(D)$ , con autovalore  $p(\lambda)$ .

E22.29 Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione di classe  $C^n$ , sia  $\theta \in \mathbb{C}$  costante e sia  $g(x) = e^{\theta x} f(x)$ . Mostrate che, se  $p$  è un polinomio e  $q(x) = p(x + \theta)$ , allora [15F]

$$p(D)g = e^{\theta x} [q(D)f] \quad .$$

Notate che possiamo scrivere la relazione anche come un "coniugio"

$$e^{-\theta x} [p(D)[e^{\theta x} f]] = p(D + \theta)f \quad .$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15G']

E22.30 Prerequisiti: 22.29. Dati  $\theta \in \mathbb{C}$  e  $k \in \mathbb{N}$ , posto  $p(x) = (x - \theta)^k$ , mostrate che  $p(D)f = 0$  se e solo se  $f(x) = e^{\theta x} r(x)$  con  $r$  polinomio di grado al più  $k - 1$ . [15H]

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15J']

E22.31 Prerequisiti: 15.1, 22.29. [15K]

Siano dati  $\theta, \tau \in \mathbb{C}$  con  $\theta \neq \tau$ ,  $q(x)$  un polinomio, e  $k \in \mathbb{N}$ ; poniamo  $p(x) = (x - \theta)^k$ . Mostrate che

$$p(D)f(x) = e^{\tau x} q(x)$$

se e solo se

$$f(x) = e^{\theta x} r(x) + e^{\tau x} \tilde{q}(x) \quad ,$$

con  $r$  polinomio di grado al più  $k - 1$  e  $\tilde{q}$  polinomio dello stesso grado di  $q$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15M']

E22.32 Dati  $a_0 \dots a_n \in \mathbb{C}$  costanti, con  $a_n \neq 0$ , e posto  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , descrivete tutte le possibili soluzioni  $f$  di [1SN]

$$p(D)f = 0.$$

Mostrate che lo spazio delle soluzioni è uno spazio vettoriale (basato sul campo  $\mathbb{C}$  dei numeri complessi) di dimensione  $n$ .

(Sugg. fattorizzate il polinomio e sfruttate gli esercizi precedenti.).

E22.33 Prerequisiti: 22.32. Con  $p$  come sopra, analizzate inoltre il problema [1SP]

$$p(D)f = e^{\alpha x}$$

(con  $\alpha \in \mathbb{C}$  costante).

Cosa succede quando  $\alpha$  si avvicina a una radice del polinomio  $p$ ?

[UNACCESSIBLE UUID '1SQ'] Dati i parametri  $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$ , e anche  $\alpha \in \mathbb{C}$ , la soluzione del problema di Cauchy [1SR]

$$\begin{cases} p(D)f = e^{\alpha x} \\ f(0) = y_0, \\ \dots \\ f^{n-1}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

esiste per tutti i tempi, e dipende con continuità dai parametri  $\alpha, y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$ .

E22.34 Data  $h = h(x)$ , e  $\theta \in \mathbb{R}$ , risolvete le equazioni differenziali [1SS]

$$(D - \theta)f(x) = h(x)$$

$$(D - \theta)^2 f(x) = h(x)$$

$$(D^2 + \theta^2)f(x) = h(x)$$

$$(D^2 - \theta^2)f(x) = h(x)$$

e i casi particolari

$$(D - 1)f(x) = x^k$$

$$(D - \theta)f(x) = e^{\alpha x}$$

(con  $\alpha \in \mathbb{C}$ , e  $k \in \mathbb{N}$ , costanti).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SV']

## §22.f Equazioni matriciali

Per risolvere i seguenti esercizi bisogna conoscere le proprietà elementari dell'esponenziale di matrici, si veda in sezione §18.c.

### Esercizi

E22.35 Prerequisiti: 18.24, 18.23, Sezione §18.c. [15W]

Date  $A, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  funzioni continue a valori matrici, risolvete l'equazione differenziale

$$X' = AX + F, X(0) = C,$$

dove  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ .

(Sugg.: usate il metodo di variazione delle costanti: sostituite  $Y(t) = \exp(-tA)X(t)$ )

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SX']

E22.36 Prerequisiti: 18.24, 18.23, Sez. §18.c. Difficoltà: \*. [15Y]

Date matrici  $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , risolvete l'equazione differenziale

$$X' = AX + XB, X(0) = C,$$

dove  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SZ']

E22.37 Prerequisiti: 11.35, 11.44. Difficoltà: \*. [1T1]

Sia  $V = \mathbb{C}^{n \times n}$  lo spazio delle matrici, lo dotiamo di una norma  $\|C\|_V$  submoltiplicativa. Sia  $C \in V$  e siano  $A, B : \mathbb{R} \rightarrow V$  curve continue nello spazio delle matrici.

- Definite ricorsivamente  $Q_0 = C$ , e

$$Q_{n+1}(s) = \int_0^s A(\tau)Q_n(\tau)B(\tau) d\tau;$$

mostrate che la serie

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t)$$

è ben definita, mostrando che, per ogni  $T > 0$ , converge totalmente nello spazio delle funzioni continue  $C^0 = C^0([-T, T] \rightarrow V)$ , dotato della norma

$$\|Q\|_{C^0} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|t| \leq T} \|Q(t)\|_V.$$

- Mostrate che la funzione appena definita è la soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} Y(t) = A(t)Y(t)B(t), \quad Y(0) = C.$$

- Nel caso in  $A, B$  siano costanti, notate che

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{A^n C B^n}{n!}.$$

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1T2']

E22.38 Prerequisiti: 22.37, 22.38. Note: Identità di Abel.

[1T3]

Siano date  $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  continua, e la soluzione  $Y(t)$  dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t) \quad , \quad Y(0) = C$$

(che è stata studiata in 22.37). Posto  $a(t) = \text{tr}(A(t))$ , mostrate che

$$\det(Y(t)) = \det(C)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} \quad .$$

Se  $C$  è invertibile se ne deduce che  $Y(t)$  è sempre invertibile.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1T4']

E22.39 Prerequisiti: 18.24, 18.23, 22.37.

[1T6]

Siano date  $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $F, A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  continue, e la soluzione  $Y(t)$  della equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t) \quad , \quad Y(0) = \text{Id} \quad .$$

Risolvete la equazione

$$X' = AX + F \quad , \quad X(0) = C \quad ,$$

dove  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ , usando  $Y(t)$  come funzione ausiliaria.

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1T7']

---

## §23 (pseudo)compit(in)i

[1T8]

### Esercizi

E23.1 *Note:rielaborato dal compito 26 Gennaio 2016.*

[1T9]

Sia  $(q_n)_{n \geq 1}$  una enumerazione dei razionali di  $(0, 1)$  e definiamo

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n: q_n < t} 2^{-n}$$

e

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n: q_n \leq t} 2^{-n}$$

per  $t \in (0, 1)$ .

- Mostrate che  $f, g$  sono strettamente crescenti.
- Calcolate i limiti per  $t \downarrow 0$  e  $t \uparrow 1$ .
- Mostrate che  $f$  è continua a sinistra,  $g$  è continua a destra, e che

$$\lim_{\tau \rightarrow t^+} f(\tau) = g(t) \quad , \quad \lim_{\tau \rightarrow t^-} g(\tau) = f(t) \quad .$$

- Mostrate inoltre che  $f$  è discontinua in  $t$  se e solo se  $t \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ ; e similmente per  $g$ .
- Cosa cambia se sostituiamo  $2^{-n}$  con il termine  $a_n$  di una serie assolutamente convergente?

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1TB'] [UNACCESSIBLE UUID '1TC']

E23.2 *Prerequisiti: 13.9. Note: compito 23 giugno 2012.*

[1TD]

Sia  $f$  una funzione di classe  $C^1$  su  $\mathbb{R}$ , con  $f(0) \neq 0$ . Si dimostri che esiste  $x \in \mathbb{R}$  tale che i due vettori

$$v = (x, f(x)) \quad , \quad w = (-f'(x), 1)$$

siano linearmente dipendenti. (Notate che il vettore  $w$  è ortogonale al tangente al grafico di  $f$ .) Si discuta la possibilità che questa condizione sia verificata per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

*Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1TF']

E23.3 *Note:riadattati dal compitino 9 apr 2011.*

[1TG]

Sia  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = +\infty \quad .$$

- Fissato  $a < f(0)$  sia  $M_a$  l'insieme degli  $m \in \mathbb{R}$  tali che la retta  $y = mx + a$  intersechi il grafico  $y = f(x)$  della funzione  $f$  in almeno un punto: si mostri che  $M_a$  ammette minimo  $\hat{m} = \hat{m}(a)$ ;
- si mostri che  $\hat{m}$  dipende in modo continuo da  $a$ ,<sup>†121</sup>
- e che  $\hat{m}(a)$  è monotona strettamente decrescente.

---

<sup>†121</sup>Suggerimento: ripensate all'esercizio 13.9.



- Se  $f$  è derivabile, si mostri che la retta  $y = \hat{m}(a)x + a$  è tangente al grafico in tutti i punti in cui lo incontra.
- Supponiamo ulteriormente che  $f$  sia di classe  $C^2$  e che  $f''(x) > 0 \forall x > 0$  <sup>†122</sup>. Si mostri che vi è un unico punto  $x$  in cui la retta  $y = \hat{m}(a)x + a$  incontra il grafico  $y = f(x)$ ; lo chiamiamo  $\hat{x} = \hat{x}(a)$ ;
- e mostrate che le funzioni  $a \mapsto \hat{x}(a)$  e  $a \mapsto \hat{m}(a)$  sono derivabili.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1TH']

E23.4 Argomenti: cerchio osculatore. Note: riadattati dal compitino 9 apr 2011.

[1TJ]

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile due volte in 0, con  $f(0) = 0$  e  $f''(0) \neq 0$ . Si dimostri che esistono unici un punto  $P = (a, b)$  nel piano e una costante  $r > 0$ , tali che

$$d(P, (x, f(x))) = r + o(x^2),$$

determinando  $a, b, r$  in funzione di  $f'(0), f''(0)$ . Si intende che  $d(P, Q)$  è la distanza euclidea fra due punti  $P, Q$  nel piano.

Sugg. per chiarirvi le idee, provate innanzitutto il caso in cui anche  $f'(0) = 0$ .

(Il grafico della funzione  $f$  è una curva nel piano; per ipotesi questa curva passa per l'origine; in questo esercizio abbiamo determinato il cerchio, di raggio  $r$  e centro  $P$ , che meglio approssima la curva nelle vicinanze dell'origine: questo cerchio è detto "cerchio osculatore", e il suo raggio si chiama "raggio di curvatura", e l'inverso del raggio è la "curvatura" della curva nell'origine.)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1TK'] [UNACCESSIBLE UUID '1TM']

E23.5 Note: Esercizio 2, Compito 4 Aprile 2009.

[1TN]

- Si verifichi che per ogni  $t > 1$  l'equazione

$$\sin x = x^t$$

ammette una e una sola soluzione  $x > 0$ .

- Chiamata  $f(t)$  tale soluzione, si determini l'immagine della funzione  $t$  e si dimostri che è strettamente crescente e continua su  $(1, +\infty)$ .
- Si dimostri che  $f$  si prolunga per continuità a  $t = 1$  e si discuta l'esistenza della derivata destra della funzione prolungata in tale punto.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1TP']

E23.6 Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che  $\cos(f(x))$  è derivabile: se ne può dedurre che  $f$  è derivabile? Se è vero, dimostrate; se non è vero, producite un esempio.

[1TS]

E23.7 Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f > 0$  e tale che  $\log(f(x))$  è convessa: se ne può dedurre che  $f$  è convessa? Se è vero, dimostrate; se non è vero, producite un esempio.

[1TT]

E23.8 Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ , con  $g > 0$ ; mostrate che  $f/g$  è di classe  $C^\infty$ .

[1TV]

E23.9 Sia  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  con raggio di convergenza  $\rho > 0$ , e sia  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$ ; si mostri che la funzione  $g(x) = f(x)/x^n$  è estendibile a  $x = 0$ ; si mostri (l'estensione di)  $g$  coincide con una opportuna serie di potenze  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ . Cosa si può dire del raggio di convergenza di  $g$ ?

[1TW]

E23.10 *Note: Criterio di Dirichlet per gli integrali.*

[1TX]

Siano  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continue, e inoltre  $f$  positiva e monotona decrescente con  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , mentre

$$\sup_{x>0} \left| \int_0^x g(t) dt \right| < \infty .$$

Dimostrate allora che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t)g(t) dt$$

converge.

