Database di Esercizi

per il corso di Matematica al I anno
della Scuola Normale Superiore

Andrea C. G. Mennucci

(versione 26 novembre 2026)

Pisa, Italia

Raccolta di esercizi e elementi di teoria proposti nelle esercitazioni del corso interno di Matematica rivolto agli allievi del I anno della Scuola Normale Superiore.

Introduzione [100]

La Scuola Normale Superiore è un prestigioso istituto universitario a ordinamento speciale che accoglie studenti in due percorsi distinti: il *corso ordinario*, parallelo ai corsi di laurea triennale e magistrale, e il *corso di perfezionamento*, noto anche come PhD.

Durante l'anno accademico gli studenti "normalisti" del corso ordinario devono seguire, oltre ai corsi universitari regolari presso l'Università di Pisa, alcuni "corsi interni". Gli studenti normalisti iscritti al primo anno di laurea in materie scientifiche come Matematica, Fisica, Chimica e Biologia, seguono un corso interno annuale di Matematica che mira ad approfondire e ampliare le nozioni tradizionalmente incluse nei programmi dei corsi universitari, che i normalisti seguono in parallelo.

Negli ultimi quindici anni questo corso ha incluso una serie di argomenti fondamentali. Inizia con un approfondimento dei fondamenti della Matematica, compreso l'uso degli assiomi di Zermelo-Fraenkel per la teoria degli insiemi, la costruzione degli insiemi numerici e la caratterizzazione dei numeri reali $\mathbb{R}$ come campo ordinato completo. Prosegue con argomenti come serie e successioni, spazi metrici e topologia, calcolo differenziale ed equazioni differenziali ordinarie.

In questi anni sono stati titolari del corso i professori Giuseppe Da Prato, Fulvio Ricci, Luigi Ambrosio e Franco Flandoli. Alle esercitazioni, hanno collaborato, oltre all'autore del presente volume, Francesco Bonsante, Carlo Mantegazza, Simone Di Marino, Tommaso Pacini, Luciano Mari, Lorenzo Mazzieri, Andreas Hochenegger, Andrea Ferraguti, Alessandra Caraceni.

Gli appunti di questo corso sono stati pubblicati in [3].

L'autore ha collaborato alla parte delle "esercitazioni" (ora chiamata "didattica integrativa") per oltre dieci anni, accumulando una vasta quantità di materiale teorico e di esercizi, che vengono ora presentati in questo volume.

Come già per il testo [3], così anche questo volume non è completamente autonomo, poiché è pensato come un complemento ai corsi universitari standard del primo anno. Tuttavia, la prima parte costituisce un'eccezione, poiché i corsi che coprono gli argomenti dei fondamenti di logica di solito non sono offerti nel primo anno, e i testi spesso utilizzati in questi corsi non sono di facile accesso per gli studenti di primo anno. Pertanto, i capitoli 3 e 4 sono stati ampliati per includere gli elementi teorici necessari, spesso presentati sotto forma di esercizi. D'altra parte, a partire dal Capitolo 5, sono fornite referenze utili e/o necessarie per affrontare gli esercizi, oltre a definizioni e lemmi.

Va notato che la numerazione nel volume segue un metodo specifico: le sezioni (e sottosezioni), le note a piè di pagina e le figure sono numerate in modo indipendente, mentre tutto il resto del materiale nel volume segue una numerazione unica, divisa per sezioni. Ciò include teoremi, proposizioni, lemmi, equazioni, e altro ancora. Le diverse numerazioni sono rese distinguibili dall'uso di numeri romani o arabi e/o da appositi simboli, quale § per le sezioni e † per le note.

ColDoc [2G2]

L'autore ha creato un pacchetto software denominato ColDoc (liberamente disponibile) che semplifica la gestione di documenti LaTeXcomplessi e ne permette la fruizione *online*. È utilizzabile sia da computer che da tablet e smartphone.

La versione ColDoc di questo testo è accessibile all'indirizzo https://coldoc.sns.it/CD/EDB; questo portale fu inizialmente creato per facilitare l'interazione con

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

gli studenti nell'anno della pandemia Covid. Il software ColDoc è stato migliorato negli anni, ed è adesso un robusto sistema di *document management*.

Il sistema ColDoc ha diviso il testo in piccoli elementi, ciascuno identificato da un codice UUID. Il codice UUID identifica permanentemente un oggetto; laddove il numero assegnato dal sistema LaTeX potrebbe cambiare se altro materiale venisse aggiunto prima di questo oggetto (ad esempio, in una futura nuova edizione). Il codice UUID può essere dunque usato per riferimenti bibliografici, come anche per appuntarsi un elemento di interesse e condividerlo con un collega o uno studente, in quanto il codice UUID si può usare per ritrovare l'elemento nell'interfaccia *web*. Per esempio, questa introduzione sarà ritrovabile all'indirizzo https://coldoc.sns.it/UUID/EDB/2G1.

Il sistema ColDoc implementa inoltre un sistema per gestire documenti LaTeX multilingua: questo testo per esempio è disponibile in Inglese e in Italiano.

Copyright

[009]

Questo testo è Copyright: Andrea C. G. Mennucci, 2012-2024.

Le sezioni di teoria (definizioni, teoremi, e simili; e enunciati di esercizi) sono rilasciate con licenza: Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License (WP:CC BY-SA).

I diritti sulle soluzioni degli esercizi (in appendice) sono riservati. L'autore mantiene diritti esclusivi su queste, ai sensi della normativa vigente.

§1 Notazioni [00B]

- $\mathbb{N}$ sono i numeri naturali, incluso lo zero.
- $\mathbb{Z}$ sono i numeri interi.
- $\mathbb{Q}$ sono i numeri razionali.
- $\mathbb{R}$ è la retta reale.
- $\mathbb{C}$ sono i numeri complessi.

Un'elenco di simboli si trova inoltre all'inizio dell'indice analitico.

Nota 1.1. *I simboli $\wedge$ e $\vee$ possono essere utilizzati in due contesti diversi, dove assumono significati diversi.* [2DM]

- *Se $x, y \in \mathbb{R}$ sono numeri reali, allora $x \wedge y$ è il minimo dei due numeri, mentre $x \vee y$ è il massimo dei due numeri. Questa interpretazione è appropriata anche quando x, y sono in un insieme totalmente ordinato.* [†1]
- *In logica matematica, $\wedge$ è la* congiunzione *e $\vee$ è la* disgiunzione. *Vedi 2.4.*

Nota 1.2. *I simboli () usati per le parentesi sono purtroppo sovraccarichi di significati nel linguaggio matematico comune.* [2FG]

- *Sono usati per raggruppare operazioni algebriche, per indurre un diverso ordine di operazioni (rispetto alle regole standard di precedenza). Ad esempio, per $x, y \in \mathbb{R}$,* [†2] *l'espressione $x(y+2)$ è identica a $xy + 2x$ e non a $xy + 2$.*
- *Sono usati per indicare argomenti di funzioni. Ad esempio l'espressione $f(x+y)$ dovrebbe essere letta come $fx+fy$, se $f, x, y \in \mathbb{R}$* [†3]*; mentre, se f è una funzione $f : \mathbb{R} \to B$, allora $f(x+y)$ è il risultato $f(z)$ ottenuto valutando f sull'elemento $z = x + y$.*

  Per distinguere questi due usi, può essere sufficiente aggiungere un simbolo esplicito per indicare la "moltiplicazione", ad esempio scrivere $f * (x + y)$ quando dovrebbe essere letto come $f * x + f * y$. (Alcuni autori scrivono anche $f.(x+y)$ con un "punto")
- *Sono usati per definire intervalli, ad esempio, $(1, \pi)$ può essere l'abbreviazione di:* «l'insieme dei numeri reali maggiori di 1 e minori di π;» *cioè*

$$(1, \pi) = \{t \in \mathbb{R} : 1 < t < \pi\};$$

  questo si estende agli insiemi ordinati, si veda Sez. §2.d.d.
- *Sono usati per rappresentare elementi del prodotto cartesiano; ad esempio, $(1, \pi)$ è un punto in $\mathbb{R}^2$ con 1 come ascissa e π come ordinata.*

[†1] $\wedge$ e $\vee$ sono usati anche in insiemi parzialmente ordinati, ma non discuteremo la loro definizione in questo testo.

[†2] O, più in generale, se x, y sono elementi di un *anello* dove la moltiplicazione è indicata dalla giustapposizione di simboli.

[†3] Di nuovo, più in generale, se f, x, y sono elementi di un *anello* dove la moltiplicazione è denotata dalla giustapposizione.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Mentre la prima e la seconda situazione sono solitamente discernibili e riconoscibili, la terza e la quarta possono causare confusione.

È necessaria una certa attenzione nell'analisi delle frasi che coinvolgono prodotti cartesiani di insiemi ordinati, come ad esempio: «un punto (x, y) nel rettangolo R del piano che è il prodotto $R = (0, 1) \times (2, 4)$». *Qui (x, y) è un punto in $\mathbb{R}^2$ mentre $(0, 1), (2, 4)$ sono intervalli in $\mathbb{R}$.*

Per evitare confusione, possiamo usare una notazione diversa per i punti e/o per gli intervalli: molti simboli simili a "parentesi" sono disponibili al giorno d'oggi nello spazio di codice Unicode esteso; e sono utilizzabili in LaTeX usando il pacchetto `unicode-math`.

Ad esempio, nell'affermazione precedente, possiamo usare questa notazione (non standard): parentesi barrate $\mathbf{(}...\mathbf{)}$ per indicare il punto in $\mathbb{R}^2$ con x come ascissa e y come ordinata; le doppie parentesi $(\!(a, b)\!) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ per gli intervalli; in modo da ottenere «un punto $\mathbf{(}x, y\mathbf{)}$ nel rettangolo R del piano che è il prodotto $R = (\!(0, 1)\!) \times (\!(2, 4)\!)$». *In questo caso, per coerenza tipografica, possiamo usare allo stesso tempo doppie parentesi quadre per intervalli chiusi, ad esempio $[\![2, 4]\!]$.*

Questo può essere considerato eccessivo per questo esempio. Ma la situazione può essere più complicata!

Ad esempio, potremmo avere a che fare con intervalli di elementi di un insieme ordinato X, che è anche un prodotto cartesiano $X = X_1 \times X_2$ di insiemi ordinati X_1, X_2 (!) [†4] *In tal caso, possiamo prima etichettare gli ordinamenti: $\leq_1$ essendo la relazione d'ordine su X_1, $\leq_2$ essendo la relazione d'ordine su X_2, e $\preceq$ essendo la relazione d'ordine su X; e utilizzare una notazione (non standard) per gli intervalli, ad esempio*

$$(\!(a, b)\!)_1 = \{t \in X_1 : a <_1 t <_1 b\}$$

per gli intervalli aperti nel primo insieme (con estremi $a, b \in X_1$),

$$(\!(z, w)\!)_{\preceq} = \{x \in X : w \prec x \prec z\}$$

per intervalli aperti nel prodotto cartesiano X (con estremi $z, w \in X$), e così via. Ancora una volta, per coerenza tipografica, possiamo usare doppie parentesi quadre per intervalli chiusi, come ad esempio

$$[\![a, b]\!]_1 = \{x \in X_1 : a \leq_1 x \leq_1 b\}$$

e così via.

Nel seguito useremo spesso le usuali parentesi (), *come è consuetudine; ma in certi contesti useremo la notazione proposta in questa nota (quando potrebbe aiutare nella comprensione del testo).*

Si vedano inoltre le note 2.6 e 5.1.