E23.11 *Note: compito 12/1/2013.*

[1TY]

Dato un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{N}$  e un intero  $n \in \mathbb{N}$ , l'espressione

$$\frac{\text{card}(E \cap \{0, 1, \dots, n\})}{n + 1}$$

indica quale frazione del segmento  $\{0, 1, \dots, n\}$  è contenuta in  $E$ . La nozione di "densità" in  $\mathbb{N}$  di  $E$  è riferita al comportamento di tali frazioni al tendere di  $n$  all'infinito. Precisamente, si definiscono la densità superiore  $\bar{d}(E)$  di  $E$  e la sua densità inferiore  $\underline{d}(E)$  come

$$\bar{d}(E) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(E \cap \{0, 1, \dots, n\})}{n + 1} ,$$

$$\underline{d}(E) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(E \cap \{0, 1, \dots, n\})}{n + 1} .$$

Se  $\bar{d}(E) = \underline{d}(E) = d \in [0, 1]$ , si dice che  $E$  ha densità  $d$ . (Si veda anche [59].)

1. Si dimostri che, per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1$ , l'insieme  $E_\alpha = [n\alpha] : n \in \mathbb{N}$  ha densità  $d = 1/\alpha$  (il simbolo  $[x]$  indica la parte intera di  $x \in \mathbb{R}$ ).
2. Sia  $E = \{m_0, m_1, \dots, m_k, \dots\}$  un insieme infinito, con  $m_0 < m_1 < \dots < m_k < \dots$ . Si dimostri che  $\bar{d}(E) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{m_k}$  e  $\underline{d}(E) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{m_k}$ .
3. Si trovi un insieme  $E$  con  $\bar{d}(E) = \underline{d}(\mathbb{N} \setminus E) = 1$ .

E23.12 *Note: esercizio 6 nel compito del 13/1/2011.*

[1TZ]

Ogni numero intero  $n \geq 1$  si decompone in modo unico come  $n = 2^k d$ , con  $k \in \mathbb{N}$  e  $d$  intero dispari. Si consideri la successione  $a_n = d/2^k$  e se ne determinino

1. limite superiore e inferiore;
2. l'insieme dei punti limite.

E23.13 *Argomenti: matrice, determinante. Note: esercizio 4 nello pseudocompito del 14/3/2013.*

[1V0]

1. Sia  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  una matrice 2 per 2; identificando  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  con  $\mathbb{R}^4$ , si calcoli il gradiente del determinante e si verifichi che è non nullo se e solo se la matrice è non nulla.
2. Sia  $Z$  l'insieme delle matrici  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  con determinante nullo; mostrate che è un chiuso con parte interna vuota.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1V1']

E23.14 Argomenti:matrice,determinante.Difficoltà:\*. [1V2]

Dimostrate la formula di Jacobi:

$$\frac{d}{da_{i,j}} \det(A) = C_{i,j} \quad ,$$

dove  $a_{i,j}$  è l'elemento di  $A$  in riga  $i$  e colonna  $j$ , e  $C$  è la matrice dei cofattori di  $A$ , che è la trasposta della matrice aggiunta  $\text{adj}(A)$ . Conseguentemente, se  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  è differenziabile, allora

$$\frac{d}{dt} \det F(t) = \text{tr} \left( \text{adj}(F(t)) \frac{dF(t)}{dt} \right)$$

dove  $\text{tr}(X)$  è la traccia di  $X$ .

Sugg. usate lo sviluppo di Laplace per il determinante.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1V3']

E23.15 Argomenti:matrice,determinante.Prerequisiti:23.14.Difficoltà:\*. [1V4]

Vogliamo generalizzare i risultati del precedente esercizio 23.13 al caso di matrici  $n \times n$ .

Ricordiamo le seguenti proprietà del determinante delle matrici  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- Il rango è la dimensione dell'immagine di  $A$  (vista come applicazione lineare da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ ) ed è anche il massimo numero di colonne linearmente indipendenti in  $A$ .
- $A$  ha rango  $n$  se e solo  $\det(A) \neq 0$ .
- Se si scambiano due colonne in  $A$ , il determinante cambia di segno;
- se si somma a una colonna un multiplo di un'altra colonna il determinante non cambia.
- La caratterizzazione del rango tramite i minori, «Il rango di  $A$  è pari al massimo ordine di un minore invertibile di  $A$ ».
- lo sviluppo di Laplace del determinante, e la formula di Jacobi (cf 23.14).
- Il determinante di  $A$  è uguale al determinante della trasposta; dunque ogni risultato precedente vale se si legge “riga” invece di “colonna”.

Si vedano anche [62, 55].

Mostrate i seguenti risultati.

1. Mostrate che il gradiente della funzione  $\det(A)$  è non nullo se e solo se il rango di  $A$  è almeno  $n - 1$ .
2. Sia  $Z$  l'insieme delle matrici  $\mathbb{R}^{n \times n}$  con determinante nullo; mostrate che è un chiuso con parte interna vuota.
3. Sia  $B$  una matrice fissata di rango al più  $n - 2$ , mostrate che la tesi del teorema è falsa negli intorno  $U_B$  della matrice  $B$ , nel senso che  $Z \cap U_B$  non è contenuto in una superficie<sup>†123</sup>.

<sup>†122</sup>Usate l'esercizio 23.2 precedente!

<sup>†123</sup>Non vi scervellate, è più facile di quello che sembra... ci sono troppe matrici con determinante nullo vicino a  $B$ ...

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1V6']

E23.16 Si mostri la disuguaglianza di Young: dati  $a, b > 0, p, q > 1$  tali che  $1/p + 1/q = 1$  allora [1V7]

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (23.17)$$

con uguaglianza se e solo se  $a^p = b^q$ ; usando un opportuno studio di funzione.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1V8']

Si veda anche 14.50.

E23.18 Determinare fra i triangoli iscritti nel cerchio unitario quello di area massima. [1Q6]

## §23.a Equazioni funzionali

### Esercizi

E23.19 Note:esercizio 1, compito 7 Giugno 2010. [1V9]

Si dimostri che esiste una e una sola funzione continua  $f$  sull'intervallo  $[-1, 1]$  tale che

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2}f(x^2) \quad \forall x \in [-1, 1] \quad .$$

Si dimostri che  $f$  è rappresentabile come serie di potenze centrata in zero; e che il raggio di convergenza è uno.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1VB']

E23.20 Difficoltà:\*. Note:esercizio 3, compito 30 Giugno 2017. [1VC]

Si consideri il problema (non di Cauchy)

$$\begin{cases} y'(x) = y(x^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Si dimostri che per ogni  $r < 1$  esiste un'unica soluzione definita su  $I = (-r, r)$  e si deduca che lo stesso vale per  $r = 1$ .
- Si dimostri che la soluzione è rappresentabile come somma di una serie di potenze centrata in 0 e convergente sull'intervallo  $[-1, 1]$ .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1VD']

E23.21 Note:esercizio 3 compito 23 Giugno 2012. [1VF]

Si dimostri che esiste una e una sola funzione  $f$  continua sull'intervallo  $[0, 1]$  che soddisfi la condizione

$$f(x) = \sin(x) + \int_0^1 \frac{f(t)}{x^2 + t^2 + 1} dt \quad \forall x \in [0, 1] \quad .$$

E23.22 Note:esercizio 4 compito 23 Giugno 2012. [1VG]

Una funzione  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , analitica in un intorno di 0, soddisfa sul suo dominio le condizioni

$$\begin{cases} f'(x) = 1 + f(-x) \\ f(0) = c \end{cases} \quad ;$$

(si noti che questo non è un problema di Cauchy!).

- Si determini  $f$ .
- Si dimostri che la funzione trovata è l'unica soluzione, nell'insieme delle funzioni derivabili in un intorno di 0.

E23.23

[1VH]

- Mostrate che esiste una unica funzione  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  continua che soddisfa

$$f(x) = x \cos(f(x)) .$$

- Fissati  $a, b$  mostrate che esistono un numero finito di  $f : (-a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continue soddisfacenti

$$f(x) = x \cos(f(x)) \quad \forall x \in (a, b).$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1VJ']

## §23.b Campi vettoriali

[1PW]

### Esercizi

E23.24 Note: esercizio 4, compito 20 Giugno 2017.

[1PX]

Sia  $F$  un campo vettoriale continuo su  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , tale che, per ogni  $x \neq 0$ ,  $F(x)$  è un multiplo scalare di  $x$ . Per  $r > 0$ , indichiamo con  $S_r$  la sfera di raggio  $r$  centrata in 0.

- Si dimostri che, per ogni arco regolare  $\gamma$  con sostegno contenuto in una sfera  $S_r$ , si ha  $\int_{\gamma} F = 0$ .
- Si dimostri che, se un tale campo  $F$  è conservativo, allora  $|F(x)|$  è costante su ogni sfera  $S_r$ , e dunque che  $F(x) = x\rho(|x|)$  con  $\rho : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1PY']

## UUID

009, 3	032, 52	06N, 28	097, 37	OCV, 90	OGS, 106
00B, 4	034, 52	06P, 29	09G, 38	OCX, 90	OGW, 106
00C, 6	036, 52	06Q, 29	09J, 38	ODO, 91	OGX, 106
00D, 6	038, 52	06S, 29	09K, 38	OD2, 91	OGY, 106
00G, 7	03C, 52	06V, 29	09N, 59	OD4, 91	OGZ, 106
00J, 8	03F, 52	06X, 29	09Q, 59	OD6, 91	OHO, 106
00K, 8	03H, 52	06Y, 29	09S, 122	OD9, 92	OH1, 107
00N, 9	03M, 53	06Z, 30	09T, 122	ODD, 92	OH3, 107
00Q, 10	03P, 53	070, 30	09X, 77	ODJ, 92	OH5, 107
00R, 11	03R, 53	071, 30	09Y, 77	ODK, 94	OH7, 107
00S, 12	03V, 53	072, 31	0B0, 78	ODN, 94	OH9, 107
00T, 12	03X, 53	073, 31	0B2, 78	ODQ, 48	OHD, 107
00V, 12	03Y, 53	074, 31	0B3, 79	ODR, 96	OHG, 107
00X, 12	040, 53	076, 31	0B4, 79	ODW, 97	OHJ, 107
00Z, 13	043, 53	078, 31	0B5, 81	ODY, 97	OHM, 108
011, 13	045, 53	07B, 31	0B6, 81	OF0, 98	OHP, 108
013, 13	048, 54	07C, 32	0B7, 82	OF1, 95	OHR, 108
014, 17	04B, 54	07D, 32	0B9, 82	OF2, 98	OHS, 108
016, 13	04D, 54	07F, 32	0BC, 82	OF4, 98	OHT, 108
018, 70	04G, 54	07H, 32	0BF, 82	OF5, 98	OHW, 109
019, 70	04J, 54	07K, 32	0BG, 79	OF7, 98	OHY, 109
01C, 70	04M, 54	07N, 33	0BH, 83	OF8, 98	OJ1, 109
01F, 71	04P, 54	07R, 47	0BJ, 83	OF9, 99	OJ3, 109
01G, 71	04R, 54	07S, 47	0BK, 84	OFH, 100	OJ4, 110
01J, 16	04V, 55	07T, 49	0BM, 85	OFJ, 100	OJ5, 110
01M, 18	04X, 55	07V, 33	0BN, 86	OFK, 100	OJ6, 110
01N, 20	04Z, 55	07W, 47	0BP, 86	OFM, 100	OJ8, 110
01P, 38	051, 55	07X, 47	0BQ, 86	OFF, 100	OJB, 110
01R, 21	053, 55	07Z, 49	0BS, 87	OFR, 101	OJD, 110
01W, 21	055, 55	080, 49	0BT, 87	OFF, 101	OJF, 111
01Y, 21	057, 56	082, 49	0BV, 87	OFT, 102	OJG, 111
020, 21	059, 173	084, 49	0BW, 87	OFV, 102	OJH, 111
022, 21	05J, 56	086, 49	0BY, 87	OFW, 102	OJK, 111
023, 20	05M, 56	089, 49	OC1, 88	OFX, 102	OJN, 121
024, 21	05R, 56	08C, 49	OC3, 88	OFZ, 103	OJQ, 112
026, 17	05S, 56	08F, 49	OC5, 88	OG0, 103	OJT, 112
028, 19	05T, 57	08H, 50	OC7, 88	OG3, 103	OJV, 112
029, 20	05V, 57	08K, 50	OC8, 88	OG5, 104	OJY, 112
02C, 24	05X, 57	08M, 50	OC9, 89	OG6, 104	OK0, 112
02D, 22	05Z, 57	08P, 50	OCB, 89	OG7, 104	OK4, 112
02F, 92	060, 58	08T, 80	OCC, 89	OG8, 104	OK5, 113
02H, 22	063, 58	08V, 75	OCD, 89	OG9, 104	OK6, 113
02K, 22	064, 58	08X, 35	OCF, 89	OGB, 104	OK7, 113
02M, 23	065, 58	08Y, 35	OCH, 89	OGC, 104	OK8, 113
02S, 51	067, 27	08Z, 61	OCK, 89	OGD, 104	OKB, 113
02T, 51	069, 27	090, 62	OCN, 90	OGF, 105	OKC, 114
02W, 51	06C, 28	091, 36	OCP, 90	OGH, 105	OKD, 114
02Y, 51	06F, 28	092, 36	OCQ, 90	OGJ, 105	OKG, 114
030, 51	06J, 28	093, 37	OCR, 90	OGM, 105	OKK, 115
031, 52	06M, 28	095, 37	OCS, 90	OGQ, 105	OKM, 115