[†4] Ed esiste un metodo standard per ordinare un prodotto cartesiano di insiemi ordinati, si veda Sez. §2.d.b.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§2 Fondamenti [00C]

§2.a Logica [1YS]

Nelle prossime sezioni daremo alcune definizioni; queste sono semplificate, ma sufficienti per affrontare gli esercizi. I lettori interessati a un approfondimento possono consultare un libro di logica quale ad esempio [13]. [23H]

§2.a.a Proposizioni

Definizione 2.1. *Una proposizione logica φ è un' asserzione che assume valore di verità o di falsità.* [1VW]

(Svolto il 2022-10-11)

Esempio 2.2. *Esempi:* [1VX]

- *"la neve è bianca",*
- *"la Terra ha un diametro di circa 12000km",*
- *"un kg di pane costa 3€".*

(Si potrebbe discutere filosoficamente su cosa si intende per "verità": in molti ambiti la verità di una proposizione è soggettiva, può dipendere dal contesto, dall'interpretazione, da chi fa e da chi risponde alla domanda, da quando la domanda è posta, etc etc; in matematica la situazione è più semplice). [23J]

Una proposizione può dipendere da alcune variabili. Esempi:

- "la persona x di mestiere fa il panettiere",
- "il numero x è maggiore di 9".

Scriveremo

$$P(x) \doteq \text{"il numero x è maggiore di 9"}$$

per dire che $P(x)$ è il simbolo che riassume la proposizione scritta a destra.

Nota 2.3. *Perché la proposizione abbia senso, dovremo restringere l'ambito della variabile a un opportuno insieme; nel primo caso, l'insieme degli essere umani; nel secondo caso, un insieme numerico (es. numeri interi).* [23K]

A questo livello della trattazione, il concetto di "insieme" è intuitivo; vedremo più avanti che esiste una teoria assiomatica degli insiemi, quasi universalmente usata in Matematica; comunque anche il concetto intuitivo di insieme è ampiamente usato (Si veda la nota 2.52).

§2.a.b Logica proposizionale

Definizione 2.4. *Una **logica proposizionale** è un linguaggio, con associato un alfabeto di variabili (che per comodità nel seguito identificheremo con l'alfabeto Italiano) e la* [00D]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

famiglia di connettivi [†5]

negazione, NOT	$\neg$
congiunzione, AND	$\wedge$
disgiunzione, OR	$\vee$
implicazione	$\Rightarrow$
doppia implicazione, iff	$\Leftrightarrow$

a questi simboli aggiungiamo le parentesi, che sono usate per raggruppare parti della formula (quando vi sia il rischio di ambiguità); le parentesi sono omesse quando la precedenza degli operatori lo permette; gli operatori sono elencati nella precedente lista in ordine decrescente di precedenza. [†6]

Definizione 2.5. *Le **formule ben formate** sono* [00G]

(Svolto il 2022-10-11)

- *formule atomiche, cioè composte da una sola variabile, oppure*
- *una formula del tipo $\neg(\alpha)$ dove α è una formula ben formata, oppure*
- – *una formula del tipo $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$, oppure*
  – *una formula del tipo $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$, oppure*
  – *una formula del tipo $(\alpha) \vee (\beta)$, oppure*
  – *una formula del tipo $(\alpha) \wedge (\beta)$,*

  dove α, β sono due formule ben formate.

Si può determinare se una formula è ben formata facendo un numero finito di controlli usando le regole precedenti: infatti le regole stabiliscono che ogni formula ben formata si deve poter spiegare in termini di formule ben formate che sono più corte di lei. Dunque la affermazione *"questa formula è ben formata"* è "decidibile". [†7] [1YK]

Nota 2.6. *Nella definizione 2.5 si parla di* formule atomiche, cioè composte da una sola variabile*; vogliamo riflettere su questo. Nei linguaggi di programmazione è permesso usare, per identificare gli oggetti (variabili, funzioni, etc), nomi composti da più lettere, come ad esempio* [228]

```
foo = 3 ;
bar = 7;
pippo = foo + bar;
```

Nella matematica questo è inusuale, in quanto in una formula come

$$xyz + abc$$

sarebbe difficile capire se xyz è una variabile, oppure il prodotto di tre variabili x, y, z. Per questo, d'abitudine, in matematica gli identificativi sono composti da una sola

[†5] Nei testi di logica spesso viene usato il simbolo $\rightarrow$ per l'implicazione e il simbolo $\leftrightarrow$ per la doppia implicazione

[†6] Alcuni studiosi usano diversi ordini di precedenza, in particolare alcuni considerano "l'implicazione" precedente alla rispetto alla "disgiunzione". Per questo è sempre meglio usare le parentesi per raggruppare le parti di frase dove questi connettivi vengono usati.

[†7] La definizione precisa di "decidibile" esula da queste note. Pensate a un algoritmo scritto al computer che, data una formula, con un numero finito di passaggi risponda "ben formata" oppure "non ben formata". Notate però che il numero di controlli da fare cresce esponenzialmente con la lunghezza della formula.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

lettera; fanno eccezione alcune funzioni notevoli, quali $\sin, \cos, \exp, \log$*…etc. Questo però crea qualche problema quando si vuole esprimere una formula dove vi siano molte variabili; per questo vengono usati anche lettere dall'alfabeto greco, e persino ebraico, in particolare "aleph"* $\aleph$ *e "beth"* $\beth$*; e le lettere vengono inoltre corredate da indici, a pedice come* x_1, x_2, x_3 *o ad apice* x^1, x^2, x^3 *(stando attenti a non confondersi con l'elevamento a potenza); vi sono poi varianti espressi con i segni* $\hat{x}, \overline{x}, \tilde{x}, x'$ *(stando attenti a non confondersi con le derivate); e vi sono scelte di tipi di carattere, quali il* "calligrafico" $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \ldots$*, il* "fraktur" $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *o il* blackboard bold $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, \mathbb{d} \ldots \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$.

Definizione 2.7. *Una* ***valutazione*** *assegna ad ogni variabile un valore "vero" oppure "falso". Conoscendo il valore delle variabili, e usando le note tabelle di verità per i connettivi* [†8]*, si può calcolare il valore di ogni formula ben formata.* [00J]

Dunque una formula ben formata è una "*proposizione logica*" in quanto assume valore di verità o di falsità, a seconda del valore dato alle sue variabili libere. Possiamo allargare la definizione aggiungendo che le proposizioni viste nella sezione precedente sono "formule atomiche"; ad esempio

"x è un numero minore di 3" $\wedge$ "y è un numero pari"

sarà anch'essa una "formula ben formata".

Per comodità, in questa Sezione, aggiungiamo al linguaggio anche le costanti V e F che sono rispettivamente sempre vere e sempre false, in ogni valutazione. [†9] Nella costruzione delle formule ben formate vengono trattate come le variabili. Notate che non abbiamo introdotto il connettivo di uguaglianza "=". Quando tutte le variabili possono assumere solo i valori vero/falso, l'uguaglianza $a = b$ può essere interpretata come $a \iff b$. In contesti più generali (come nel caso della teoria degli insiemi) invece "l'uguaglianza" necessita di una precisa definizione.

Esercizi

E2.8 Completate la seguente tabella di verità [1VY]

P	Q	$\neg$ P	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1VZ']

E2.9 Dite quali formule sono ben formate, e aggiungete le parentesi per evidenziare l'ordine di precedenza. [00K]

$$a \wedge \neg b \wedge c \wedge d$$
$$\neg a \vee b \wedge c \Rightarrow d$$
$$a \Rightarrow \neg b \wedge c \vee d$$
$$a \wedge b \vee c \Leftrightarrow \neg c \Rightarrow d$$
$$a \vee b \neg c \vee d$$

[†8] Si veda 2.8

[†9] Le costanti V e F possono essere eliminate dalla logica definendole come $V = A \vee \neg A$ e $F = \neg V$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '00M']`

E2.10 Una formula ben formata nella logica proposizionale è una **tautologia** se per ogni *valutazione* la formula è sempre vera. Supponiamo che A, B, C siano formule ben formate. Mostrate che le seguenti proprietà dei connettivi sono tautologie. [†10] `[00N]`

$A \Rightarrow A$	legge dell'identità	
$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	legge della doppia negazione	
$A \vee A \Leftrightarrow A \ , \ A \wedge A \Leftrightarrow A$	leggi di idempotenza	
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	legge di contrapposizione, o della contronominale[†11]	(2.11)
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$	equivalenza di implicazione, congiunzione e disgiunzione	(2.12)
$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$	prima legge di De Morgan	(2.13)
$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	seconda legge di De Morgan	(2.14)
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione	(2.15)
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione	(2.16)
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	proprietà commutativa di $\wedge$	
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	proprietà commutativa di $\vee$	
$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	proprietà associativa di $\wedge$	
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	proprietà associativa di$\vee$	(2.17)

Queste due ultime proprietà permettono di omettere le parentesi in sequenze di congiunzioni oppure di disgiunzioni.

Le proprietà (2.12),(2.13),(2.14) dicono che potremmo fondare tutta la logica sui soli connettivi $\neg$ e $\wedge$, (o su $\neg, \vee$).

[†10] Queste liste sono tratte dalla Sezione 1.3 in [13], oppure [30].

[†11] La proposizione $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ è detta *"contronominale"* della $(A \Rightarrow B)$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Altre tautologie importanti, spesso usate nel ragionamento logico.

$A \vee \neg A$	legge del terzo escluso	
$\neg(A \wedge \neg A)$	legge di non contraddizione	
$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$	modus ponens	(2.18)
$(\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A$	modus tollens	(2.19)
$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	negazione dell'antecedente	
$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	affermazione del conseguente	
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$	esportazione	
$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))$	dimostrazione per parti	
$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$	dimostrazione per casi	
$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	sillogismo ipotetico, o transitività dell'implicazione	
$(A \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow$		
$(A \vee F) \Leftrightarrow (A \wedge V) \Leftrightarrow A$	leggi di assorbimento	
$F \Rightarrow B$	prima legge di Pseudo Scoto, o *ex falso sequitur quodlibet*	
$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$	seconda legge di Pseudo Scoto	
$(\neg A \Rightarrow F) \Leftrightarrow A$	dimostrazione per assurdo	
$((A \wedge \neg B) \Rightarrow F) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$	dimostrazione per assurdo, con ipotesi e tesi	
$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$	consequentia mirabilis	(2.20)

E2.21 Mostrate la validità della seguente tautologia [22C]

$$((\neg A \wedge B) \Rightarrow C) \iff ((\neg C \wedge B) \Rightarrow A)$$

indi usate l'esercizio 2.313 per trasformarla in un diagramma di Venn con tre insiemi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '22D']

E2.22 Mostrate che il connettivo $\Rightarrow$ di implicazione non è né commutativo né associativo. [†12] *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2G9'] [2G8]

§2.a.c Logica del primo ordine

Nella logica del primo ordine si aggiungono i connettivi $\forall$, che si legge *"per ogni"* e $\exists$, che si legge *"esiste"*. Dobbiamo dunque allargare la famiglia delle **formule ben formate**.

Definizione 2.23. *Una formula è ben formata se soddisfa tutte le regole nella lista in 2.5 e questa regola aggiuntiva:* "data una formula ben formata ϕ dove la variabile x è libera, una formula della forma "$\forall x, \phi$", o "$\exists x, \phi$" è una formula ben formata." [00Q]

*Diremo che una variabile x è **libera** in una formula ben formata se*

- *la formula è atomica e la variabile x appare in essa; oppure se*
- *la formula è della forma $\neg\alpha$ e la variabile x è libera in α; oppure anche se*
- *la formula è della forma $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \beta, \alpha \iff \beta$ (o altro connettivo logico introdotto in seguito) e la variabile x è libera in α oppure in β.*

[†12] Questo esercizio è stato scritto durante una discussione con Anton Mennucci.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Dunque nelle formule $(\forall x, \phi)$ *o* $(\exists x, \phi)$*, la variabile* x *non è più libera; usa dire che* "la variabile è quantificata" *o* "legata".

In ogni parte di una formula in cui una variabile è quantificata, questa variabile può essere sostituita con ogni altra variabile.