OKQ, 115	OPY, 128	OTP, 137	OY3, 145	117, 155	145, 164
OKS, 115	OQ0, 128	OTQ, 137	OY4, 145	118, 155	146, 164
OKV, 116	OQ3, 128	OTT, 137	OY5, 145	11B, 156	147, 164
OKX, 116	OQ5, 128	OTW, 137	OY7, 145	11C, 156	148, 164
OKZ, 116	OQ7, 128	OTZ, 138	OY9, 145	11D, 156	148, 164
OM1, 116	OQ8, 129	OV3, 138	OYB, 145	11F, 156	14D, 165
OM3, 116	OQC, 129	OV4, 138	OYD, 146	11G, 156	14F, 165
OM5, 116	OQF, 129	OV6, 138	OYF, 146	11H, 156	14J, 166
OM7, 115	OQJ, 129	OV8, 138	OYH, 147	11J, 156	14K, 166
OM9, 117	OQM, 129	OVB, 138	OYJ, 147	11K, 156	14M, 166
OMC, 118	OQN, 130	OVC, 138	OYK, 147	11M, 156	14N, 166
OMD, 118	OQP, 130	OVD, 138	OYN, 147	11N, 157	14P, 166
OMF, 118	OQR, 130	OVG, 139	OYQ, 147	11P, 157	14R, 166
OMH, 118	OQS, 130	OVJ, 139	OYS, 147	11R, 157	14T, 166
OMM, 118	OQV, 130	OVP, 139	OYV, 147	11S, 157	14W, 167
OMP, 119	OQX, 131	OVR, 139	OYX, 148	11T, 157	14Y, 167
OMR, 123	OQY, 131	OVS, 139	OYZ, 148	11W, 157	150, 167
OMS, 123	OQZ, 131	OVT, 140	OZ1, 148	11Y, 157	151, 167
OMT, 123	OR2, 131	OVV, 140	OZ3, 148	120, 157	152, 167
OMV, 123	OR3, 132	OVW, 140	OZ7, 149	122, 157	155, 167
OMW, 123	OR5, 132	OVX, 140	OZB, 149	124, 158	156, 167
OMX, 123	OR8, 132	OVZ, 140	OZD, 149	125, 158	15C, 168
OMZ, 124	OR9, 132	OW1, 140	OZG, 149	127, 158	15F, 168
ON1, 124	ORC, 133	OW3, 141	OZJ, 149	129, 158	15J, 168
ON3, 124	ORG, 133	OW6, 135	OZM, 149	12C, 158	15M, 169
ON5, 124	ORH, 134	OW9, 141	OZP, 150	12F, 158	15P, 169
ON6, 124	ORK, 134	OWB, 141	OZR, 150	12G, 159	15R, 169
ON8, 124	ORP, 134	OWC, 141	OZT, 151	12J, 159	15T, 169
ONB, 28	ORR, 134	OWD, 141	OZV, 151	12M, 159	15W, 169
ONC, 124	ORT, 134	OWG, 141	OZW, 151	12P, 159	15Z, 169
ONF, 124	ORY, 134	OWJ, 141	OZX, 151	12R, 159	161, 169
ONG, 125	OSO, 134	OWM, 142	OZY, 151	12T, 159	162, 170
ONH, 125	OS2, 134	OWN, 142	OZZ, 151	12W, 159	163, 170
ONM, 125	OS4, 134	OWP, 142	100, 2	12Y, 159	164, 170
ONN, 63	OS6, 135	OWR, 142	105, 152	130, 160	165, 170
ONQ, 125	OS8, 135	OWT, 142	106, 152	132, 160	166, 170
ONW, 125	OSB, 135	OWW, 142	107, 152	137, 161	167, 170
ONX, 125	OSD, 135	OWY, 142	109, 152	138, 161	169, 170
ONZ, 126	OSG, 135	OXO, 142	10C, 153	139, 161	16D, 170
OP1, 126	OSM, 135	OX1, 142	10D, 153	13C, 161	16F, 170
OP3, 126	OSN, 135	OX2, 143	10F, 153	13D, 161	16G, 35
OP5, 126	OSQ, 136	OX4, 143	10J, 153	13G, 162	16J, 171
OP6, 126	OSV, 136	OX6, 143	10M, 153	13J, 162	16K, 171
OP8, 126	OTO, 136	OX8, 143	10P, 153	13M, 162	16N, 171
OPB, 126	OT3, 136	OXC, 143	10Q, 154	13P, 162	16Q, 171
OPD, 127	OT4, 136	OXF, 143	10S, 154	13R, 162	16S, 171
OPG, 127	OT5, 136	OXG, 143	10V, 154	13T, 162	16V, 172
OPJ, 127	OT7, 136	OXH, 144	10X, 154	13W, 163	16W, 172
OPM, 127	OT9, 136	OXM, 144	10Y, 154	13Y, 163	16X, 172
OPP, 127	OTD, 136	OXQ, 144	110, 154	13Z, 163	16Y, 172
OPQ, 127	OTG, 137	OXT, 144	111, 154	141, 163	16Z, 172
OPR, 127	OTH, 137	OXW, 144	112, 155	142, 164	170, 173
OPS, 127	OTK, 137	OXY, 144	114, 155	143, 164	172, 173
OPT, 128	OTM, 137	OYO, 144	116, 155	144, 164	174, 173

176, 173	1B8, 182	1FP, 193	1KV, 206	1Q4, 218	1V4, 235
178, 173	1B9, 182	1FR, 193	1KZ, 207	1Q6, 236	1V7, 236
17B, 173	1BC, 182	1FT, 193	1M1, 207	1Q8, 218	1V9, 236
17D, 173	1BF, 182	1FX, 193	1M3, 207	1QB, 219	1VC, 236
17H, 174	1BG, 183	1FZ, 194	1M5, 207	1QC, 219	1VF, 236
17J, 174	1BJ, 183	1G2, 194	1M7, 208	1QH, 219	1VG, 236
17M, 174	1BM, 183	1G4, 194	1M9, 208	1QK, 220	1VH, 237
17P, 175	1BN, 183	1G6, 194	1MB, 208	1QN, 220	1VW, 6
17R, 175	1BP, 183	1G8, 194	1MD, 208	1QR, 220	1VX, 6
17T, 175	1BR, 183	1GB, 195	1MF, 208	1QV, 221	1VY, 8
17W, 175	1BT, 184	1GD, 195	1MG, 209	1QX, 221	1W0, 14
17Y, 175	1BW, 184	1GF, 195	1MJ, 209	1QZ, 221	1W1, 14
17Z, 175	1BX, 184	1GJ, 196	1MK, 209	1R1, 221	1W2, 15
180, 175	1BZ, 184	1GP, 196	1MN, 209	1R4, 221	1W4, 20
181, 175	1C0, 184	1GQ, 196	1MQ, 209	1R7, 222	1W5, 25
182, 176	1C2, 184	1GS, 196	1MS, 209	1R8, 222	1W6, 15
183, 176	1C3, 185	1GW, 196	1MT, 209	1RD, 222	1W8, 15
184, 176	1C4, 185	1GX, 197	1MW, 210	1RK, 222	1W9, 15
186, 176	1C5, 186	1GZ, 197	1MY, 210	1RQ, 224	1WB, 15
188, 176	1C6, 186	1H1, 198	1N0, 210	1RV, 225	1WC, 16
18B, 176	1C8, 186	1H3, 198	1N2, 211	1RY, 225	1WF, 15
18C, 177	1CB, 186	1H8, 199	1N4, 212	1S1, 226	1WH, 26
18F, 177	1CD, 186	1HB, 199	1N5, 212	1S4, 226	1WJ, 27
18H, 177	1CG, 187	1HD, 200	1N7, 212	1S7, 226	1WK, 26
18J, 177	1CJ, 187	1HG, 200	1NC, 212	1S9, 227	1WM, 27
18K, 177	1CM, 187	1HH, 200	1NG, 212	1SC, 228	1WN, 27
18M, 177	1CP, 187	1HK, 200	1NJ, 212	1SD, 228	1WP, 31
18P, 178	1CV, 187	1HM, 200	1NN, 213	1SF, 228	1WQ, 35
18R, 178	1CX, 187	1HQ, 201	1NQ, 213	1SH, 228	1WR, 35
18T, 178	1CZ, 187	1HR, 201	1NT, 214	1SK, 228	1WS, 35
18W, 178	1D1, 187	1HS, 201	1NV, 214	1SN, 229	1WY, 25
18Y, 178	1D4, 187	1HW, 201	1NW, 214	1SP, 229	1X0, 26
18Z, 178	1D7, 187	1HY, 201	1NX, 214	1SR, 229	1X1, 11
191, 179	1D9, 188	1J1, 202	1NY, 214	1SS, 229	1X2, 11
192, 179	1DD, 188	1J3, 202	1P0, 214	1SW, 230	1X3, 36
194, 179	1DG, 188	1J8, 214	1P1, 214	1SY, 230	1X4, 36
196, 179	1DJ, 188	1JG, 202	1P3, 215	1T1, 230	1X5, 36
198, 179	1DM, 189	1JN, 203	1P5, 215	1T3, 231	1X6, 36
19B, 179	1DR, 189	1JQ, 203	1P7, 215	1T6, 231	1X7, 63
19C, 180	1DT, 189	1JS, 203	1PB, 215	1T8, 232	1X9, 60
19D, 180	1DW, 189	1JV, 203	1PC, 216	1T9, 232	1XB, 60
19F, 180	1DZ, 190	1JX, 204	1PF, 216	1TD, 232	1XC, 61
19G, 180	1F1, 190	1K0, 204	1PG, 216	1TG, 232	1XD, 60
19K, 181	1F4, 190	1K2, 204	1PH, 216	1TJ, 233	1XF, 61
19M, 181	1F6, 199	1K4, 204	1PK, 216	1TN, 233	1XG, 61
19Q, 181	1F7, 190	1K6, 205	1PN, 216	1TS, 233	1XH, 121
19S, 181	1F9, 190	1K7, 205	1PQ, 217	1TT, 233	1XN, 69
19V, 181	1FB, 190	1K9, 205	1PR, 217	1TV, 233	1XP, 69
19Y, 181	1FC, 191	1KD, 205	1PT, 217	1TW, 233	1XR, 69
1B0, 182	1FD, 191	1KG, 205	1PW, 237	1TX, 234	1XS, 69
1B1, 51	1FF, 191	1KJ, 205	1PX, 237	1TY, 234	1XT, 70
1B3, 182	1FG, 192	1KM, 205	1PZ, 218	1TZ, 234	1XW, 121
1B4, 182	1FJ, 192	1KQ, 206	1Q0, 218	1V0, 234	1XY, 70
1B6, 182	1FM, 193	1KS, 206	1Q2, 218	1V2, 235	1Y0, 18