Nota 2.24. *La variabile* x *, che sia quantificata in una parte di una formula, torna ad essere libera se viene riusata in un altro pezzo della formula; questo è sintatticamente lecito ma rende meno leggibile la formula, come in questo esempio che usa il linguaggio della teoria degli insiemi* [1X1] *(Svolto il 2022-10-11)*

$$A \subseteq \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 4 \wedge (\forall x \in A, x \leq 10)$$

che andrebbe scritto come

$$A \subseteq \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 4 \wedge (\forall y \in A, y \leq 10)$$

rinominando la variabile nella parte in cui questa è quantificata.

Nota 2.25. *Si assume come assioma che* [2DC]

$$\neg(\forall x, \phi) \Leftrightarrow (\exists x, \neg\phi) \ . \tag{2.26}$$

(Nella Sez. 2.1 in [13] anzi $(\forall x, \phi)$ *viene presentato come abbreviazione di* $\neg(\exists x, \neg\phi)$*).*

Notate che, in molti esempi, si suppone che le variabili quantificate siano elementi di un "insieme".

Definizione 2.27. *Date due variabili* x, y *scriveremo* $x \in y$ *per dire che* "x è un elemento dell'insieme y"*; usa anche dire che* "x appartiene all'insieme y"*, o semplicemente che* "x sta in y". [1X2]

La formula $(x \in y)$ *è equivalente a* $(y \ni x)$*; le negazioni sono* $(x \notin y) \doteq \neg(x \in y)$ *e* $(y \not\ni x) \doteq \neg(y \ni x)$*.*

La formula $(x \in y)$ *(come tutte le altre varianti) assume valore di verità/falsità e dunque può essere usata come* atomo *nella costruzione di una formula ben formata.*

Definizione 2.28. *Usa scrivere* [00R]

"$\forall x \in A, P(x)$"	*per dire*	"per ogni x in A vale $P(x)$",
oppure		
"$\exists x \in A, P(x)$"	*per dire*	"esiste un x in A per cui vale $P(x)$"*;*

(dove A *è un insieme); per poter collegare queste scritture rigorosamente alle definizioni precedenti, decidiamo che le scritture precedenti sono abbreviazioni per*

$$\forall x \in A, P(x) \doteq \forall x, x \in A \Rightarrow P(x) \quad ,$$
$$\exists x \in A, P(x) \doteq \exists x, x \in A \wedge P(x) \quad .$$

Notate che le formule a destra sono "formule ben formate". Si veda anche l'esercizio 2.35.

Usiamo qui il termine "insieme" in maniera informale, si veda la nota 2.52.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Nota 2.29. *Notate che "$\forall x \in A, \varphi$" è vera se A è vuoto; questo è consistente con quanto discusso nell'esercizio 2.35. Questo però ha una conseguenza importante: l'implicazione* [00S] *(Svolto il 2022-10-11)*

$$(\forall x \in A, \varphi) \Rightarrow (\exists x \in A, \varphi)$$

è sempre valida quando A è un insieme non-vuoto, ed è invece falsa quando $A = \emptyset$.

Si usa molto anche l'abbreviazione [2GV]

$$\forall x, y, \ldots \in A, P(x, y, z)$$

invece di

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \forall \ldots, P(x, y, z) \quad .$$

Dato che un elemento di un insieme potrebbe non avere un valore di verità/falsità, arricchiamo il linguaggio aggiungendo le "*proposizioni logiche*".

Definizione 2.30. *Una **proposizione logica** ϕ è un' asserzione che assume valore di verità o di falsità dipendentemente dal valore dato alle sue variabili libere, e solo da quello.* [00T] *(Svolto il 2022-10-11)*

Un esempio di proposizione logica potrebbe essere: *"n è un numero pari"*. Possiamo usare le proposizioni logiche come atomi nella costruzione delle formule ben formate.

Esercizi

E2.31 Siano X, Y insiemi. Siano ϕ, ψ proposizioni logiche; x, a sono variabili libere in ϕ, e y, b sono libere in ψ. Assumiamo inoltre che a, b possano essere solo vere o false, mentre $x \in X, y \in Y$. Considerate le seguenti formule. Quali sono ben formate? Quali variabili sono libere in esse? [00V]

$$\begin{aligned} b \wedge (\forall x, \phi) \\ (\exists y, \psi) \vee (\forall x, \phi) \\ \forall x, \forall b, \big(\phi \wedge (\psi \vee b)\big) \\ a \vee (\forall x, \forall a, \phi) \\ (\exists x, \psi) \wedge (\forall x, \phi) \end{aligned}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '00W']

E2.32 Consideriamo una proposizione $P(u, \ell)$ dipendente da due variabili libere u (che prende valori nell'insieme delle persone), e ℓ (nell'insieme dei lavori), e che è così formulata: *'La persona u sa fare il lavoro ℓ'*. [00X]

Esprimete in Italiano le seguenti formule

$$\begin{aligned} &\exists u \exists \ell P(u, \ell) \ , \forall u \exists \ell P(u, \ell) \ , \exists \ell \forall u P(u, \ell) \ , \\ &\forall \ell \exists u P(u, \ell) \ , \exists u \forall \ell P(u, \ell) \ , \forall u \forall \ell P(u, \ell) \ . \end{aligned}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '00Y']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E2.33 Quali implicazioni vi sono fra le precedenti formule? [00Z]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '010'] *(Svolto il 2022-10-11)*

E2.34 Si verifichi che [011]

$$\Big((\forall x,\, \varphi(x)) \wedge (\forall y,\, \psi(y))\Big) \iff \Big(\forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))\Big)$$

E2.35 Come già commentato in 2.28, dato A un insieme, e $P(x)$ una proposizione logica dipendente da una variabile libera x, usa scrivere [016]

$$\forall x \in A, P(x) \quad , \quad \exists x \in A, P(x)$$

però

$$\forall x \in A, P(x) \text{ riassume } \forall x, (x \in A) \Rightarrow P(x) \ ,$$

$$\exists x \in A, P(x) \text{ riassume } \exists x, (x \in A) \wedge P(x) \ ;$$

laddove le versioni "estese" sono formule ben formate.

Usando questa scrittura estesa dimostrate che le due proposizioni

$$\neg(\forall x \in A, P(x)) \ , \ \exists x \in A, (\neg P(x)) \ .$$

sono equivalenti, nel senso che da una è possibile dimostrare l'altra (e viceversa). Nella dimostrazione usate solo le tautologie (elencate in 2.10) e in particolare l'equivalenza della formula "$P \Rightarrow Q$" con "$(\neg P) \vee Q$" [†13] , e infine l'equivalenza fra "$\neg\exists x, Q$" e "$\forall x, \neg Q$" [†14].

Sostituendo poi $P(x)$ con $\neg P(x)$ e usando la tautologia della doppia negazione si ottiene infine che

$$\forall x \in A, (\neg P(x)) \ , \ \neg(\exists x \in A, P(x))$$

sono equivalenti.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '017']

E2.36 Dato A un insieme, e $P(x)$ una proposizione dipendente da una variabile libera x, usa scrivere [013]

$$\exists! x \in A, P(x)$$

quando vi è uno e un solo elemento x di A per cui $P(x)$ è vera. Definite questa notazione con una formula ben formata. (Notate che avrete bisogno di usare il connettivo di uguaglianza, perché dovete poter esprimere l'idea di "unico", che necessita di un metodo per poter dire quando due oggetti sono distinguibili e quando non lo sono).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '015']

§2.b Teoria degli insiemi [1YT]

§2.b.a Teoria degli insiemi elementare [242]

Come già spiegato nella Definizione 2.27, nella teoria degli insiemi si aggiunge il connettivo "$\in$" ; dati due insiemi z, y la formula $x \in y$ si legge "*x appartiene a y*" o più semplicemente "*x è in y*", e indica che x è un elemento di y.

È uso indicare gli insiemi usando come variabili lettere Italiane maiuscole.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Definizione 2.37. *Si aggiunge anche il connettivo $a = b$ fra insiemi, che è vero quando* [1Y8] *(Svolto il 2022-10)*

$$\forall x, x \in a \iff x \in b \ .$$

*Questo è l'**assioma di estensionalità**.*

Questo dice che due insiemi a e b sono uguali quando hanno gli stessi elementi; cioè, esclude che un insieme possa avere qualche altra proprietà che lo contraddistingue [†15]. [226]

Definizione 2.38. *Per comodità viene usato il connettivo $a \subseteq b$ per indicare che a è un sottoinsieme di b; formalmente questo si definisce come* [227]

$$\forall x, x \in a \Rightarrow x \in b \ .$$

$b \supseteq a$ è equivalente a $a \subseteq b$.

Ovviamente $a = b \iff ((a \subseteq b) \wedge (b \subseteq a))$. Notate che $a \subseteq a$.

Si scrive usualmente $x \notin y$ per $\neg(x \in y)$, $x \nsubseteq y$ per $\neg(x \subseteq y)$ e così via.

Nota 2.39. *Vi sono anche altri simboli usati. Alcuni testi usano $a \subset b$ per indicare che $a \subseteq b$ ma $a \neq b$ (come negli appunti [3]); altri usano una scrittura più espressiva come $a \subsetneq b$ per dire che $a \subseteq b$ ma $a \neq b$. (Alcuni persino usano $a \subset b$ al posto di $a \subseteq b$, purtroppo — come per esempio [14]).* [1W0]

Viene inoltre definita la costante $\varnothing$ indicato anche come $\{\}$ che è l'insieme vuoto,[†16] caratterizzato da

$$\forall x, \neg x \in \varnothing \quad .$$

Si dimostra che l'insieme vuoto è unico.

Si introducono dunque alcune concetti fondamentali: unione, intersezione, differenza simmetrica, insieme potenza, prodotto cartesiano, relazioni, funzioni *etc*.

Definizione 2.40. *Data I una famiglia non-vuota di indici e dati C_i insiemi (uno per ogni $i \in I$), allora l'**unione*** [1Y2]

$$\bigcup_{i \in I} C_i$$

è un insieme, che contiene tutti (e soli) gli elementi di tutti gli insiemi C_i; in formula[†17]

$$\bigcup_{i \in I} C_i \stackrel{def}{=} \{x : \exists i \in I, x \in C_i\} \quad .$$

Nel caso siano dati solo due insiemi C_1, C_2, usa scrivere $C_1 \cup C_2$ per indicare l'unione; e similmente quando sono dati finiti insiemi.

Definizione 2.41. *Data I una famiglia non-vuota di indici e dati C_i insiemi (uno per ogni $i \in I$), definiamo l'**intersezione*** [1W1]

$$\bigcap_{i \in I} C_i$$

[†13] Tautologia in eqn. (2.12).

[†14] Già discussa in eqn.(2.26).

[†15] Si potrebbe immaginare una teoria degli insiemi in cui le parentesi possono essere "rosse" o "blu", e l'uguaglianza fra insiemi si ha quando gli elementi e i colori sono gli stessi. Nella teoria usuale le parentesi sono sempre nere.

[†16] Nella teoria assiomatica di Zermelo–Fraenkel l'esistenza di $\varnothing$ è un assioma.

[†17] Questa è una versione più maneggevole dell'assioma ufficiale. La definizione ufficiale si trova in ZF:4.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

che è l'insieme che contiene gli elementi che appartengono a tutti gli insiemi C_i (per tutti gli $i \in I$).

Nel caso siano dati solo due insiemi C_1, C_2, usa scrivere $C_1 \cap C_2$ per indicare l'intersezione, e si ha

$$C_1 \cap C_2 \stackrel{def}{=} \{x \in C_1 \cup C_2 : x \in C_1 \wedge x \in C_2\} \quad ;$$

e similmente quando sono dati finiti insiemi.

L'insieme potenza è definito come in ZF:5.

Definizione 2.42. *Altri operatori fra insiemi sono:* [23S]

- *la differenza*
$$A \setminus B \stackrel{def}{=} \{x \in A : x \notin B\} \quad ;$$

- *se l'insieme A è chiaramente specificato dal contesto, e se $B \subseteq A$ usa anche scrivere $B^c \stackrel{def}{=} A \setminus B$; si dice che B^c è il complementare di B in A;*

- *la differenza simmetrica*

$$A \Delta B \stackrel{def}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \in A \cup B : x \in A \iff x \notin B\} \quad ;$$

dove A, B sono insiemi.

Esercizi

E2.43 Dimostrate che $A = B$ se e solo se $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1W7'] [1W6] *(Proposto il 2022-10-11)*

E2.44 Rappresentate le operazioni [1W8]

- $\cup$ unione
- $\cap$ intersezione
- $\setminus$ differenza
- Δ differenza simmetrica

fra due insiemi usando diagrammi di Venn.

E2.45 Prerequisiti:2.44. Usate i precedenti diagrammi di Venn per mostrare che in generale $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$. [1W9]

E2.46 Mostrate che se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$ allora $X \subseteq Z$ *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1WD'] [1WB]

E2.47 Spiegate perché l'operazione di unione $A \cup B$ fra due insiemi è commutativa, e mostrate che è associativa; similmente per la intersezione; infine mostrate che l'unione distribuisce rispetto all'intersezione, e anche che l'intersezione distribuisce rispetto all'unione. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1W3'] [1W2]

E2.48 Considerate gli insiemi: [1WF] *(Proposto il 2022-12)*

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- P l'insieme dei professori,
- S l'insieme degli scienziati,
- F l'insieme dei filosofi,
- M l'insieme dei matematici.

Per ognuna delle seguenti frasi, scrivete una formula che la rappresenti, usando gli insieme soprascritti, l'insieme vuoto, le relazioni $\subseteq, =, \neq$, e le operazioni insiemistiche $\cup, \cap, \setminus$.

- non tutti i professori sono scienziati
- qualche matematico è filosofo;
- se un filosofo non è matematico allora è professore;
- tutti i filosofi sono scienzati o professori, ma non matematici;
- se c'è un matematico che è anche scienziato, allora non è né filosofo né professore.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1WG']

E2.49 Sia U l'insieme degli esseri umani, A l'insieme degli animali e M l'insieme delle creature mortali; trasformate il seguente sillogismo in formule e dimostratelo: [1Y4]

ogni uomo è un animale, ogni animale è mortale, dunque ogni uomo è mortale.

E2.50 Spiegate la formula $\bigcup_{B\in\mathcal{P}(A)} B$ avendo a disposizione la definizione 2.40 dell'assioma dell'unione. Poi mostrate che $A = \bigcup_{B\in\mathcal{P}(A)} B$. [1WC]

Si veda anche 2.61 dove lo stesso risultato si ottiene partendo dall'assioma dell'unione come definito in ZF:4 nell'assiomatica di Zermelo–Fraenkel.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1WV']

E2.51 Sia I, C_i come in 2.40 e sia A un insieme; dimostrare che [24P]

$$\bigcup_{i\in I} C_i \subseteq A$$

se e solo se

$$\forall i \in I,\ C_i \subseteq A\ .$$

Nota 2.52. *Si distingue fra una* teoria informale degli insiemi *e una* teoria formale degli insiemi. [†18] [01J]

La teoria informale degli insiemi sfrutta tutte le nozioni precedentemente elencate, ma non indaga sui fondamenti, cioè sulle assiomatizzazione. Per questo approccio consigliamo il testo [10]; o [32] per una breve discussione.

La teoria formale degli insiemi *più usata è la assiomatica di Zermelo–Fraenkel, che ricapitoleremo nella prossima sezione. Si veda il Cap. 6 in [13] (per una breve introduzione può andare bene anche [31]).*

Nella teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo–Fraenkel tutte le variabili rappresentano insiemi, dunque le variabili non hanno un significato di verità o falsità. Per questo, nelle definizioni 2.5 e 2.23 di formula ben formata *si cambia il concetto di "atomo". Un atomo è ora una formula della forma $a \in b$ che ha valore di verità/falsità.*

[†18] Si veda l'introduzione al Cap. 6 in [13] per una discussione che confronta questi due approcci.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Mentre nella teoria formale tutto gli elementi del linguaggio sono insiemi, nella pratica si tende a distinguere fra gli insiemi, e gli altri oggetti della Matematica (numeri, funzioni, etc etc); per questo nel seguito useremo in genere le lettere maiuscole per indicare gli insiemi, e le lettere minuscole per indicare altri oggetti.

§2.b.b Assiomi di Zermelo–Fraenkel [241]

Vediamo ora brevemente gli assiomi della teoria degli insiemi di Zermelo–Fraenkel.

ZF:1 Assioma di estensionalità, già visto sopra in 2.37.

ZF:2 L'insieme vuoto $\varnothing$ è un insieme. In formule: [014]

$$\exists X : \forall Y \neg (Y \in X)$$

per il precedente assioma, X è unico, e viene denotato con $\varnothing$

ZF:3 **Assioma della coppia.** Dati comunque due insiemi X e Y esiste un insieme Z, rappresentato come $Z = \{X, Y\}$, i cui elementi sono solo X e Y. In formula [1Y3]

$$\forall X, Y \exists Z : \forall W (W \in Z) \iff (W = X) \vee (W = Y) \quad .$$

Di nuovo l'insieme Z è unico per effetto dell'assioma di estensionalità 2.37.

ZF:4 L'**assioma dell'unione**[†19] dice che per ogni insieme A esiste un insieme B che contiene tutti gli elementi degli elementi di A; in simboli, [026]

$$\forall A \exists B, \forall x, (x \in B \iff (\exists y, y \in A \wedge x \in y)) \ .$$

Si mostra che questo è unico, per effetto dell'assioma di estensionalità 2.37; indichiamo questo insieme B con $\bigcup A$ (per non confonderlo col simbolo già introdotto prima).

Per esempio se

$$A = \{\{1, 3, \{5, 2\}\}, \{7, 19\}\}$$

allora

$$\bigcup A = \{1, 3, \{5, 2\}, 7, 19\} \quad .$$

Dati $A_1, \ldots A_k$ insiemi, sia $D = \{A_1, \ldots A_k\}$ [†20] definiamo

$$A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_k \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup D \quad .$$

ZF:5 L'**assioma dell'insieme potenza** dice che per ogni insieme A, esiste un insieme $\mathcal{P}(A)$ i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di A. Una formula abbreviata di definizione è [1Y1]

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{B : B \subseteq A\} \quad .$$

$\mathcal{P}(A)$ si chiama anche *insieme delle parti*.

[†19] Questa è la versione "ufficiale" di Zermelo–Fraenkel. Spesso però viene usata la versione semplificata 2.40

[†20] L'esistenza di questo insieme sarà dimostrata in 2.71

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Nel linguaggio formale degli assiomi di Zermelo-Fraenkel, l'assioma si scrive:

$$\forall A, \exists\, Z, \forall y, y \in Z \iff (\forall z, z \in y \implies z \in A) \quad ;$$

questa formula comporta che l'insieme potenza Z è unico, dunque possiamo denotarlo con il simbolo $\mathcal{P}(A)$ senza tema di equivoci.

Notate che

$$(\forall z, z \in y \implies z \in A)$$

si può abbreviare con $y \subseteq A$ e dunque l'assioma può essere scritto come

$$\forall A, \exists\, Z, \forall y, y \in Z \iff (y \subseteq A) \quad ;$$

usando poi l'estensionalità, si ottiene che

$$Z = \{y : (y \subseteq A)\} \quad .$$

ZF:6 Assioma dell'infinito (si veda 2.203)

ZF:7 L'**assioma di specificazione**, che recita [1YO]

Se A è un insieme, e $P(x)$ è una proposizione logica, allora $\{x \in A : P(x)\}$ è un insieme.

Formalmente, ponendo $B = \{x \in A : P(x)\}$,

$$\forall X, X \in B \iff X \in A \wedge P(x) \quad .$$

Questo assioma evita il paradosso di Russel: sia A l'insieme degli x tali che $x \notin x$, allora non si ha né $A \in A$ né $A \notin A$.

ZF:8 Assioma di buona fondazione, o di regolarità (si veda 2.72)

ZF:9 Assioma di rimpiazzamento

(Abbiamo omesso le definizioni dell' *"Assioma di rimpiazzamento"*; si puo trovare in Cap.1 Sez.16 in [3] oppure Cap. 1 in [14]).

Vi è un ulteriore assioma, l'*Assioma della scelta*: questo sarà discusso in Sez. §2.b.c.

Nota 2.53. *Si indica usualmente con la sigla "ZF" la teoria basata sugli assiomi Zermelo–Fraenkel; si indica con "ZFC" la teoria data dagli assiomi di Zermelo–Fraenkel con l'aggiunta dell'assioma della scelta.* [2DX]

Nota 2.54. *È di uso comune questa dicitura:* "sia I un insieme non vuoto di indici, sia A_i una famiglia di insiemi indicizzata da $i \in I$"*; questa, nella teoria assiomatica, andrebbe scritta come* "sia I un insieme non vuoto, sia X un insieme, sia $A : I \to \mathcal{P}(X)$ una funzione; scriveremo A_i al posto di $A(i)$"*. (Con questa scrittura si ha che gli A_i sono tutti sottoinsiemi di X).* [01M]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E2.55 La notazione in ZF:4 differisce da quella usuale, che è $\bigcup_{i\in I} C_i$, dove I è una famiglia di indici non-vuota e C_i sono insiemi; come visto in 2.40. [23W]

Come potete definire $\bigcup_{i\in I} C_i$ usando l'assioma dell'unione presentato in ZF:4? *(Sugg. rileggete la nota 2.54)*

Alla fine dovreste ottenere

$$\forall x, x \in \bigcup_{i\in I} C_i \iff \exists i \in I, x \in C_i \quad . \tag{2.56}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '027']

E2.57 Mostrate che la definizione di intersezione 2.41 è ben posta, usando gli assiomi Z-F. Alla fine mostrate anche che [23T]

(Proposto il 2022-10-11)

$$\forall x, x \in \bigcap_{i\in I} C_i \iff (I \neq \emptyset \wedge \forall i \in I, x \in C_i) \quad . \tag{2.58}$$

(Svolto il 2022-10-25)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '23V']

E2.59 Prerequisiti: 2.57, ZF:4, ZF:7, 2.29. Sia dato un insieme A non vuoto; definite B come l'insieme che contiene tutti gli elementi che stanno in tutti gli elementi di A. Scrivete una formula ben formata che definisca B, mostrate che B è un insieme e mostrate che è unico; per simmetria con l'assioma ZF:4 lo indicheremo con [252]

$$B = \bigcap\!\!\!\!\!\!\bigcup A \quad .$$

È legato alla usuale notazione dalla relazione

$$\bigcap\!\!\!\!\!\!\bigcup A = \bigcap_{x\in A} x \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '254']

E2.60 Prerequisiti: 2.55, 2.57. Ora che avete correttamente definito l'unione 2.41 e l'intersezione 2.40 usando gli assiomi Z-F, dite quale valore assumono [247]

(Svolto il 2022-10-25)

$$\bigcap_{i\in I} C_i$$

e

$$\bigcup_{i\in I} C_i$$

quando I è l'insieme vuoto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '249']

E2.61 Prerequisiti: ZF:4. Usando la definizione di $\bigcup$ presentata in ZF:4, mostrate che $A = \bigcup\!\!\!\!\!\!\bigcup(\mathcal{P}(A))$. [028]

E2.62 Dati X insieme e I, C_i come in 2.41 e 2.40, mostrate che [248]

(Svolto il 2022-10-25)

$$X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) \quad . \tag{2.63}$$

Cosa succede quando I è l'insieme vuoto?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '24B']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E2.64 Se A è un insieme di n elementi ($n \geq 0$ numero naturale) allora quanti elementi vi sono in $\mathcal{P}(A)$? [1W4] *(Proposto il 2022-12)*

E2.65 Scrivete esplicitamente $\mathcal{PPP}(\varnothing)$. Quanti elementi ha? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1WX'] [02B]

E2.66 Siano dati a, b, x, y. [1Y9]

1. Mostrate che nell'ipotesi
$$\{a, b\} = \{x, y\}$$
si ha che
$$(a = b) \iff (x = y) \iff a = b = x = y \quad .$$
2. Deducete in particolare che se
$$\{a\} = \{x, y\}$$
allora $a = x = y$.
3. Mostrate poi che se ipotizziamo che i quattro elementi a, b, x, y non siano tutti uguali, allora si ha
$$\{a, b\} = \{x, y\}$$
se e solo se $a = x \wedge b = y$ oppure $a = y \wedge b = x$.