1Y1, 17	20B, 81	22P, 33	255, 46	28D, 68	2BW, 112
1Y2, 14	20C, 79	22R, 31	257, 44	28G, 68	2BX, 37
1Y3, 17	20D, 83	22S, 31	25B, 46	28J, 68	2BZ, 22
1Y4, 16	20F, 83	22X, 79	25C, 42	28M, 68	2C1, 123
1Y5, 25	20G, 84	22Y, 102	25D, 45	28N, 68	2C2, 125
1Y6, 35	20H, 81	22Z, 101	25G, 46	28Q, 68	2C3, 131
1Y7, 25	20J, 82	230, 101	25J, 44	28R, 68	2C4, 132
1Y8, 14	20K, 80	231, 29	25M, 46	28T, 65	2C5, 133
1Y9, 20	20M, 81	232, 29	25N, 46	28V, 64	2C6, 134
1YD, 20	20N, 84	233, 30	25Q, 46	28Z, 67	2C7, 135
1YH, 26	20P, 82	234, 29	25W, 45	290, 44	2C8, 137
1YJ, 28	20Q, 39	237, 102	25Z, 45	291, 42	2C9, 137
1YK, 7	20R, 73	238, 96	263, 28	292, 63	2CB, 138
1YM, 42	20T, 75	239, 41	265, 45	294, 63	2CC, 123
1YP, 60	20V, 77	23B, 43	267, 66	297, 67	2CD, 120
1YQ, 47	20W, 78	23D, 97	269, 45	298, 67	2CG, 145
1YR, 35	20X, 78	23F, 99	26F, 69	29C, 73	2CF, 143
1YS, 6	20Y, 82	23H, 6	26G, 70	29D, 27	2CH, 154
1YT, 13	20Z, 99	23J, 6	26H, 65	29G, 71	2CJ, 155
1YV, 25	210, 99	23K, 6	26J, 43	29H, 78	2CK, 153
1YW, 50	211, 38	23M, 39	26K, 43	29J, 79	2CM, 155
1YX, 56	214, 97	23N, 180	26N, 44	29K, 79	2CN, 156
1YY, 27	217, 93	23P, 172	26P, 44	29M, 80	2CP, 157
1Z0, 48	219, 94	23Q, 70	26S, 46	29N, 82	2CQ, 158
1Z1, 48	21B, 94	23R, 22	26V, 46	29P, 83	2CR, 164
1Z2, 58	21C, 95	23S, 15	26X, 66	29Q, 87	2CS, 164
1Z5, 39	21D, 95	23T, 19	26Y, 66	29R, 86	2CT, 163
1Z6, 40	21F, 96	23W, 19	271, 66	29S, 87	2CX, 161
1Z7, 40	21H, 93	23X, 25	273, 70	29T, 87	2CV, 171
1Z8, 41	21J, 100	23Y, 225	274, 61	29V, 106	2D0, 186
1Z9, 50	21M, 99	23Z, 228	275, 46	29X, 100	2D1, 188
1ZD, 72	21N, 166	240, 225	276, 66	29Z, 121	2D2, 190
1ZF, 72	21P, 34	241, 17	277, 66	2B0, 88	2D3, 193
1ZG, 72	21Q, 34	242, 13	27F, 21	2B2, 30	2D4, 195
1ZH, 72	21R, 33	243, 42	27H, 55	2B3, 101	2D5, 199
1ZJ, 73	21V, 33	244, 42	27J, 61	2B4, 113	2D6, 206
1ZK, 73	21W, 34	245, 42	27K, 65	2B5, 115	2D7, 207
1ZM, 73	21X, 34	246, 41	27M, 69	2B6, 112	2D8, 208
1ZP, 73	21Y, 34	247, 19	27N, 63	2B7, 113	2DC, 11
1ZR, 74	21Z, 34	248, 19	27P, 64	2B8, 113	2DD, 51
1ZS, 74	220, 33	24D, 43	27Q, 64	2B9, 113	2DF, 52
1ZT, 74	222, 47	24K, 26	27R, 65	2BB, 114	2DH, 104
1ZV, 74	224, 26	24M, 41	27S, 65	2BD, 107	2DJ, 77
1ZW, 73	225, 114	24P, 16	27V, 65	2BF, 109	2DK, 111
1ZX, 75	226, 14	24Q, 42	27W, 65	2BG, 110	2DM, 4
1ZY, 75	227, 14	24S, 42	27X, 65	2BH, 200	2DN, 166
1ZZ, 75	228, 7	24V, 41	27Z, 65	2BJ, 109	2DP, 166
200, 75	229, 27	24W, 25	280, 65	2BK, 118	2DQ, 167
202, 75	22B, 50	24X, 41	281, 65	2BM, 118	2DR, 170
203, 74	22C, 10	24Y, 32	287, 66	2BN, 106	2DS, 171
205, 76	22F, 47	24Z, 44	288, 66	2BP, 119	2DT, 201
206, 33	22H, 48	250, 37	289, 67	2BR, 110	2DW, 32
208, 80	22K, 51	251, 37	28B, 67	2BS, 111	2DX, 18
209, 81	22M, 54	252, 19	28C, 67	2BT, 111	2DY, 104

2F0, 172	2F9, 118	2FM, 31	2FZ, 112	2GB, 139	2GW, 161
2F2, 53	2FB, 120	2FN, 120	2G2, 2	2GF, 22	
2F3, 131	2FD, 117	2FP, 121	2G3, 120	2GH, 51	
2F5, 117	2FG, 4	2FW, 120	2G4, 173	2GK, 51	
2F6, 104	2FH, 30	2FX, 120	2G6, 120	2GT, 185	
2F7, 117	2FJ, 28	2FY, 111	2G8, 10	2GV, 12	

## Indice analitico

- $\bar{A}$ , *vedi* insieme, chiusura  
 $\partial A$ , *vedi* frontiera  
 $A^c$ , *vedi* insieme complementare  
 $B(x, r)$ , *vedi* palla, 125  
 $C$ , *vedi* funzione continua  
 $\mathbb{C}$ , *vedi* numeri complessi, 4  
 $C^k$ , 186  
 $C^0$ , *vedi* funzione continua  
 $C^k$ , 198  
 $C_b$ , 149, 165  
 $D(x, r)$ , *vedi* disco  
 $\Delta$ , *vedi* insieme, differenza  
     simmetrica, 15  
 $F_\sigma$ , *vedi* F-sigma  
 $G_\delta$ , *vedi* G-delta  
 $\mathbb{I}$ , *vedi* matrice identit a  
 $\mathbb{N}$ , *vedi* numeri naturali, 4, 60  
 $\mathbb{N}_{ZF}$ , 43  
 $\mathbb{Q}$ , *vedi* numeri razionali, 4  
 $\mathbb{R}$ , *vedi* numeri reali, *vedi* retta reale, 4  
 $\mathbb{R}/2\pi$ , 145  
 $\overline{\mathbb{R}}$ , *vedi* retta estesa  
 $S(x, r)$ , *vedi* sfera  
 $S^1$ , *vedi* circonferenza  
 $T_2$ , *vedi* Hausdorff  
 $\mathbb{Z}$ , *vedi* numeri interi, 4  
 $\llbracket$ , 5  
 $\langle$ , 5  
 $\langle$ , 5, 30  
 $\llbracket$ , 5  
 $\rangle$ , 5  
 $\rangle$ , 5, 30  
 $\searrow$ , 201  
 $\partial f$ , *vedi* sottodifferenziale  
 $e$ , *vedi* numero di Nepero  
 $=$ , *vedi* uguaglianza  
 $\sin(1/x)$ , 134  
 $\neg$ , 7  
 $\| \cdot \|$ , *vedi anche* norma  
 $\| \cdot \|_p$   
     in  $\mathbb{R}^n$ , 153–154  
 $\| \cdot \|_\infty$   
     in  $C_b$ , 149, 165  
     in  $\mathbb{R}^n$ , 153–154  
 $\Leftrightarrow$ , 7  
 $\wedge$ , 4, 7  
 $\vee$ , 4, 7  
 $\cap$ , 15  
 $\cup$ , 14, 17  
 $\sim$ , 214–216  
 $\sim_f$ , 216  
 $\approx$ , 214, 215  
 $\subset$ , 14  
 $\subseteq$ , 14  
 $\subsetneq$ , 14  
 $\bigcap$ , 14  
 $\bigcap$ , 19, 109  
 $\bigcup$ , 14  
 $\bigcup$ , 116  
 $\bigcup$ , 17, 45, 115  
 $\lfloor x \rfloor$ , *vedi* floor  
 $\setminus$ , *vedi* insieme differenza  
 $\#$ , *vedi* concatenazione, 34  
     (parziale), 25  
 $\Gamma$ , *vedi* funzione Gamma  
 Abel, 205, 231  
 aderente, *vedi* punto aderente  
 algebrico, 88  
 anello, 72  
     di polinomi, 88  
     ordinato, 73, 74  
 antiriflessiva  
     relazione, 25, 26  
 antisimmetrica  
     relazione, 25, 26  
 aperto, *vedi* insieme aperto

apice, 8  
 appartenenza, 11  
 apre-chiude, 129  
 arc, 214  
 archimedeo, 73  
 Arzelà, 204  
 Ascoli, 204  
 assioma  
   dell'infinito, 21, 42  
   dell'insieme potenza, 17, 21  
   dell'insieme vuoto, 17  
   dell'unione, 17  
   della scelta, 22, 22  
   di buona fondazione, 21, 46  
   di estensionalità, 14, 17  
   di regolarità, 18, 21, 46  
   primo — di numerabilità, 118, 163  
   secondo — di numerabilità, 118, 118, 128, 136  
   dell'infinito, 18  
   dell'unione, 14  
   della coppia, 17  
   di rimpiazzamento, 18  
   di specificazione, 18  
 assiomi  
   di Peano, 60  
   di Zermelo–Fraenkel, 16, *vedi* teoria formale degli insiemi  
 associativa  
   addizione, 64  
 atomo, 7, 8, 16  
  
 Babilonese  
   metodo —, 94  
 Baire, 140  
   categoria, 140, 167  
 ball packing, 147  
 Banach, *vedi* spazio di Banach, *vedi* anche teorema di Hahn–Banach  
 base  
   (induzione), 61  
   (spazi vettoriali), 23, 56, 153  
   (topologia), 108, 115–118, 128, 129  
 ben formata, *vedi* formula ben formata  
 Bessel, 206  
  
 binomiale, *vedi* anche coefficiente binomiale, *vedi* teorema binomiale  
 Borel, 138  
 box, 149  
 bucato, *vedi* intorno bucato  
  
 C, *vedi* funzione continua  
 campo, 72  
   ordinato, 75  
    $\mathbb{C}$ , 75  
 cancellazione, *vedi* eliminazione  
 Cantor, *vedi* anche ipotesi del continuo insieme di, 122, 143, 149, 181 teorema dell'intersezione, 82, 110, 139  
 caratteristica, *vedi* funzione caratteristica, *vedi* funzione caratteristica  
 cardinalità, 50–56  
   confronto, 51  
   del continuo, 53, 53, 124, 131  
   finita, 51, 51  
   numerabile, 52  
 Cartan, 210  
 Cartesio  
   criterio di —, 188  
 categoria, *vedi* anche insieme, di prima/seconda —, *vedi* anche teorema di Baire  
 categoria di Baire, 140, 167  
 catena, 38  
 Cauchy, 219  
   criterio di condensazione di —, 95  
   prodotto di —, *vedi* prodotto di Cauchy  
   successione, *vedi* successione di Cauchy  
 cerchio osculatore, 233  
 CH, *vedi* ipotesi del continuo  
 chiuso, *vedi* insieme chiuso  
 chiusura, 104, 108, 115, 126, 127, 129, 173  
   e parte interna, 105, 135  
   in spazio metrico, 126  
   ripetuta, 105  
 circonferenza, 145  
 coefficiente  
   binomiale, 76, 193