Per mostrare quanto sopra siate più precisi possibile: usate l'assioma di estensionalità 2.37, l'assioma della coppia ZF:3 e le tautologie mostrate nella sezione precedente (o altre relazioni logiche elementari). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1YB']

E2.67 Prerequisiti:2.66. La *coppia ordinata* viene definita come [01N] *(Svolto il 2022-10-25)*
$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad ;$$
(notate che l'*assioma della coppia* ZF:3 ci garantisce che questa è una buona definizione); mostrate che
$$(a, b) = (x, y) \iff (a = x \wedge b = y) \quad . \tag{2.68}$$
(Prima soluzione che non usa 2.66) Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1WZ'])
(Seconda soluzione che usa 2.66) Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1YC'])

E2.69 Prerequisiti:2.66,2.72. Immaginiamo una diversa definizione per la *coppia ordinata*, definita come [1YD]
$$(\!(x, y)\!) \stackrel{\text{def}}{=} \{x, \{x, y\}\} \quad ;$$
mostrate che
$$(\!(a, b)\!) = (\!(x, y)\!) \iff (a = x \wedge b = y) \quad . \tag{2.70}$$
Per mostrarlo vi servirà 2.72. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1YF']

E2.71 Mostrate che, dati $a_1, \ldots a_k$ insiemi, esiste un insieme che contiene tutti e soli questi elementi. Questo insieme viene solitamente indicato con $\{a_1, \ldots a_k\}$. [029] *(Svolto il 2022-10-25)*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '02B']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E2.72 L'**assioma di buona fondazione** (detto anche **assioma di regolarità**) della teoria di Zermelo–Fraenkel dice che ogni insieme non vuoto X contiene un elemento y che è disgiunto da X; in formula [01R] *(Svolto il 2022-10-25)*

$$\forall X, X \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y\,(y \in X) \wedge (X \cap y = \emptyset))$$

(ricordiamo che ogni oggetto nella teoria è un insieme, dunque y è un insieme). Usando questo assioma provate questi fatti.

- Non esiste un insieme x che sia elemento di se stesso cioè per cui $x \in x$.
- Più in generale non esiste una famiglia finita $x_1, \ldots x_n$ per cui $x_1 \in x_2 \in \ldots \in x_n \in x_1$.
- Inoltre non esiste una successione $x_1, \ldots x_n, \ldots$ di insiemi per cui $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni x_4 \ldots$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '01S']

E2.73 Prerequisiti:2.72. Mostrate che per ogni x esiste un y tale che $y \notin x$ *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '01X'] [01W] *(Svolto il 2022-10-25)*

E2.74 Mostrate invece che l'**assioma dell'infinito**, e la conseguente costruzione dei numeri naturali vista in Sez. §2.h, comporta che esiste una successione $x_1, \ldots x_n, \ldots$ di insiemi per cui $x_1 \in x_2 \in x_3 \ldots$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '01Z'] [01Y]

E2.75 Prerequisiti:2.77. Dato A insieme non vuoto mostrate che esiste una bigezione $f : A \to B$ fra A e un insieme B disgiunto da A. [020] *(Svolto il 2022-10-25)*

Più in generale sia I un insieme non vuoto di indici, sia A_i una famiglia di insiemi non vuoti indicizzata da $i \in I$; [†21] mostrare che esistono bigezioni $f_i : A_i \to B_i$, dove gli insiemi B_i godono della proprietà $\forall i \in I, \forall j \in I, B_i \cap A_j = \emptyset$ e se $j \neq j$ anche $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '021']

E2.76 Prerequisiti:ZF:5. [022]

Mostrate che $X \subseteq Y$ se e solo se $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1WW']

E2.77 Usando la definizione di coppia (a, b) come $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ mostrate che, dati due insiemi x, y , per ogni $a \in x, b \in y$ si ha [024]

$$(a, b) \in \mathcal{PP}(x \cup y) \ .$$

Usate questo fatto e l'assioma di separazione per giustificare assiomaticamente la definizione del **prodotto cartesiano** $x \times y$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '025']

Nota 2.78. *Nell'esercizio 2.71 gli elementi sono identificati tramite le variabili $a_1, \ldots a_k$ che avremmo potuto anche denominare con altre lettere come $a, b, c, d, \ldots$. Se però pensiamo a $a_1, \ldots a_k \ldots$ come a valori di una funzione $a_i = a(i)$, $a : I \to X$ allora l'insieme $\{a_1, \ldots a_k \ldots\}$ esiste (per un qualsiasi insieme I di indici) perché è l'immagine della funzione $\{a_1, \ldots a_k \ldots\} = \{x \in X : \exists i \in I, x = a_i\}$.* [27F]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§2.b.c Lemma di Zorn, Assioma della Scelta, Teorema di Zermelo [23R]

Vi sono tre enunciati fondamentali nella teoria degli insiemi, il Lemma Zorn, l'Assioma della Scelta, e il Teorema di Zermelo. Si dimostra, all'interno dell'assiomatica di Zermelo–Fraenkel, che questi sono equivalenti. Si veda in Cap. 1 in [3] per una presentazione basata sui principi sopra definiti. [†22]

Il primo esercizio ci presenta alcune fondamentali maniere equivalenti di esprimere l'Assioma della Scelta.

Esercizi

E2.79 Prerequisiti:2.54, ZF:4,2.75 . Sia I un insieme non vuoto di indici, sia A_i una famiglia di insiemi non vuoti indicizzata da $i \in I$. Ricordiamo che, per definizione, il prodotto cartesiano $\prod_{i\in I} A_i$ è l'insieme delle funzioni $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ tali che $f(i) \in A_i$ per ogni $i \in I$. [02H]

Mostrate che le seguenti sono formulazioni equivalenti dell'**assioma della scelta**.

- Il prodotto cartesiano di una famiglia non vuota di insiemi non vuoti è non vuoto.
- Data una famiglia A_i come sopra, tale che gli insiemi sono non vuoti, e a due a due disgiunti, esiste un sottoinsieme B di $\bigcup_{i\in I} A_i$ tale che, per ogni $i \in I$, $B \cap A_i$ contenga un unico elemento.
- Sia S un insieme, allora esiste una funzione $g : \mathcal{P}(S) \to S$ tale che $g(A) \in A$ per ogni $A \in \mathcal{P}(S)$ non vuoto.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '02J']

Nota 2.80. *Attenzione! Supponiamo come sopra che gli insiemi A_i siano non vuoti. Questo si scrive formalmente come $\forall i \in I, \exists x \in A_i$. Intuitivamente questo ci porta a dire che l'elemento x dipende da i, e dunque che $x = x(i)$. Questo passo, per quanto intuitivo, è esattamente l'assioma della scelta.* [02K]

Esercizi

E2.81 Trovate I un insieme non vuoto di indici, e per ciascun $i \in I$ un insieme A_i non vuoto, per i quali non esiste un sottoinsieme B di $\bigcup_{i\in I} A_i$ tale che, per ogni $i \in I$, $B \cap A_i$ contenga un unico elemento. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2GG'] [2GF]

E2.82 Prerequisiti:2.178.Consideriamo la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel e questo enunciato: [2BZ]

Dati A, B insiemi non vuoti per cui esista $g : B \to A$ una funzione surgettiva, allora esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$ tale che $g \circ f = Id_A$.

Dimostrate che questo enunciato implica l'Assioma della Scelta. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2C0']

E2.83 Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia $B \subseteq V$. Una **combinazione lineare finita** v di elementi di B è equivalentemente definita come [02D]

[†21] *Cf.* 2.54

[†22] Questa teoria si trova in molti libri di Logica, come ad esempio [13, 14, 11], ma il linguaggio e i metodi lì usati potrebbero essere troppo avanzati rispetto al livello richiesto per questo testo.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- $v = \sum_{i=1}^{n} \ell_i b_i$ dove $n = n(v) \in \mathbb{N}$, $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, \dots, b_n$ sono elementi di B;
- $v = \sum_{b \in B} \lambda(b) b$ dove $\lambda : B \to \mathbb{R}$ ma inoltre $\lambda(b) \neq 0$ solo per un numero finito di $b \in B$.

Chiamiamo $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^B$ l'insieme delle funzioni λ (come sopra usate) che sono non nulle solo per un numero finito di argomenti; Λ è uno spazio vettoriale: per questo la seconda definizione è meno intuitiva ma è più facile da maneggiare.

Diremo che B **genera** V se ogni $v \in V$ si scrive come combinazione lineare finita di elementi di B.

Diremo che i vettori di B sono **linearmente indipendenti** se $0 = \sum_{b \in B} \lambda(b) b$ implica $\lambda \equiv 0$; o equivalentemente che, dati $n \geq 1$, $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, \dots, b_n \in B$ tutti diversi, la relazione $\sum_{i=1}^{n} \ell_i b_i = 0$ implica $\forall i \leq n, \ell_i = 0$.

Diremo che B è una **base algebrica** (anche nota come **base di Hamel**) se valgono entrambe le proprietà.

Se B è una base allora la combinazione lineare che genera v è unica (cioè vi è un' unica funzione $\lambda \in \Lambda$ per cui $v = \sum_{b \in B} \lambda(b) b$).

Mostrate che ogni spazio vettoriale ha una *base algebrica*. Mostrate più in generale che per ogni $A, G \subseteq V$, con A famiglia di vettori linearmente indipendenti e G generatori, esiste una *base algebrica* B con $A \subseteq B \subseteq G$.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '02G']`

La dimostrazione in generale necessita del Lemma di Zorn; anzi, questo enunciato è equivalente all' Assioma della Scelta; questo è stato dimostrato da A. Blass in [7]; si veda anche Part 1 §6 [22].

E2.84 `Difficoltà:*`.[†23] Considerate lo spazio quoziente [02M]

$$\mathbb{X} = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} / \sim$$

dove $\{a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sono tutte le successioni a valori naturali, e dove definiamo $a \sim b$ sse $a_k = b_k$ definitivamente in k.

Definiamo l'ordinamento

$$a \preceq b \iff \exists n \text{ s.t. } \forall k \geq n, a_k \leq b_k$$

cioè $a \preceq b$ quando $a_k \leq b_k$ definitivamente. Questa è un preordine e

$$a \sim b \iff (a \preceq b \wedge b \preceq a)$$

e dunque passa al quoziente dove diviene un ordine, si veda Prop. 2.191.

Sia ora a^k una successione crescente di successioni, cioè $a^k \preceq a^{k+1}$; notiamo che essa è limitata superiormente da b definito come

$$b_n = \sup_{h,k \leq n} a^k_h \,.$$

Possiamo dunque applicare il Lemma di Zorn a $(\mathbb{X}, \preceq)$ per dire che esistono massimali.

[†23] Originalmente pubblicato in https://dida.sns.it/dida2/Members/mennucci/curiosa/

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Dati a, b definiamo

$$a \vee b = (a_n \vee b_n)_n$$

allora è facilmente verificato che $a \preceq a \vee b$. Questo ci dice che l'ordinamento è *diretto*, si veda 2.112.

Concludiamo dunque che $(\mathbb{X}, \preceq)$ ha un unico massimo, per 2.120.

Questo però è falso, perché se si prende una qualsiasi successione a, la successione $(a_n + 1)_n$ è più grande di a.

Qual è l'errore nel ragionamento precedente? Cosa si può dunque concludere riguardo a $(\mathbb{X}, \preceq)$?