cofinale, 29, 112  
 Cohen, 53  
 combinazione convessa, 172  
 combinazione lineare finita, 22  
 commutativo  
   anello—, 72  
   gruppo —, 72  
 comparabile, 27  
 compatto, 109, 110, 138, 139  
   e rete, 113  
   e ultrametrica, 143  
   sequenzialmente, 138  
 complementare  
   insieme, *vedi* insieme  
     complementare  
   insieme, *vedi* insieme  
     complementare  
 complessi, *vedi* numeri complessi  
 completo, 143  
 componente connessa, 112  
 concatenazione, 34  
 condizione di unicità di Osgood, 221  
 congiunzione, 7  
 connessione  
   in spazi metrici, 134, 133–134  
 connesso  
   per archi, 133  
 continuo  
   cardinalità del —, 53, 131  
 controimmagine, 36  
 contronominale, 9  
 convergenza  
   di serie, 94–99  
   di successione, 123  
   puntuale, 119, 201, 201–204  
   totale, criterio —, 155  
   uniforme, 201, 201–204  
   totale, 155, 155, 230  
 convergenza a segni alterni, *vedi*  
   criterio di Leibniz  
 convesso, *vedi anche* insieme  
   convesso  
 costante  
   di Nepero, 207  
 costante di Eulero-Mascheroni, 91  
 countable, 51  
 countably infinite, 51  
 crescente, 77  
 criterio  
   del rapporto, 95  
   della radice, 94  
   di condensazione di Cauchy, 95  
   di convergenza a segni alterni,  
     *vedi* criterio di Leibniz  
   di convergenza totale, 155  
   di Dirichlet, 96  
     per gli integrali, 234  
   di Leibniz, 96, 96  
 criterio di Cartesio, 188  
 curva, 214, 214–217  
   chiusa, 215  
   chiusa semplice, 120, 215  
   di Hilbert, 215  
   di Koch, 149  
   di Peano, 215  
   embedded, 214, 214  
   immersa, 214  
   inclusa, 214, 214  
   parametrica, 214, 215  
   poligonale, 120, 120  
   regolare, *vedi* curva, immersa  
   semplice, 214  
   sostegno, 214  
   supporto, 214  
 Darboux  
   esempio, 187  
   proprietà di, 186  
 decrescente, 77  
 Dedekind, 54  
 Dedekind-infinito, 54  
 definitivamente, 23, 29, 58, 70, 79, 83,  
   84, 92–96, 113  
 definizione  
   per ricorrenza, 61  
 denso, *vedi* insieme, denso  
   in spazio metrico, 126  
 derivata  
   parziale, 193–195  
   totale, 193–195  
 derivato, 108  
 determinante, *vedi* matrice,  
   determinante  
 diffeomorfismo, 214  
 differenziale, 193–195  
 dilatazione, 158  
 dimensione  
   box dimension, 149  
   di Minkowski, 147  
 Dini, 181, 201

diretto, *vedi* ordinamento diretto  
 Dirichlet  
     teorema di approssimazione di  
         —, 88  
 disco, 125, 126, 128, 135, 138, 152  
     in ultrametrica, 142  
 discreta, topologia —, 104, 118, 129  
 diseguglianza, *vedi* disuguaglianza  
 disgiunzione, 7  
 distance function, 132  
 distanza, 123  
     discreta, 123  
 distanza p-adica, 143  
 disuguaglianza  
     di Jensen, 185  
 disuguaglianza di Hölder, 153  
 disuguaglianza di Young, 153, 179,  
     236  
 disuguaglianza triangolare, 78, 123,  
     142, 151, 151  
 divisione con resto, 68  
 dominio d'integrità, 74  
 doppia implicazione, 7  
  
*e*, *vedi* numero di Nepero  
 Edelstein, 137  
 elevazione a potenza, *vedi* potenza  
 eliminazione, 65, 67, 68  
 embedded, curva, *vedi* curva,  
     embedded  
 enumerazione, 52, 232  
 epigrafico, 162, 175  
 equazione differenziale, *vedi* ODE  
 equazioni  
     di Bessel, 206  
 equicontinua, 202  
 equinumerosi, 50  
 equiordinato, 33  
 equipotenti, 50  
 equivalenti  
     norme, 152  
 equivalenza, *vedi* relazione, di  
     equivalenza  
 erosione, 158  
 esercizi difficili, 23, 33, 47, 48, 50,  
     54–56, 69, 70, 78, 79, 86,  
     89–91, 103, 105, 107, 111,  
     113, 114, 118, 119, 121, 125,  
     129, 131, 134–139, 141,  
     144, 147, 149–151, 162,  
     166–168, 171, 173–176,  
     182, 184–190, 193, 198,  
     203, 204, 206, 207,  
     209–211, 214, 217, 222,  
     230, 235, 236  
 esponenziale, 207, 228  
     di matrici, 208  
 estremo inferiore, 31  
     nella retta reale, 81  
 estremo superiore, 31  
     nella retta reale, 80  
 etichettato, *vedi* poligono  
 Euler's number, *vedi* numero di  
     Nepero  
 Eulero, 207, 208  
  
 F-sigma, 129, 171  
      $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , 167  
 famiglia equicontinua, 201, 203  
 Faà Di Bruno, 188  
 filtrante, *vedi* ordinamento con  
     proprietà filtrante  
 finito, *vedi* insieme, finito  
 floor, 87, 91  
 formula  
     atomica, 7  
     ben formata, 7, 7, 8, 11, 13, 19,  
         57  
     con quantificatori, 10, 12  
     in teoria degli insiemi, 16  
     valutazione, 8, 9  
     di Jacobi, 209, 235, 235  
     di Leibniz, 188  
     di Newton, *vedi* teorema  
         binomiale  
     di Taylor, *vedi* teorema di Taylor  
     esiste ed è unico, 13  
 forte  
     principio forte di induzione, 69  
 Fraenkel, 16, 17  
 frequentemente, 29, 58, 70, 79  
 Frobenius, 156  
 frontiera, 104, 107, 108, 173  
     ripetutamente, 107  
 funzionale  
     relazione —, 25, 35  
 funzione, 35  
     analitica, 212–213  
     assolutamente omogenea, 151  
     bi-Lipschitziana, 144

caratteristica, **56, 86, 119, 181**  
 continua, **113, 113–115, 166, 166–167**  
 continua a destra, **164**  
 convessa, **151, 175, 175–180, 202**  
 costante a tratti, **164**  
 discontinua, **167**  
 Gamma, **183**  
 Hölderiana, **170, 170–171, 197, 202**  
 indicatrice, *vedi* funzione caratteristica  
 inversa sinistra, **22**  
 liminf di —, *vedi* liminf  
 limitata, **164, 202**  
 limsup di —, *vedi* limsup  
 Lipschitziana, **125, 132, 144, 168, 170, 170–171, 175, 177, 197, 198**  
 monotona, **164, 202**  
 parziale, **25, 38**  
 positivamente omogenea, **151**  
 propria, **136**  
 regolare a tratti, **220**  
 regolata, **164, 182, 202**  
 Riemann integrabile, **166, 181–185, 202**  
 semi continua, *vedi* semicontinua inferiormente/superiormente  
 strettamente convessa, **175**  
 uniformemente continua, **167, 167–170, 202, 203**  
 spazio delle, **204**  
 regolata, **163, 163–164, 182**  
 subadditiva, **124, 169, 179**  
 subadditiva, e ultrametrica, **142**  
 funzione distanza, **132, 132–133**  
 e insiemi convessi, **179**  
 funzioni  
 equicontinue, **202**  
 G-delta, **129**  
 genera, **23, 56**  
 grafico, **35**  
 Gronwall, **219**  
 gruppo, **72**  
 gruppo topologico, **143**  
 Gödel, **53**  
 Hadamard, **190**  
 Hahn, *vedi anche* teorema di Hahn–Banach  
 Hamel  
 base di —, **23, 56**  
 Hausdorff, **104, 110, 126**  
 Heine, **138**  
 Hermite, **190**  
 Hilbert, **215**  
 Hoelder, **202**  
 Hospital, *vedi* Hôpital  
 Hurwitz, **73**  
 Hôpital  
 regola, *vedi* regola di De l’Hôpital  
 Hölder, **170**  
 $\mathbb{I}$ , *vedi* matrice identità  
 identità  
 di Eulero, **208**  
 identità di Abel, **231**  
 immagine, **36**  
 immersa, curva, *vedi* curva immersa  
 implicazione, **7**  
 inclusa, curva, *vedi* curva, inclusa  
 incomparabile, **27**  
 indiscreta, topologia —, **104**  
 induction, **43**  
 induzione, **43, 61**  
 transfinita, **70**  
 induzione forte, **69**  
 inf, *vedi* estremo inferiore  
 inf-convoluzione, **162**  
 inferiormente limitato, **31**  
 infinito, *vedi* insieme, infinito  
 iniettiva, **25**  
 insieme  
 aperto  
 in spazio metrico, **125**  
 in topologia, **104**  
 chiuso  
 in spazio metrico, **126**  
 in topologia, **104**  
 compatto, *vedi* compatto  
 complementare, **15, 56, 58, 104, 107, 126**  
 connesso, **110**  
 convesso, **172, 172**  
 strettamente, **180**  
 Dedekind-infinito, **54**  
 delle parti finite, **53, 55, 98, 102**

derivato, **106, 130, 135, 136**  
 di Cantor, *vedi* Cantor, insieme di  
 di prima categoria, **140**  
 di seconda categoria, **140**  
 di sottolivello, **176**  
 disconnesso, **110**  
 finito, **51, 54**  
 infinito, **51**  
     Dedekind —, **54**  
 ingrassato, **133**  
 numerabile, **54**  
 parte interna, *vedi* parte interna  
 potenza, **15, 17**  
 vuoto, **14, 17**  
 chiusura, *vedi* chiusura  
 connesso per archi, **133**  
 denso, **104**  
 differenza, **15**  
 differenza simmetrica, **15**  
     usando le caratteristiche, **57**  
 frontiera, *vedi* frontiera, **107**  
 perfetto, **122, 131, 141**  
 insiemi  
     teoria degli —, *vedi anche*  
         assiomi ..., *vedi anche* teoria  
         ...  
 integrale di Riemann, **166, 181–185,**  
     **194**  
 interi, *vedi* numeri interi  
 interpolazione polinomiale, **38, 190**  
 intersezione di insiemi, **14**  
 intervallo, **32, 32–33**  
     standard, **32**  
 intorno, **106**  
     bucato, **78, 79, 83**  
     in uno spazio topologico, **106**  
     di infinito, **29**  
     in  $\mathbb{R}$ , **78**  
     sistema fondamentale di —, **106,**  
         **119**  
 inversa destra, **37**  
 inversa sinistra, **22, 37**  
 involuppo convesso, **160, 173**  
 iperpiano di supporto, **174**  
 ipotesi del continuo, **53, 131**  
 irreflessiva  
     relazione, **25, 26**  
 isolato, *vedi* punto isolato  
 isometria, **137, 138**  
 isometria lineare, **154**  
 isomorfismo d'ordine, **33**  
 isotonia, **33**  
 Jacobi, **194**, *vedi* formula di Jacobi,  
     **235**  
     matrice di —, **194, 196**  
 Jordan, **120**  
 Karush, **200**  
 Koch, **149**  
 Kuhn, **200**  
 Lagrange, **199**  
     moltiplicatore di —, *vedi*  
         moltiplicatore di Lagrange  
     resto di —, *vedi* resto di Lagrange  
     teorema di —, *vedi* teorema di  
         Lagrange  
 Landau  
     simboli di —, *vedi* simboli di  
         Landau  
 Laplace, **235**  
 Leibniz, **188**  
     criterio di —, **96, 96**  
     formula di —, *vedi* formula di  
         Leibniz  
 lemma  
     del Dini, **201**  
     di Abel, **205**  
     di Gronwall, **219**  
     di Hadamard, **190**  
     di Zorn, **22, 174**  
 lessicografico, *vedi* ordinamento,  
     lessicografico  
 liminf, **83, 93**  
     di funzione, **83, 83–87**  
         in spazi topologici, **161**  
     di insiemi, **58, 58, 86**  
     di successione, **86**  
 limitato  
     totalmente, **138, 139**  
 limite inferiore, *vedi* liminf  
 limite superiore, *vedi* limsup  
 limsup, **83**  
     di funzione, **83, 83–87**  
         in spazi topologici, **161**  
     di insiemi, **58, 58, 86**  
     di successione, **86**  
 Lindelöf, **219**  
 linea, *vedi anche* retta



linear  
     order, *vedi* ordinamento, totale  
 linearmente indipendenti, 23, 56  
 Lipschitz, 170, 219  
 localmente compatto, 138  
 logaritmo, 166

maggioranti, 31  
 massimale, 27, 29  
 massimo, 27, 29, 108  
 massimo comun divisore, 26

matrice  
     aggiunta, 235  
     dei cofattori, 235  
     determinante, 234, 235  
     di Jacobi, 194, 196  
 matrice identità, 209  
 Mazur, 154  
 Mertens, 100  
 metodo Babilonese, 94  
 minimale, 27, 70  
 minimo, 27  
     su convessi, 176  
 Minkowski, 133, 147  
     dimensione di —, 147  
 minoranti, 31  
 modulo di continuità, 168, 168–170, 201–203  
 moltiplicatore di Lagrange, 153, 199  
 monotona, 77

naturali, *vedi* numeri naturali  
 negazione, 7  
 Nepero, 207  
 Newton, 76  
 norma, 151  
     di Frobenius, 156  
     e dimensione, 148  
     spettrale, 156  
 norma indotta, 155  
 norme  
     equivalenti, 152  
 notazione di Landau, *vedi* simboli di Landau  
     Landau  
 numerabile, 51  
 numeri complessi, 72, 100, 181, 205, 229  
 numeri interi, 53  
     densi in ultrametrica, 144  
 numeri irrazionali, 88, 140, 167, 182

numeri naturali, 60–71  
     ordinamento, 66  
     potenza, 65  
 numeri razionali, 53, 72, 75, 87, 88, 182, 232  
     e ultrametrica, 143, 144, 144  
 numeri reali, *vedi anche* retta reale, 72  
     approssimazione di —, 87  
 numero  
     algebrico, 88  
     trascendente, 88  
 numero di Nepero, 207  
 numero irrazionale  
     approssimazione di —, 87

O grande, *vedi* simboli di Landau  
 o piccolo, *vedi* simboli di Landau  
 ODE, 219–231  
 omeomorfismo, 110, 114, 122, 131, 138, 166, 214, 216

ordinale, 45  
 ordinamento, 25, 27–34  
     (parziale), 25  
     con proprietà filtrante, 28, 28–30, 112  
     e rete, 100  
     dei numeri naturali, 66  
     diretto, 28, 28–30, 102, 108, 109, 113  
     di insiemi, 105, 115  
     lessicografico, 30, 30–31, 118  
     parziale, 25, 26  
     parziale stretto, 26  
     topologia dall'—, 117, 118  
     totale, 25, 26, 117, 118  
     totale stretto, 26  
     con proprietà filtrante, 29, 102

ordine, *vedi anche* ordinamento  
     tipo di —, 33  
 ordini di grandezza, 93  
 orecchio, 121  
 oscillazione, 162, 164  
 Osgood, 221

p-adica  
     distanza —, 143  
     valutazione —, 143, 144

palla, 125, 126, 135, 152  
     in ultrametrica, 142  
     inclusioni, 126

parametrica, curva, *vedi* curva  
     parametrica  
 parte frazionaria, **87**  
 parte intera, *vedi* floor, **87, 91**  
 parte interna, **104, 105, 108, 115, 126,**  
     **127, 129, 173**  
     e chiusura, **105, 135**  
     in spazio metrico, **126**  
 parziale  
     derivata, *vedi* derivata parziale  
     funzione —, **25, 38**  
 Peano, **60, 215**  
 pedice, **8**  
 perfetto, **122, 131, 141**  
 Picard, **219**  
 poligono, **120, 154**  
     (non) etichettato, **120**  
     orecchio, **121**  
 polinomio, **38, 52, 88–89, 181, 190,**  
     **228, 229**  
     anello di polinomi, **88**  
     convergenza di —, **202**  
     di Taylor, *vedi* teorema di Taylor  
     successione di —, **202**  
 potenza, **8, vedi anche** insieme potenza  
     di naturali, **65**  
     in un campo, **75**  
 predecessore, **43, 48, 60**  
 preordine, **23, 40**  
 primo assioma di numerabilità, **118,**  
     **163**  
 principio di induzione, **43, 61**  
 principio forte di induzione, **69**  
 prodotto  
     di Cauchy, **100, 206**  
     topologia —, **116, 130**  
     topologia — (infinito), **117, 118**  
 prodotto cartesiano, **5, 14, 21, 22, 25,**  
     **57, 116, 117, 130**  
     di gruppo, **143**  
     di palle, **130**  
     e topologia, **117**  
 proiezione  
     teorema della —, **173**  
 proposizione (logica), **12**  
 propria  
     funzione —, **136**  
 proprietà  
     di Darboux, **186**  
     di eliminazione, *vedi*  
         eliminazione  
     di rigidità, **202**  
     filtrante, *vedi* ordinamento con  
         proprietà filtrante  
 punto aderente, **130**  
     in spazio metrico, **126**  
     in uno spazio topologico, **106**  
 punto di accumulazione, **107, 108,**  
     **130, 131, 161, 163**  
     in spazi metrici, **130, 130–131,**  
     **135**  
     in uno spazio topologico, **106**  
     nella retta reale, **79, 79, 83, 135,**  
     **203**  
 punto fisso, **171**  
 punto isolato, **107, 131, 136, 234**  
     in uno spazio topologico, **106**  
 punto limite  
     di una rete in uno spazio  
         topologico, **113**  
     di una successione, **131, 135**  
 puntuale, *vedi* convergenza, puntuale  
  
 Raabe, **96**  
 raggio di curvatura, **233**  
 razionali, *vedi* numeri razionali  
 reali, *vedi* numeri reali, *vedi* retta reale  
 regola di De l'Hôpital, **186**  
 regolata, *vedi* funzione regolata  
 relazione, **25**  
     antiriflessiva, **26**  
     antisimmetrica, **26**  
     di equivalenza, **25, 37, 123, 124,**  
     **131, 146**  
     fra curve, **214, 216**  
     in gruppo, **132**  
     per  $S^1$ , **145**  
     irriflessiva, **26**  
     transitiva, **26**  
 relazione d'ordine, *vedi* ordinamento  
 rete, **100, 101, 102, 112, 114, 115, 119**  
     e compatto, **113**  
 retta  
     estesa, **77, 108**  
 retta reale, **72, 77–89**  
     compattificata a un punto, **108**  
 Ricci, **118**  
 ricorrenza  
     definizione per, **61**

Riemann, **98**, *vedi anche* funzione  
     Riemann integrabile, *vedi*  
     *anche* integrale di Riemann  
 riflessiva  
     relazione, **25**  
  
 S-saturo, **41**  
 s.c.i., *vedi* semicontinua inferiormente  
 s.c.s., *vedi* semicontinua  
     superiormente  
 scambio di limiti, **90**  
 secondo assioma di numerabilità, **118**,  
     **118**, **128**, **136**  
 segmento iniziale, **49**  
 semicontinua inferiormente, **161–163**  
 semicontinua superiormente, **161–163**  
 semplice, curva, *vedi* curva, semplice  
 separabile, **118**  
 separazione, **174**, **175**  
 sequenzialmente compatto, **138**  
 serie  
     binomiale, **193**  
     di potenze, **205–211**  
 serie di Taylor, **184**, **207**, **212**  
 sfera, **128**, **135**, **152**, **155**, **215**, **237**  
 simboli di Landau, **191**, **191**, **192**  
 simmetrica  
     relazione, **25**  
 semplice, **172**  
 $\sin(1/x)$ , **134**  
 sistema fondamentale di intorni, **106**,  
     **119**  
 somma di Minkowski, **82**, **133**, **157**,  
     **157**  
 sostegno  
     di una curva, **214**  
 sottodifferenziale, **176**, **179**  
 sottorete, **101**, **102**  
 sottosuccessione, **91**, **101**  
     convergente, **119**, **138**  
 spazio  
     di Hausdorff, *vedi* Hausdorff  
     delle funzioni uniformemente  
         continue, **204**  
     di Banach, **149**, **155**, **164**, **165**  
     separabile, **118**  
     topologico, **104**, **104–119**  
     totalmente disconnesso, **112**, **129**  
     separabile, **118**, **128**  
     totalmente disconnesso, **142**  
  
 spazio metrico, **123**, **123–146**, **162**  
     e anche gruppo, **132**  
 spazio vettoriale, **119**, **229**  
     normato, **151–160**  
         strettamente convesso, **151**  
 strettamente convesso  
     spazio vettoriale normato, **151**  
 subadditiva, **124**, **169**, **179**  
 successione, **35**  
     convergenza di —, *vedi*  
         convergenza di successione  
     definita per ricorrenza, **61**, **94**  
     di Cauchy, **123**, **124**, **139**  
     di Cauchy, e sottosuccessione,  
         **124**  
     di Cauchy, **123**, **124**  
 successore  
     negli insiemi bene ordinati, **48**  
     nei numeri naturali secondo  
         Peano, **60**  
     nella teoria degli insiemi di  
         Zermelo–Fraenkel, **41**, **42**,  
         **69**  
 sup, *vedi* estremo superiore, **80**  
 superiormente limitato, **31**  
 supporto, **174**, **175**  
     di una curva, **214**  
 surgettiva, **25**  
 sviluppo  
     binomiale, *vedi* teorema  
         binomiale  
     di Laplace, **235**  
     di Taylor, *vedi* teorema di Taylor  
  
 $T_2$ , *vedi* Hausdorff  
 tassellatura, **149**  
 tautologia, **9**, **13**, **57**  
 Taylor, *vedi anche* serie di Taylor, *vedi*  
     *anche* teorema di Taylor,  
     *vedi anche* serie di Taylor  
 teorema  
     binomiale, **76**  
     Cauchy–Lipschitz, **219**  
     del valor medio, *vedi* teorema di  
         Lagrange  
     dell'incremento finito, *vedi*  
         teorema di Lagrange  
     dell'intersezione, *vedi* Cantor,  
         teorema dell'intersezione  
     della dimensione, **56**

della proiezione, **173**  
 delle due orecchie, **121**  
 di approssimazione di Dirichlet, **88**  
 di Ascoli–Arzelà, **204**  
 di Baire, **140**  
 di convergenza monotona, **103**  
 di De l’Hôpital, *vedi* regola di De l’Hôpital  
 di Edelstein, **137**  
 di esistenza e unicità locale, **219**  
 di funzione implicita, **195**  
 di Hahn–Banach, **174**  
 di Hurwitz, **73**  
 di Jordan, **120**  
 di Lagrange, **186**  
 di Mazur–Ulam, **154, 155**  
 di Mertens, **100**  
 di Taylor, **186, 190–193**  
     con resto di Lagrange, *vedi*  
         resto di Lagrange  
     con resto integrale, **183, 193**  
     in  $\mathbb{R}^n$ , **194, 195**  
 di Tychonoff, **119**  
 di unicità del limite, **123**  
 di Zermelo, **22**  
 Picard–Lindelöf, **219**  
 teoria  
     formale degli insiemi, **16, 17–21**  
     informale degli insiemi, **16**  
 tipo d’ordine, **33**  
 topologia, **104**  
     banale, *vedi* topologia indiscreta  
     d’ordine, **117, 118**  
     discreta, **104, 118, 129**  
     indiscreta, **104**  
     indotta, **111**  
     prodotto, **116, 130**  
     prodotto (infinito), **117, 118**  
     discreta, **123**  
     in spazi metrici, **125–130**  
 topologico  
     spazio, **104, 104–119**  
 totale  
     derivata, *vedi* derivata totale  
     relazione —, **25, 35**  
 totale, convergenza, *vedi* convergenza  
     totale  
 totalmente disconnesso, *vedi* spazio,  
     totalmente disconnesso  
 totalmente limitato, **138, 139**  
 transfinita  
     induzione —, **70**  
 transitiva  
     relazione, **25, 26**  
 transitivo  
     insieme, **44**  
 trascendente, **88**  
 triangolato, **121**  
 tricotomica  
     relazione, **25, 26**  
 Tucker, **200**  
 Tychonoff, **119**  
 UC, *vedi* funzione uniformemente  
     continua  
 uguaglianza, **8**  
     in teoria degli insiemi, **14**  
 Ulam, **154**  
 ultrametrica, **142**  
     delle successioni, dimensione,  
         **150**  
     delle successioni, **142**  
 uniforme, *vedi* convergenza, uniforme  
 unione di insiemi, **14, 17**  
 valutazione  
     di formula ben formata, **8, 9**  
 valutazione p-adica, **143, 144**  
 variabile  
     libera, **10**  
     quantificata, **11**  
 Von Neumann, **45**  
 vuoto, *vedi* insieme vuoto  
 Young  
     disuguaglianza, *vedi*  
         disuguaglianza di Young  
 Zermelo, **16, 17, 22**  
 ZF, *vedi* teoria formale degli insiemi,  
     **18, 53, 54**  
 ZFC, **18, 53, 54**  
 Zorn, **22, 174**