Moltri altri esercizi necessitano del Lemma di Zorn, dell'Assioma della Scelta, o del Teorema di Zermelo; ne citiamo alcuni: 2.178, 2.261, 2.295, 2.296, 2.297, 2.300.

Nota 2.85. "L'assioma della scelta è ovviamente vero, il principio del buon ordinamento ovviamente falso, e che si può dire del lemma di Zorn?" – *Jerry Bona*[†24] [02C]

Questa è una barzelletta[†25]*: anche se i tre enunciati sono matematicamente equivalenti, molti matematici trovano che l'assioma della scelta sia intuitivo, il principio del buon ordinamento sia controintuitivo, e Il lemma di Zorn sia troppo complesso per qualsiasi intuizione.*

[†24] Come citato in: [16].
[†25] Paragrafo citato da [50].

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§2.c Relazioni [1YV]

Definizione 2.86. *Una **relazione** fra elementi di due insiemi A, B è definita come un sottoinseme $R \subseteq A \times B$ del prodotto cartesiano. In genere si usa la notazione infissa aRb invece di scrivere $(a, b) \in R$.* [1WY]

Definizione 2.87. *Una relazione R fra elementi di A è detta:* [23X]

- ***riflessiva** se xRx per ogni $x \in A$;*
- ***irriflessiva** o **anti-riflessiva** se $\neg xRx$ per ogni $x \in A$;*
- ***simmetrica** se xRy implica yRx per ogni $x, y \in A$;*
- ***antisimmetrica** se aRb e bRa implicano $a = b$, per ogni $a, b \in A$;*
- ***tricotomica** se per ogni $x, y \in A$ vale esattamente una fra xRy, yRx e $x = y$;*
- ***transitiva** se xRy e yRz implicano xRz, per ogni $x, y, z \in A$.*

Una relazione R fra elementi di A e elementi di B è detta:

- ***iniettiva** se xRy e zRy implicano $x = z$, per ogni $x, z \in A, y \in B$;*
- ***funzionale** se xRy e xRz implicano $y = z$, per ogni $x \in A, y, z \in B$; una tale relazione è anche detta una "funzione parziale" (si vedano anche §2.e,2.182);*
- ***totale** (a sinistra) se per ogni $x \in A$ esiste un $y \in B$ tale che xRy;*
- ***surgettiva** (cioè "totale a destra") se per ogni $y \in B$ esiste un $x \in A$ tale che xRy.*

Definizione 2.88. *Una **relazione di equivalenza** è una relazione fra elementi di A che gode delle proprietà: riflessiva, simmetrica, transitiva.* [1W5]

Le relazioni di equivalenza vengono in genere indicate con i simboli "$\sim$" , "$\approx$" , "$\simeq$" , "$\cong$" , "$\eqsim$" etc.

Definizione 2.89. *Una **relazione d'ordine** (o **ordinamento**) è una relazione fra elementi di A che gode delle proprietà: riflessiva, antisimmetrica, transitiva.* [1Y5]

*Una relazione d'ordine è **totale** se tutti gli elementi sono **comparabili**, cioè se per ogni $a, b \in A$ si ha $aRb \vee bRa$.*

*(Quando una relazione d'ordine non è totale, si dice che è **parziale**).*

In genere si usano simboli come "$\leq$" o "$\subseteq$" o "$\preceq$" o simili.

Nota 2.90. *Abbiamo sopra ricalcato le definizioni in [3]; in altri testi una relazione fra elementi di A che gode delle proprietà: riflessiva, antisimmetrica, transitiva è direttamente chiamata **ordine parziale**. (*cf *Example 2.1.1 in [13] dove inoltre gli ordinamenti totali sono detti* linear order*).Per questa ragione aggiungeremo "(parziale)" quando vorremo indicare che l'ordinamento che stiamo discutendo potrebbe essere parziale.* [24W]

Per le relazioni d'ordine rimandiamo alla sezione §2.d

Nota 2.91. *È uso scrivere $a \geq b$ come sinonimo di $b \leq a$. Se $a \leq b \wedge a \neq b$ scriveremo $a < b$; similmente se $a \geq b \wedge a \neq b$ scriveremo $a > b$. Attenzione che se la relazione non è totale, non è detto che $\neg(a \leq b)$ sia equivalente a $a > b$.* [1Y7]

Vedete a questo proposito l'esercizio 2.100.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Definizione 2.92. *Un ordinamento totale* [†26] *su un insieme X è detto un* buon ordinamento *se ogni sottoinsieme di X non-vuoto ha minimo.* [1XO]

Esercizi

E2.93 Prerequisiti:2.87. Per ogni insieme A e relazione R fra elementi di A, dire se è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e/o transitiva; se è una relazione d'ordine, dire se è totale. [1WH] *(Proposto il 2022-12)*

- In $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nRm sse il massimo comun divisore fra n e m è 1
- In $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nRm se e solo se n divide m
- In $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nRm se e solo se $2n$ divide m
- In $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, aRb se e solo se $a \subseteq b$.

E2.94 Sia $f : A \to B$ una funzione, sia $\sim$ una relazione di equivalenza su B: dimostrate che la relazione R fra elementi di A data da [1WK]

$$xRy \iff f(x) \sim f(y)$$

è una relazione di equivalenza.

E2.95 Prerequisiti:2.87,2.89. [224]

Date due relazioni $a \leq b$ e $a < b$ per $a, b \in A$, mostrate che sono equivalenti:

- $a \leq b$ è una relazione d'ordine (possibilmente parziale) e identifichiamo
$$a < b = (a \leq b \wedge a \neq b) \quad ;$$
- $a < b$ è una relazione irriflessiva e transitiva e $\forall x, y \in A$ al più una condizione fra $x < y$, $x = y$, $y < x$ è vera; e identifichiamo
$$a \leq b = (a < b \vee a = b) \quad .$$

Questa relazione $a < b$ è chiamata **ordinamento (parziale) stretto**.

E2.96 Prerequisiti:2.87,2.89,2.95. Date due relazioni $a \leq b$ e $a < b$ per $a, b \in A$, mostrate che sono equivalenti: [24K]

- $a \leq b$ è una relazione d'ordine totale e
$$a < b = (a \leq b \wedge a \neq b) \quad ,$$
- $a < b$ è una relazione irriflessiva, tricotomica e transitiva e
$$a \leq b = (a < b \vee a = b) \quad .$$

Questa relazione $a < b$ è chiamata **ordinamento totale stretto**.

E2.97 Consideriamo $A = \mathbb{R}^2$ e consideriamo la relazione [1YH]

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x' \in \mathbb{Z} \wedge y - y' \in \mathbb{Z})$$

fra elementi di $\mathbb{R}^2$:

- mostrate che è una relazione di equivalenza;
- rappresentate graficamente le classi di equivalenza;
- descrivete l'insieme $A/\sim$.

[†26] In realtà la condizione di *buon ordinamento* per un ordinamento implica che è totale; lo lasciamo come esercizio 2.104.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§2.d Ordinamenti [1YY]

Sia $(X, \leq)$ un insieme non vuoto e ordinato (*cf* definizione 2.89)

Definizione 2.98. *Dati $x, y \in X$ ricordiamo che $x < y$ significa $x \leq y \wedge x \neq y$.* [229]

- *Quando si ha che $x \leq y$ oppure $y \leq x$ diremo che i due elementi sono* "comparabili". *Viceversa se non si ha ne $x \leq y$ ne $y \leq x$ diremo che i due elementi sono* "incomparabili".
- *Un elemento $m \in X$ si dice* massimale *se non esiste alcun elemento $z \in X$ tale che $m < z$.*
- *Un elemento $m \in X$ si dice* minimale *se non esiste alcun elemento $z \in X$ tale che $z < m$.*
- *Un elemento $m \in X$ si dice* massimo *se, per ogni elemento $z \in X$, si ha $z \leq m$.*
- *Un elemento $m \in X$ si dice* minimo *se, per ogni elemento $z \in X$, si ha $m \leq z$.*

Invertendo la relazione d'ordine, le definizioni di minimo/minimale *divengono le definizioni di* massimo/massimale *(e viceversa).*

Esercizi

E2.99 Dato un insieme ordinato, mostrate che il massimo, se esiste, è unico. [1WJ]

E2.100 Mostrate che per ogni due $x, y \in X$ si ha uno di questi casi mutualmente esclusivi [067]
(Svolto il 2022-10-13)

- $x = y$,
- $x < y$,
- $x > y$,
- x, y sono incomparabili.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '068']

E2.101 Mostrate che se $x < y \wedge y \leq z$ oppure $x \leq y \wedge y < z$ allora $x < z$. [29D]

E2.102 Mostrate che $m \in X$ è *massimale* se e solo se *"per ogni $z \in X$ si ha che $z \leq m$ oppure z, m sono incomparabili"*. [069]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '06B']

E2.103 Sia $f : A \to B$ una funzione, sia $\preceq$ una relazione d'ordine su B; consideriamo la relazione R fra elementi di A data da [1WM]

$$xRy \iff f(x) \preceq f(y) \quad ;$$

è una relazione d'ordine? E se assumiamo inoltre che f sia iniettiva?

E2.104 Mostrare che se ogni sottoinsieme non-vuoto ammette minimo, allora l'ordinamento è totale. [1WN]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E2.105 Consideriamo $A = \mathbb{R}^2$ e consideriamo la relazione [1YJ]

$$(x, y) \preceq (x', y') \iff (x \leq x' \wedge y \leq y')$$

- mostrate che è una relazione di ordine; è parziale o totale?
- Preso $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, consideriamolo come insieme ordinato con l'ordinamento $\preceq$: vi sono massimi? minimi? massimali? minimali?

E2.106 Sia $(X, \leq)$ un insieme non vuoto finito e ordinato allora ammette massimali e minimali. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '06D'] [06C] *(Proposto il 2022-12)*

E2.107 Si costruisca un ordinamento $\preceq$ su $\mathbb{N}$ con questa proprietà: per ogni $n \in \mathbb{N}$ [06F]

- l'insieme $\{k \in \mathbb{N}, k \neq n, k \preceq n\}$ degli elementi che precedono n ha esattamente due massimali,
- l'insieme $\{k \in \mathbb{N}, k \neq n, n \preceq k\}$ degli elementi che seguono n ha esattamente due minimali.

E2.108 Sia X insieme non vuoto e $R \subseteq X^2$ una relazione d'ordine, allora esiste una relazione di ordine totale T che estende R (cioè $R \subseteq T$, considerando le relazioni come sottoinsiemi di X^2). [06J] *(Proposto il 2022-12)*

E2.109 Prerequisiti: 3.7, 2.79. Sia X ordinato (parzialmente). Mostrate che sono equivalenti [263] *(Svolto il 2022-10-13)*

1. in ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ non-vuoto esiste almeno un elemento minimale;
2. non esistono funzioni $f : \mathbb{N} \to X$ strettamente decrescenti.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '07Y']

Si veda anche la Proposizione 2.191.

§2.d.a Ordinamento diretto e filtrante [2FJ]

Definizione 2.110. *Sia $(X, \leq)$ un insieme (parzialmente) ordinato, diremo che è* ***filtrante*** [†27] *se* [06M] *(Svolto il 2022-11-24)*

$$\forall x, y \in X \, \exists z \in X, \; x < z \wedge y < z \quad . \tag{2.111}$$

Gli insiemi $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ con i loro usuali ordinamenti sono filtranti.

Definizione 2.112. *Un* ***insieme diretto*** *è un insieme (parzialmente) ordinato $(X, \leq)$ per cui* [06N]

$$\forall x, y \in X \, \exists z \in X, \; x \leq z \wedge y \leq z \quad . \tag{2.113}$$

Ovviamente un ordinamento filtrante è anche diretto.

Nota 2.114. *Abbiamo aggiunto la proprietà antisimmetrica alla usuale definizione di "Insieme Diretto", si veda [15] (o altre referenze in [34]).* [0NB]

Questa scelta semplifica il trattamento (in particolare, ci permette di usare concetti già visti per insiemi ordinati, quali massimo *o* massimale*) e allo stesso tempo, per quanto spiegato in 6.57, non cambia l'utilità della teoria sviluppata in questa sezione e in Sezione §6.d.*

[†27] Come definito in Definizione 4.2.1 degli appunti [3].

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Definizione 2.115. *Dato un insieme diretto $(X, \leq_X)$ un suo sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice **cofinale** se* [06P]

$$\forall x \in X \, \exists y \in Y, \; y \geq_X x \tag{2.116}$$

*Più in generale, un altro insieme diretto $(Z, \leq_Z)$ si dice **cofinale** in X se esiste una mappa $i : Z \to X$ monotona debolmente crescente tale che $i(Z)$ è cofinale in X, cioè*

$$(\forall z_1, z_2 \in Z, z_1 \leq_Z z_2 \Rightarrow i(z_1) \leq_X i(z_2)) \;\wedge\; (\forall x \in X \, \exists z \in Z, \; i(z) \geq_X x) \tag{2.117}$$

(Questo secondo caso generalizza il precedente, decidendo che $i : Y \to X$ è l'identità e $\leq_Y$ è la restrizione di $\leq_X$ a Y.)

Definizione 2.118. *Se X è filtrante,* "un intorno di ∞ in X" *è un sottoinsieme $U \subseteq X$ tale che* [231]

$$\exists k \in X \forall j \in X, j \geq k \Rightarrow j \in U \, .$$

Esercizi

E2.119 Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato filtrante, si mostri che è un insieme infinito. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '06R'] [06Q] *(Proposto il 2022-11)*

E2.120 Sia $(X, \leq)$ un insieme diretto: si mostri che se esiste un elemento massimale in X allora è il massimo. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '06T'] [06S] *(Svolto il 2022-10-27)*

E2.121 Prerequisiti:2.110,2.120. Sia $(X, \leq)$ un insieme diretto. Si mostri che sono equivalenti queste proprietà: [06V] *(Svolto il 2022-11-24)*

- $(X, \leq)$ soddisfa la *proprietà filtrante* (2.111),
- $(X, \leq)$ non ha massimo,
- $(X, \leq)$ non ha massimali.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '06W']

E2.122 Prerequisiti:2.115.Sia $(X, \leq)$ un insieme diretto, sia $Y \subseteq X$ cofinale: si mostri che $(Y, \leq_{|Y})$ è un insieme diretto. [06X]

Similmente se $(X, \leq)$ è filtrante, si mostri che $(Y, \leq_{|Y})$ è filtrante.

E2.123 Prerequisiti:2.118.Dati $U_1, U_2 \subseteq J$ due intorni di ∞ si mostri che l'intersezione $U_1 \cap U_2$ è un intorno di ∞. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '236'] . [232]

E2.124 Prerequisiti:2.115,2.118.Se $(X, \leq)$ un insieme filtrante, $Y \subseteq X$ è cofinale, e $U \subseteq X$ è un intorno di ∞ in X, si mostri che $U \cap Y$ è un intorno di ∞ in Y. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '235'] [234]

Un insieme diretto $(X, \leq)$ è un ambiente a cui si può facilmente generalizzare la nozione già vista 3.56.

Definizione 2.125. *Sia* P(x) *una proposizione logica che dipende da una variabile libera $x \in X$. Diremo che* [06Y] *(Svolto il 2022-10-27)*

P(x) *vale definitivamente per $x \in X$ se*	$\exists y \in X, \forall x \in X, x \geq y$ *vale* P(x) *;*
P(x) *vale frequentemente per $x \in X$ se*	$\forall y \in X, \exists x \in X, x \geq y$ *per cui* P(x) .

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E2.126 La proprietà 3.60 si riformula in questo modo. [070]

(Proposto il 2022-10-27)

Mostrate che «*P(x)* vale frequentemente in $x \in X$» se e solo se l'insieme

$$Y = \{x \in X : P(x)\}$$

è cofinale in X.

E2.127 Prerequisiti:2.125,2.123. Mostrate che «*P(x)* vale definitivamente in $x \in X$» se e solo se l'insieme [233]

$$U = \{x \in X : P(x)\}$$

è un intorno di ∞ in X.

E2.128 Si verifichi per esercizio che le proprietà 3.58, 3.59, 3.61 e 3.62 viste in Sez. §3.g valgono anche in questo caso 2.125 più generale. [06Z]

E2.129 Supponiamo che l'insieme X abbia associato una relazione R che sia riflessiva e transitiva e per cui [2B2]

$$\forall x, y \in X \; \exists z \in X, \; xRz, yRz \quad . \tag{2.130}$$

(come visto in (2.113))

Questa coppia (X, R) è un "Insieme Diretto" secondo la definizione usuale (cfr. [15] o altre referenze in [34]).

Mostrate che esiste un'altra relazione $\leq$ tale che

- $\leq$ è un ordine parziale che soddisfa (2.113);
- R estende $\leq$ cioè
$$\forall x, y \in X \; x \leq y \Rightarrow \; xRy \quad ;$$
- inoltre $(X, \leq)$ è cofinale in (X, R).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2GM']

Altri esercizi sull'argomento sono 5.12,7.15, e in Sezione §6.d.

§2.d.b Ordinamento lessicografico [2FH]

Definizione 2.131. *Dati due insiemi ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, posto $Z = X \times Y$, definiamo **l'ordinamento lessicografico** $\leq_Z$ su Z come segue; siano $z_1 = (x_1, y_1) \in Z$ e $z_2 = (x_2, y_2) \in Z$, allora:* [071]

- *nel caso $x_1 \neq x_2$, allora $z_1 \leq_Z z_2$ se e solo se $x_1 \leq_X x_2$;*
- *nel caso $x_1 = x_2$, allora $z_1 \leq_Z z_2$ se e solo se $y_1 \leq_Y y_2$.*

Questo si estende al prodotto di più insiemi: dati due vettori, si considerano i primi elementi, se sono diversi si usa il primo ordinamento, se sono uguali si passa ai secondi elementi, ecc.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E2.132 Si verifichi che $\leq_Z$ è un ordinamento. [1WP]

E2.133 Se $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ sono ordinamenti totali, si mostri che $(Z, \leq_Z)$ è un ordinamento totale. [072]

E2.134 Se $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ sono buoni ordinamenti, si mostri che $(Z, \leq_Z)$ è un buon ordinamento. [073]

E2.135 Sia $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ordinato con l'ordinamento lessicografico. Si costruisca una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* [074] [UNACCESSIBLE UUID '075']

E2.136 Consideriamo $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ ordinato con l'ordinamento lessicografico. Si mostri che non esiste una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* [076] [UNACCESSIBLE UUID '077']

§2.d.c Ordinamento totale, sup e inf [2FM]

Sia $\leq$ un ordinamento totale su X insieme non vuoto.

Definizione 2.137. *Sia $A \subseteq X$. I **maggioranti** di A sono* [22R]

$$M_A \stackrel{def}{=} \{x \in X : \forall a \in A, a \leq x\} \quad .$$

*Un insieme A è **superiormente limitato** quando esiste un $x \in X$ tale che $\forall a \in A, a \leq x$, cioè esattamente quando $M_A \neq \emptyset$.*

*Se M_A ha minimo s, s è l'**estremo superiore** di A, e scriveremo $s = \sup A$.*

*Invertendo la relazione d'ordine, otteniamo le definizione **maggioranti**, **inferiormente limitato**, **estremo inferiore**.*

Lemma 2.138. *Sia $A \subseteq X$ non vuoto. Ricordiamo queste proprietà dell'estremo superiore.* [22S]

1. *Se A ha massimo m allora $m = \sup A$.*
2. *Sia $s \in X$. Si ha $s = \sup A$ se e solo se*
   - *per ogni $x \in A$ si ha $x \leq s$.*
   - *per ogni $x \in X$ con $x < s$ esiste $y \in A$ con $x < y$.*

Quest'ultima proprietà è di larghissimo uso nell'analisi!

La dimostrazione è lasciata come (utile) esercizio. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22T']

Esercizi

E2.139 Sia B un insieme non vuoto che è limitato dal basso, sia L l'insieme dei minoranti di B; notiamo che L è superiormente limitato, e supponiamo che esista $\alpha = \sup L$: allora $\alpha \in L$ e $\alpha = \inf B$. *Soluzione nascosta:* [078] *(Proposto il 2022-10-13)* [UNACCESSIBLE UUID '079']

E2.140 Prerequisiti:2.139. Mostrate che se per l'ordinamento totale di X esistono i"sup" allora esistono anche gli "inf"; e viceversa. Precisamente, mostrate che sono equivalenti: [07B] *(Proposto il 2022-10-13)*

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- Ogni insieme non vuoto inferiormente limitato in X ammette estremo inferiore;
- ogni insieme non vuoto superiormente limitato in X ammette estremo superiore.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '207']

§2.d.d Ordinamento totale, intervalli [2DW]

Sia $\leq$ un ordinamento totale su X insieme non vuoto.

Definizione 2.141. *Un insieme $I \subseteq X$ è un **intervallo** se per ogni $x, z \in I$ e ogni $y \in X$ con $x < y < z$ si ha $y \in I$.* [07C]

Notate che l'insieme vuoto è un intervallo.

Definizione 2.142. *Dati $x, z \in X$ si definiscono i seguenti intervalli standard* [07D]

$$\begin{aligned}
(x,z) &= \{y \in X : x < y < z\} \\
(x,z] &= \{y \in X : x < y \leq z\} \\
(x,\infty) &= \{y \in X : x < y\} \\
[x,z) &= \{y \in X : x \leq y < z\} \\
[x,z] &= \{y \in X : x \leq y \leq z\} \\
[x,\infty) &= \{y \in X : x \leq y\} \\
(-\infty,z) &= \{y \in X : y < z\} \\
(-\infty,z] &= \{y \in X : y \leq z\} \\
(-\infty,\infty) &= X\ .
\end{aligned}$$

Notate che vi sono 9 casi, combinazioni di tre per l'estremo destro e tre per l'estremo sinistro. Intendiamo che $\infty, -\infty$ sono simboli e non elementi di X; per questo motivo se X ha massimo m, allora gli intervalli si scrivono preferibilmente come $(x,\infty) = (x,m]$ e $[x,\infty) = [x,m]$; similmente se ha un minimo. [24Y]

Esercizi

E2.143 Prerequisiti: 2.141, 2.142, 2.59. [07F]

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di intervalli.

Mostrate che la intersezione $\bigcap \mathcal{F}$ di tutti gli intervalli è un intervallo.

Supponiamo che l'intersezione $\bigcap \mathcal{F}$ sia non vuota, mostrate che la unione $\bigcup \mathcal{F}$ è un intervallo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '07G']

E2.144 Prerequisiti: 2.141, 2.142. [07H]

(Svolto il 2022-10-13)

Si trovi un esempio di insieme X con ordinamento totale, in cui vi è un intervallo I che non ricade in nessuna delle categorie viste in 2.142.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '07J']

E2.145 Prerequisiti: 2.141, 2.142, 2.143. [07K]

(Proposto il 2022-10-13)

Sia $A \subseteq X$ un insieme non vuoto; sia I il più piccolo intervallo che contiene A; questo è definito come l'intersezione di tutti gli intervalli che contengono A (e l'intersezione

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

è un intervallo, per 2.143). Sia M_A la famiglia dei maggioranti di A, M_I di I; si mostri che $M_A = M_I$. In particolare A è superiormente limitato se e solo I è superiormente limitato; se inoltre A ha estremo superiore, si avrà $\sup A = \sup I$. (Similmente per minoranti e estremi inferiori). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '07M']

E2.146 Prerequisiti:2.141,2.142,2.143,2.145. [07N]

Sia X un insieme totalmente ordinato. Mostrate che le due seguenti sono equivalenti.