## Elenco delle figure

1	Rappresentazione della costante di Eulero-Mascheroni . . . . .	91
2	Esempi di poligoni con molti lati (pari o dispari) e solo due orecchie. Figura per 8.8 . . . . .	121
3	Un poligono per cui la rimozione di un orecchio fa decrescere il numero di lati (non etichettati) da 7 a 4. . . . .	122
4	Ingrassato di un insieme; esercizio 9.70 . . . . .	133
5	Figura per esercizio 16.57. . . . .	197
6	Insiemi dell'esercizio 20.12 . . . . .	216
7	Ellissi (in rosso) e curve a esse ortogonali. . . . .	219
8	Figura per 22.3 . . . . .	220
9	Esercizio 22.15. . . . .	223
10	Esercizio 22.16. Soluzioni per $a > 0$ . . . . .	223
11	Esercizio 22.16. Soluzioni per $a < 0$ . . . . .	224
12	Soluzione di 22.22: involuppo. . . . .	226

## Riferimenti bibliografici

- [1] M. Abate and F. Tovena. *Curves and Surfaces*. UNITEXT. Springer Milan, 2012. ISBN 9788847019416. DOI: 10.1007/978-88-470-1941-6. URL <https://books.google.it/books?id=iwGjNhpKSeQC>. †112
- [2] Emilio Acerbi, Luciano Modica, and Sergio Spagnolo. *Problemi scelti di Analisi Matematica II*. Liguori Editore, 1986. ISBN 88-207-1484-1. †119
- [3] L. Ambrosio, C. Mantegazza, and F. Ricci. *Complementi di matematica*. Scuola Normale Superiore, 2021. ISBN 9788876426933. URL <https://books.google.it/books?id=1QR0zgEACAAJ>. (document), 2.39, §2.b.b, §2.b.c, 2.90, †27, †30, §2.h.b, 2.258, §2.j, †42, †45, †46, 5.7, §5.c, 6.16, 6.17, 6.58, †58, 7.45, 7.50, 7.58, 7.59, 7.61, †65, 7.73, †68, †70, 9.80, §9.n, 16.26, §16.d, §17, §18, §19, 19.7, §20, §20, †112, 21.1, §22, §22.c
- [4] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison - Wesley, 1974. 15.20, 16.39
- [5] T.M. Apostol. *Calculus, Volume 1*. Wiley, 1991. ISBN 9780471000051. URL <https://books.google.it/books?id=o2D4DwAAQBAJ>. §13.a, §15, §16, §17, §18
- [6] John L. Bell. The Axiom of Choice. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter 2021 edition, 2021. 2.301
- [7] Andreas Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. In *Axiomatic set theory (Boulder, Colo., 1983)*, volume 31 of *Contemp. Math.*, pages 31–33. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984. 2.83
- [8] H. Cartan. *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013. ISBN 9780486318677. URL <https://books.google.it/books?id=xUHDAgAAQBAJ>. †108
- [9] Mariano Giaquinta and Giuseppe Modica. *Analisi Matematica 1. Funzioni di una variabile*. Pitagora Editrice Bologna, 1999. ISBN 9788837110499. †97
- [10] P.R. Halmos. *Naive Set Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN 9781475716450. URL [https://books.google.it/books?id=jV\\_aBwAAQBAJ](https://books.google.it/books?id=jV_aBwAAQBAJ). 2.52
- [11] H. Herrlich. *Axiom of Choice*. Axiom of Choice. Springer, 2006. ISBN 9783540309895. URL <https://books.google.it/books?id=JXIiGGmq4ZAC>. †22, 2.295
- [12] D. Hilbert, E.J. Townsend, and E. Jerome. *The Foundations of Geometry*. Project Gutenberg. Project Gutenberg., 2004. URL <https://www.gutenberg.org/ebooks/17384>. §8.a, §8.a
- [13] P.G. Hinman. *Fundamentals of Mathematical Logic*. Taylor & Francis, 2005. ISBN 9781568812625. URL <https://books.google.it/books?id=xA6D8o72qAgC>. §2.a, †10, 2.25, 2.52, †18, †22, 2.90, §2.h.b, 2.283

- [14] T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN 9783540447610. URL <https://books.google.it/books?id=CZb-CAAQBAJ>. 2.39, §2.b.b, †22, †29, §2.h.b
- [15] J.L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1975. ISBN 9780387901251. URL <https://books.google.it/books?id=-goleb90v3oC>. 2.114, 2.129, †39, 6.57, §7, 7.50, †68
- [16] Steven G. Krantz. *The Axiom of Choice*, pages 121–126. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002. ISBN 978-1-4612-0115-1. DOI: 10.1007/978-1-4612-0115-1\_9. †24
- [17] Azriel Levy. The independence of various definitions of finiteness. *Fundamenta Mathematicae*, 46:1–13, 1958. DOI: 10.4064/fm-46-1-1-13. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118218255>. †33
- [18] G. H. Meisters. Polygons have ears. *The American Mathematical Monthly*, 82(6):648–651, 1975. ISSN 00029890, 19300972. DOI: 10.2307/2319703. 8.8
- [19] Jan Mycielski. A system of axioms of set theory for the rationalists. volume 53, pages 206–213, 2006. URL <https://www.ams.org/journals/notices/200602/200602FullIssue.pdf>. 2.301
- [20] Livio C. Piccinini, Giovanni Vidossich, and Guido Stampacchia. *Equazioni differenziali ordinarie in  $R^N$  (problemi e metodi)*. Liguori Editore, 1978. §22, 22.22
- [21] ———. *Ordinary Differential Equations in  $R^n$* . Springer, 1984. ISBN 978-0-387-90723-9. DOI: 10.1007/978-1-4612-5188-0. §22
- [22] H. Rubin and J.E. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice, II*. ISSN. Elsevier Science, 1985. ISBN 9780080887654. URL <https://books.google.it/books?id=LSsbBU9FesQC>. 2.83, 2.276, 2.301
- [23] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw–Hill, New York, 3rd edition, 1964. †41, †42, †43, †44, †45, 5.7, 6.19, 6.43, §7, 7.45, §8.b, §13.a, §15, §16, §17, §18, §19, †113
- [24] Alfred Tarski. Sur quelques théorèmes qui équivalent à l’axiome du choix. *Fundamenta Mathematicae*, 5(1):147–154, 1924. 2.301
- [25] A. E. Taylor. L’Hospital’s rule. *The American Mathematical Monthly*, 59(1):20–24, 1952. ISSN 00029890, 19300972. URL <http://www.jstor.org/stable/2307183>. §16
- [26] Gerald Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140. American Mathematical Soc., 2012. ISBN 978-0-8218-8328-0. URL <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/index.html>. (Freely available on the author’s website). §22, 22.5
- [27] Helge Tverberg. A proof of the Jordan curve theorem. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 12(1):34–38, 1980. DOI: 10.1112/blms/12.1.34. §8.a, §8.a

- [28] Wikipedia. Preordine — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2015. URL <http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Preordine&oldid=74440486>. [Online; in data 1-dicembre-2022]. 2.191
- [29] ———. Mathematical morphology — Wikipedia, the free encyclopedia, 2016. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mathematical\\_morphology&oldid=714099245](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mathematical_morphology&oldid=714099245). [Online; accessed 24-July-2016]. §11.g
- [30] ———. Tautologia — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. URL <http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Tautologia&oldid=81165325>. [Online; in data 29-luglio-2016]. †10
- [31] ———. Teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. URL [https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoria\\_degli\\_insiemi\\_di\\_Zermelo-Fraenkel&oldid=82731028](https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoria_degli_insiemi_di_Zermelo-Fraenkel&oldid=82731028). [Online; in data 19-ottobre-2016]. 2.52
- [32] ———. Teoria ingenua degli insiemi — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. URL [https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoria\\_ingenua\\_degli\\_insiemi&oldid=82742337](https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoria_ingenua_degli_insiemi&oldid=82742337). [Online; in data 18-ottobre-2016]. 2.52
- [33] ———. Strictly convex space — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Strictly\\_convex\\_space&oldid=861198993](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Strictly_convex_space&oldid=861198993). [Online; accessed 15-maggio-2023]. †85
- [34] ———. Insieme diretto — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2019. URL [https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Insieme\\_diretto&oldid=102088385](https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Insieme_diretto&oldid=102088385). [Online; in data 25-novembre-2022]. 2.114, 2.129
- [35] ———. Rete (matematica) — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2019. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Rete\\_\(matematica\)&oldid=105548311](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Rete_(matematica)&oldid=105548311). [Online; in data 14-dicembre-2022]. 6.57
- [36] ———. Spazio di Baire — wikipedia, l'enciclopedia libera, 2020. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Spazio\\_di\\_Baire&oldid=112747513](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Spazio_di_Baire&oldid=112747513). [Online; in data 3-maggio-2023]. †82
- [37] ———. Teorema di Hurwitz (teoria dei numeri) — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2020. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema\\_di\\_Hurwitz\\_\(teoria\\_dei\\_numeri\)&oldid=110293279](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Hurwitz_(teoria_dei_numeri)&oldid=110293279). [Online; in data 30-novembre-2022]. 5.60
- [38] ———. Dominio d'integrità — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2021. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Dominio\\_d'integrità&oldid=118873859](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Dominio_d'integrità&oldid=118873859). [Online; in data 16-novembre-2022]. 4.13
- [39] ———. Identità di Bézout — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2021. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Identità\\_di\\_Bézout&oldid=121969472](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Identità_di_Bézout&oldid=121969472). [Online; in data 30-novembre-2022]. 5.59



- [40] ———. Ordered ring — Wikipedia, the free encyclopedia, 2021. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ordered\\_ring&oldid=1035305291](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ordered_ring&oldid=1035305291). [Online; accessed 16-November-2022]. 4.6
- [41] ———. Teorema di Heine-Borel — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2021. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema\\_di\\_Heine-Borel&oldid=124237381](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Heine-Borel&oldid=124237381). [Online; in data 7-agosto-2023]. §9j, 9.111
- [42] ———. Two ears theorem — Wikipedia, the free encyclopedia, 2021. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Two\\_ears\\_theorem&oldid=1024888322](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Two_ears_theorem&oldid=1024888322). [Online; accessed 13-novembre-2022]. 8.8
- [43] ———. Accumulation point — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Accumulation\\_point&oldid=1097360512](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Accumulation_point&oldid=1097360512). [Online; accessed 29-dicembre-2022]. †60
- [44] ———. Base (topologia) — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2022. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Base\\_\(topologia\)&oldid=130588263](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Base_(topologia)&oldid=130588263). [Online; in data 8-agosto-2023]. †68
- [45] ———. Cantor's intersection theorem — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cantor's\\_intersection\\_theorem&oldid=1127277305](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cantor's_intersection_theorem&oldid=1127277305). [Online; accessed 28-giugno-2023]. 5.30
- [46] ———. Derivazione delle funzioni iperboliche — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2022. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Derivazione\\_delle\\_funzioni\\_iperboliche&oldid=128089918](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Derivazione_delle_funzioni_iperboliche&oldid=128089918). [Online; in data 23-luglio-2023]. †110
- [47] ———. Hurwitz's theorem (composition algebras) — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hurwitz's\\_theorem\\_\(composition\\_algebras\)&oldid=1092800573](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hurwitz's_theorem_(composition_algebras)&oldid=1092800573). [Online; accessed 14-novembre-2022]. 4.5
- [48] ———. Resultant — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Resultant&oldid=1105451284>. [Online; accessed 1-dicembre-2022]. 5.69
- [49] ———. Topologist's sine curve — wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Topologist\\_s\\_sine\\_curve&oldid=1116036369](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Topologist_s_sine_curve&oldid=1116036369). [Online; accessed 24-aprile-2023]. 9.75
- [50] ———. Axiom of choice — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Axiom\\_of\\_choice&oldid=1173520442](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Axiom_of_choice&oldid=1173520442). [Online; accessed 28-September-2023]. †25
- [51] ———. Baker–Campbell–Hausdorff formula — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Baker-Campbell-Hausdorff\\_formula&oldid=1168221703](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Baker-Campbell-Hausdorff_formula&oldid=1168221703). [Online; accessed 7-agosto-2023]. 18.28

- [52] \_\_\_\_\_. Big O notation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Big\\_O\\_notation&oldid=1161509085](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Big_O_notation&oldid=1161509085). [Online; accessed 24-giugno-2023]. 16.31
- [53] \_\_\_\_\_. Cantor set — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cantor\\_set&oldid=1166344861](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cantor_set&oldid=1166344861). [Online; accessed 10-agosto-2023]. §8.b
- [54] \_\_\_\_\_. Curva di Koch — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Curva\\_di\\_Koch&oldid=131755745](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Curva_di_Koch&oldid=131755745). [Online; in data 4-maggio-2023]. 10.21
- [55] \_\_\_\_\_. Determinant — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Determinant&oldid=1169031704>. [Online; accessed 10-agosto-2023]. 23.15
- [56] \_\_\_\_\_. Faà di Bruno's formula — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Faa\\_di\\_Bruno\\_s\\_formula&oldid=1160739646](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Faa_di_Bruno_s_formula&oldid=1160739646). [Online; accessed 19-giugno-2023]. 16.19
- [57] \_\_\_\_\_. Hermite interpolation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hermite\\_interpolation&oldid=1131496413](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hermite_interpolation&oldid=1131496413). [Online; accessed 2-luglio-2023]. 16.29
- [58] \_\_\_\_\_. Mazur–Ulam theorem — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mazur-Ulam\\_theorem&oldid=1169902092](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mazur-Ulam_theorem&oldid=1169902092). [Online; accessed 29-August-2023]. §11.b
- [59] \_\_\_\_\_. Natural density — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Natural\\_density&oldid=1152033872](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Natural_density&oldid=1152033872). [Online; accessed 7-agosto-2023]. 23.11
- [60] \_\_\_\_\_. Poligono — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL <http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Poligono&oldid=134370006>. [Online; in data 10-agosto-2023]. †73
- [61] \_\_\_\_\_. Punto di discontinuità — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Punto\\_di\\_discontinuita&oldid=132026126](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Punto_di_discontinuita&oldid=132026126). [Online; in data 18-maggio-2023]. 13.3, 13.4
- [62] \_\_\_\_\_. Rank (linear algebra) — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rank\\_\(linear\\_algebra\)&oldid=1142781860](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rank_(linear_algebra)&oldid=1142781860). [Online; accessed 10-agosto-2023]. 23.15
- [63] \_\_\_\_\_. Regola del prodotto — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Regola\\_del\\_prodotto&oldid=133241954](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Regola_del_prodotto&oldid=133241954). [Online; in data 19-giugno-2023]. 16.18
- [64] \_\_\_\_\_. Regola di De l'Hôpital — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Regola\\_di\\_De\\_l'Hopital&oldid=134135629](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Regola_di_De_l'Hopital&oldid=134135629). [Online; in data 16-settembre-2023]. §16

- [65] ———. Teorema di Lagrange — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023.  
URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema\\_di\\_Lagrange&oldid=133646261](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Lagrange&oldid=133646261). [Online; in data 16-settembre-2023]. §16
- [66] ———. Teorema di Taylor — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023.  
URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema\\_di\\_Taylor&oldid=132628671](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Taylor&oldid=132628671). [Online; in data 16-settembre-2023]. §16
- [67] ———. Valutazione p-adica — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023.  
URL [http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Valutazione\\_p-adica&oldid=131981334](http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Valutazione_p-adica&oldid=131981334). [Online; in data 3-maggio-2023]. 9.154
- [68] Laurent Younes, Peter W. Michor, Jayant Shah, and David Mumford. A metric on shape space with explicit geodesics. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 19(1):25–57, 2008. ISSN 1120-6330. DOI: [10.4171/RLM/506](https://doi.org/10.4171/RLM/506). 20.10

# Indice

<b>§1</b>	<b>Notazioni</b>	<b>4</b>
<b>§2</b>	<b>Fondamenti</b>	<b>6</b>
§2.a	Logica	6
§2.a.a	Proposizioni	6
§2.a.b	Logica proposizionale	6
§2.a.c	Logica del primo ordine	10
§2.b	Teoria degli insiemi	13
§2.b.a	Teoria degli insiemi elementare	13
§2.b.b	Assiomi di Zermelo–Fraenkel	17
§2.b.c	Lemma di Zorn, Assioma della Scelta, Teorema di Zermelo	22
§2.c	Relazioni	25
§2.d	Ordinamenti	27
§2.d.a	Ordinamento diretto e filtrante	28
§2.d.b	Ordinamento lessicografico	30
§2.d.c	Ordinamento totale, sup e inf	31
§2.d.d	Ordinamento totale, intervalli	32
§2.d.e	Tipi di ordine	33
§2.d.f	Concatenazione	34
§2.e	Funzioni	35
§2.f	Funzioni elementari	38
§2.g	Passaggio al quoziente	39
§2.h	Numeri naturali in ZF	41
§2.h.a	Successore	41
§2.h.b	Numeri naturali in ZF	42
§2.h.c	Insiemi transitivi	44
§2.h.d	Ordinali	45
§2.i	Buoni ordinamenti	47
§2.i.a	Successore	48
§2.i.b	Segmenti e buoni ordinamenti	49
§2.i.c	Esempi	50
§2.j	Cardinalità	50
§2.j.a	Insiemi finiti	51
§2.j.b	Confronto	51
§2.j.c	Cardinalità numerabile	52
§2.j.d	Cardinalità del continuo	53
§2.j.e	In generale	54
§2.j.f	Potenza	56
§2.k	Operazioni su insiemi	56
§2.k.a	Limsup e liminf di insiemi	58
§2.l	Combinatoria	59
<b>§3</b>	<b>Numeri naturali</b>	<b>60</b>
§3.a	Induzione	61
§3.b	Definizione per ricorrenza	61
§3.c	Aritmetica	63
§3.d	Ordinamento	65
§3.d.a	Ordinamento dall'aritmetica	66

§3.d.b	Ordinamento e aritmetica . . . . .	68
§3.e	Compatibilità Z-F e Peano . . . . .	69
§3.f	Induzione generalizzata, buon ordinamento . . . . .	69
§3.g	Frequentemente, definitivamente . . . . .	70
<b>§4</b>	<b>Gruppi, Anelli, Campi</b>	<b>72</b>
<b>§5</b>	<b>Retta reale</b>	<b>77</b>
§5.a	Intorni . . . . .	78
§5.b	Frequentemente, definitivamente . . . . .	79
§5.c	Estremi superiori e inferiori . . . . .	80
§5.c.a	Esercizi . . . . .	81
§5.d	Limiti . . . . .	82
§5.e	Limiti superiori e inferiori . . . . .	83
§5.f	Approssimazione di numeri irrazionali . . . . .	87
§5.g	Algebrici . . . . .	88
<b>§6</b>	<b>Successioni e serie</b>	<b>90</b>
§6.a	Successioni . . . . .	90
§6.a.a	Sommazione per parti . . . . .	93
§6.b	Successioni definite per ricorrenza . . . . .	94
§6.c	Serie . . . . .	94
§6.c.a	Criteri . . . . .	94
§6.c.b	Esercizi . . . . .	97
§6.c.c	Prodotto di Cauchy . . . . .	100
§6.d	Successioni generalizzate, o “reti” . . . . .	100
§6.e	Serie generalizzate . . . . .	102
§6.e.a	Serie generalizzate a termini positivi . . . . .	102
<b>§7</b>	<b>Topologia</b>	<b>104</b>
§7.a	Intorni, punti aderenti, isolati, di accumulazione . . . . .	106
§7.b	Esempi . . . . .	107
§7.c	Topologie generate . . . . .	109
§7.d	Compattezza . . . . .	109
§7.e	Connessione . . . . .	110
§7.f	Reti . . . . .	112
§7.g	Continuità e limiti . . . . .	113
§7.h	Basi . . . . .	115
§7.i	Spazi primo- e secondo-numerabili . . . . .	118
§7.j	Spazi non primo-numerabili . . . . .	118
<b>§8</b>	<b>Miscellanea</b>	<b>120</b>
§8.a	Poligoni . . . . .	120
§8.b	Insieme di Cantor . . . . .	122
<b>§9</b>	<b>Spazi metrici</b>	<b>123</b>
§9.a	Definizioni . . . . .	123
§9.b	Topologia in spazi metrici . . . . .	125
§9.b.a	Basi di palle . . . . .	129
§9.b.b	Punti di accumulazione, punti limite . . . . .	130
§9.c	Quozienti . . . . .	131

§9.d	Funzione distanza . . . . .	132
§9.e	Connessione . . . . .	133
§9.f	Topologia nella retta reale . . . . .	134
§9.g	Topologia nello spazio euclideo . . . . .	135
§9.h	Punti fissi . . . . .	137
§9.i	Isometrie . . . . .	137
§9.j	Compattezza . . . . .	138
§9.k	Teoremi e categorie di Baire . . . . .	140
§9.l	Prodotto di infiniti spazi metrici . . . . .	141
§9.m	Ultrametria . . . . .	142
§9.m.a	Ultrametria delle successioni . . . . .	142
§9.n	Ultrametria p-adica . . . . .	143
§9.o	Circonferenza . . . . .	145
<b>§10</b>	<b>Dimensione</b>	<b>147</b>
<b>§11</b>	<b>Spazi normati</b>	<b>151</b>
§11.a	Norme nello spazio Euclideo . . . . .	153
§11.b	Isometrie . . . . .	154
§11.c	Convergenza totale . . . . .	155
§11.d	Norme di applicazioni lineari . . . . .	155
§11.e	Norme di matrici . . . . .	156
§11.f	Somma di Minkowski . . . . .	157
§11.g	Morfologia matematica . . . . .	158
<b>§12</b>	<b>Semicontinuit�, limiti destri e sinistri</b>	<b>161</b>
§12.a	Semi continuit� . . . . .	161
§12.b	Funzioni regolate . . . . .	163
§12.c	Trasformata di sup . . . . .	164
<b>§13</b>	<b>Continuit�</b>	<b>166</b>
§13.a	Funzioni continue . . . . .	166
§13.b	Funzioni uniformemente continue . . . . .	167
§13.c	Funzioni Lipschitziane & Hölderiane . . . . .	170
§13.d	Funzioni discontinue . . . . .	171
<b>§14</b>	<b>Funzioni e insiemi convessi</b>	<b>172</b>
§14.a	Insiemi convessi . . . . .	172
§14.a.a	Proiezione, separazione . . . . .	173
§14.b	Funzione convessa . . . . .	175
§14.c	Caso reale . . . . .	177
§14.c.a	Convessit� e derivate . . . . .	177
§14.c.b	Funzioni convesse a valori estesi . . . . .	178
§14.d	Ulteriori propriet� e esercizi . . . . .	179
§14.d.a	Funzione distanza . . . . .	179
§14.d.b	Funzioni e insiemi strettamente convessi . . . . .	180
<b>§15</b>	<b>Integrale di Riemann</b>	<b>181</b>
<b>§16</b>	<b>Funzioni derivabili</b>	<b>186</b>
§16.a	Derivate successive . . . . .	188

§16.b	Sviluppo di Taylor . . . . .	190
§16.c	Derivate parziali e totali, differenziali . . . . .	193
§16.d	Teorema di funzione implicita . . . . .	195
§16.d.a	Estensioni . . . . .	197
§16.e	Problemi vincolati . . . . .	199
§16.e.a	Vincoli con disequaglianze . . . . .	200
<b>§17</b>	<b>Limiti di funzioni</b>	<b>201</b>
§17.a	Sul Teorema di Ascoli–Arzelà . . . . .	204
<b>§18</b>	<b>Serie di potenze</b>	<b>205</b>
§18.a	Somma e prodotto, composizione e inversa . . . . .	206
§18.b	Exp, sen, cos . . . . .	207
§18.c	Esponenziale di matrici . . . . .	208
<b>§19</b>	<b>Funzioni analitiche</b>	<b>212</b>
<b>§20</b>	<b>Curve</b>	<b>214</b>
§20.a	Curve chiuse . . . . .	215
<b>§21</b>	<b>Superfici</b>	<b>218</b>
<b>§22</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>219</b>
§22.a	Problemi autonomi . . . . .	220
§22.b	Risoluzione . . . . .	221
§22.c	Discussioni qualitative . . . . .	222
§22.d	Inviluppo . . . . .	225
§22.e	Equazioni lineari . . . . .	228
§22.f	Equazioni matriciali . . . . .	230
<b>§23</b>	<b>(pseudo)compit(in)i</b>	<b>232</b>
§23.a	Equazioni funzionali . . . . .	236
§23.b	Campi vettoriali . . . . .	237
<b>UUID</b>		<b>238</b>
<b>Indice analitico</b>		<b>243</b>
<b>Elenco delle figure</b>		<b>253</b>