- Ogni $A \subseteq X$ non vuoto limitato dall'alto e dal basso ammette estremo superiore e inferiore.
- Ogni intervallo $I \subseteq X$ non vuoto ricade in una delle categorie viste in 2.142.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '07P']

E2.147 Prerequisiti:2.141,2.142,2.143.Difficoltà:*. [206]

All'inizio della sezione abbiamo assunto che l'ordinamento $\leq$ su X sia totale. Le definizioni di *intervallo* in 2.141 e in 2.142 si possono però dare anche per un ordinamento che non sia (necessariamente) totale. Cosa succede nell'esercizio 2.143 quando l'ordinamento non è totale? Quale risultato è vero, quale è falso, e nel caso che controesempio possiamo dare?

§2.d.e Tipi di ordine

Definizione 2.148. *Dati due insiemi non vuoti ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, diremo che* "hanno lo stesso tipo d'ordine"*, o più brevemente che sono* "equiordinati" [†28]*, se esiste una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $f : X \to Y$, la cui inversa f^{-1} è strettamente crescente. La funzione f è detta* "isomorfismo d'ordine"*, o* "isotonia". [07V]

Nota 2.149. *Notate che se $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ sono* equiordinati *allora X e Y sono* equipotenti*; però dato un insieme infinito X, esistono su di esso ordinamenti di diverso tipo — anche se consideriamo solo i buoni ordinamenti. (Si veda ad esempio l'esercizio 2.254)* [21R]

Nota 2.150. *Notate che, se due insiemi sono equiordinati, allora godono delle stesse proprietà: se uno è totalmente ordinato, lo è anche l'altro; se uno è bene ordinato, lo è anche l'altro; etc etc.... Si veda 2.152.* [21V]

Esercizi

E2.151 Mostrate che la relazione *"avere lo stesso tipo d'ordine"* è una relazione d'equivalenza. Dato un insieme X, consideriamo tutti i possibili ordinamenti su X, la relazione definisce dunque classi di equivalenza, e ogni classe è (per l'appunto) un *"tipo d'ordine"* su X. [220]

E2.152 Dati due insiemi non vuoti ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, sia $f : X \to Y$ come da definizione 2.148. [22P]
(Proposto il 2023-01-17)

- Se $A \subseteq X$ e $m = \max A$ allora $f(m) = \max f(A)$; similmente per i minimi;

[†28] La dicitura "equiordinati" non è standard.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- $(X, \leq_X)$ è totalmente ordinato se e solo se $(Y, \leq_Y)$ lo è;
- $(X, \leq_X)$ è bene ordinato se e solo se $(Y, \leq_Y)$ lo è.
- Supponiamo che $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ siano bene ordinati; siano S_X e rispettivamente S_Y le funzioni "successore" 2.241, allora si ha che x non è il massimo di X se e solo se $f(x)$ non è il massimo di Y, e in questo caso $y = S_X(x)$ se e solo se $f(y) = S_Y(f(x))$.

E2.153 Dati due insiemi non vuoti totalmente ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, supponiamo che esista una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $f : X \to Y$: si mostri che allora la sua inversa f^{-1} è strettamente crescente, e conseguentemente $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ sono *equiordinati*. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '21T'] [21P]

E2.154 Trovate un semplice esempio di due insiemi non vuoti (parzialmente) ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, per cui esiste una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $f : X \to Y$, la cui inversa f^{-1} non è strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '21S'] [21Q]

§2.d.f Concatenazione

Definizione 2.155. *Dati due insiemi ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, con X, Y disgiunti,* ***la concatenazione di X con Y*** *si ottiene definendo $Z = X \cup Y$ e dotandolo dell'ordinamento $\leq_Z$ dato da:* [21W]

- *se $z_1, z_2 \in X$ allora $z_1 \leq_Z z_2$ se e solo se $z_1 \leq_X z_2$;*
- *se $z_1, z_2 \in Y$ allora $z_1 \leq_Z z_2$ se e solo se $z_1 \leq_Y z_2$;*
- *se $z_1 \in X$ e $z_2 \in Y$ allora si ha sempre $z_1 \leq_Z z_2$.*

Questa operazione è alle volte indicata con la notazione $Z = X + Y$.

Se gli insiemi non sono disgiunti, possiamo sostituirli con insiemi disgiunti definiti da $\tilde{X} = \{0\} \times X$ e $\tilde{Y} = \{1\} \times Y$, poi potremo "ricopiare" i rispettivi ordinamenti, e infine potremo eseguire la concatenazione di $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$.

Esercizi

E2.156 Sia $k \in \mathbb{N}$ e sia $I = \{0, \dots, k\}$ con l'usuale ordinamento di $\mathbb{N}$: si mostri che la concatenazione di I con $\mathbb{N}$ ha lo stesso tipo d'ordine di $\mathbb{N}$; mentre invece la concatenazione di $\mathbb{N}$ con I non ha lo stesso tipo d'ordine. [21X]

E2.157 Prerequisiti: 2.131, 2.148. Siano $(X_1, \leq_1), (X_2, \leq_2)$ due insiemi disgiunti e ordinati (parzialmente) e con lo stesso tipo d'ordine. Sia $I = \{1, 2\}$ con l'usuale ordinamento; sia $Z = I \times X_1$ dotato dell'ordinamento lessicografico; sia W la concatenazione di di X_1 con X_2: mostrate che Z e W hanno lo stesso tipo d'ordine. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '221'] [21Y]

E2.158 Siano X_1, X_2 due insiemi disgiunti e bene ordinati. Sia W la concatenazione di di X_1 con X_2: mostrate che è bene ordinato. [21Z]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§2.e Funzioni [1YR]

La definizione di *funzione* si può riportare alla teoria degli insiemi in questo modo.

Definizione 2.159. *Dati due insiemi A, B, una funzione $f : A \to B$ è una terna* [1Y6]

$$A, B, F$$

(dove A viene detto dominio *e B* codominio*) e F è una relazione $F \subseteq A \times B$ tale che*

$$\forall x \in A \exists! y \in B, xFy \quad ;$$

cioè gode delle proprietà di essere funzionale *e* totale *(definite in 2.87).*

Essendo l'elemento y unico, possiamo usare la scrittura $y = f(x)$ per dire appunto che y è l'unico elemento in relazione xFy con x.

L'insieme F viene anche detto grafico *della funzione.*

Definizione 2.160. *Dati insiemi non vuoti I, A, una* ***successione con indici in I e a valori in A*** *è una funzione $a : I \to A$; si usa la notazione $(a_n)_{n\in I}$. Per indicare il codominio, si usa anche la notazione $(a_n)_{n\in I} \subseteq A$. In questo testo si avrà spesso $I = \mathbb{N}$, e in questo caso scriveremo semplicemente (a_n).* [16G]

Nella pratica, la definizione di funzione si scrive sempre come $f : A \to B$; per questo il grafico viene definito come

$$F = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \quad .$$

Nota 2.161. *Sia A insieme non vuoto, siano $f : A \to \{0, 1\}$ e $g : A \to \{1\}$ entrambe date da $f(x) = g(x) = 1$ per ogni $x \in A$.* [08X]

Siano F, G rispettivamente i grafici: notate che $F = G$ (!) Diremo che $f = g$ oppure no? Si sceglie il no, altrimenti il concetto di "surgettivo" non avrebbe senso.

Per questo nella definizione abbiamo deciso che la funzione è la terna "dominio", "codominio", "relazione".

Esercizi

E2.162 Mostrate che la composizione di due funzioni iniettive è una funzione iniettiva. [1WQ]

E2.163 Mostrate che la composizione di due funzioni surgettive è una funzione surgettiva. [1WR]

E2.164 Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una assegnata funzione e I la sua immagine, dimostrate che esiste $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $f|_A$ è iniettiva e $f(A) = I$. *(Sugg. può essere utile sapere che l'usuale ordinamento di $\mathbb{N}$ è un buon ordinamento* cf *2.235 e 3.28).* [1WS]

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1WT']`

Nota: il risultato è vero per qualunque funzione $f : A \to B$, ma la dimostrazione richiede l'assioma della scelta.

E2.165 Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : I \to J$ data da $f(x) = \sin(x)$. Scegliendo $I = \mathbb{R}$ o $I = [0, \pi/2]$ oppure $I = [-\pi/2, \pi/2]$, e scegliendo $J = \mathbb{R}$ o $J = [-1, 1]$, dite per quali scelte f è surgettiva, e per quali è iniettiva. [08Y] *(Proposto il 2022-12)*

(Questo esercizio serve a farvi riflettere sulla differenza fra "formula" e "funzione".)

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E2.166 Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to B$ definita dalla formula $f(x) = x^2$; dite se, per le seguenti scelte di A, B, la funzione f è iniettiva e/o surgettiva. [1X3]

1. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$
2. $A = \mathbb{R}, B = [0, \infty)$
3. $A = [0, \infty), B = \mathbb{R}$
4. $A = [0, \infty), B = [0, \infty)$

Se la funzione è bigettiva, come si chiama comunemente la sua inversa?

(Questo esercizio serve a farvi riflettere sulla differenza fra "formula" e "funzione".)

E2.167 Date $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definite da $f(n) = n^2 - 1$ e $g(n) = (n+1)^2$, scrivete esplicitamente $f \circ g$ e $g \circ f$, dite se coincidono o sono funzioni diverse. [1X4]

E2.168 Trovate un esempio di $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ per cui si ha $f \circ g \equiv g \circ f$, ma né f né g sono bigettive. [1X5]

E2.169 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bigettiva, sia $F \subseteq \mathbb{R}^2$ il suo grafico; sia f^{-1} l'inversa di f e sia G il suo grafico; mostrate che G è il simmetrico di F rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. [1X6]

E2.170 Siano D, C insiemi non vuoti e $f : D \to C$ una funzione. Siano I una famiglia nonvuota di indici, $B_i \subseteq C$ per $i \in I$. Dato $B \subseteq C$ ricordiamo che la **controimmagine** di B è [091]

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D, f(x) \in B\} \ ,$$

Dato $B \subseteq C$ sia $B^c = \{x \in C, x \notin B\}$ il complementare. Mostrate queste proprietà della controimmagine.

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \tag{2.171}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \tag{2.172}$$

$$f^{-1}\big(B^c\big) = f^{-1}(B)^c \ . \tag{2.173}$$

E2.174 Siano D, C insiemi non vuoti e $f : D \to C$ una funzione. Siano I una famiglia nonvuota di indici, $A_i \subseteq D$, per $i \in I$. Dato $A \subseteq D$ ricordiamo che la **immagine** di A è il sottoinsieme $f(A)$ di D dato da [092]

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x), x \in A\} \ .$$

Mostrate queste proprietà della immagine.

$$\begin{aligned} f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcup_{i\in I} f(A_i) \\ f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) &\subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i) \ . \end{aligned}$$

Mostrate che la funzione è iniettiva se e solo se

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \tag{2.175}$$

è un' uguaglianza per ogni scelta di $A_1, A_2 \subseteq D$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E2.176 Siano D, C insiemi non vuoti e $f : D \to C$ una funzione. Dato $U \subseteq C$ mostrate che [250]

$$f(f^{-1}(U)) \subseteq U\,;$$

se f è surgettiva mostrate che si ha uguaglianza; trovate un esempio dove non si ha uguaglianza.

E2.177 Siano D, C insiemi non vuoti e $f : D \to C$ una funzione. Dato $A \subseteq D$ mostrate che [251]

$$f^{-1}(f(A)) \supseteq A\,;$$

se f è iniettiva mostrate che si ha uguaglianza; trovate un esempio dove non si ha uguaglianza.

E2.178 Siano A, B insiemi non vuoti. [2BX]

- Supponiamo che $f : A \to B$ sia una funzione iniettiva, allora esiste una funzione surgettiva $g : B \to A$ tale che $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ (la funzione identità). (Una tale g è chiamata *inversa sinistra* di f).
- Supponiamo che $g : B \to A$ sia una funzione surgettiva, allora esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$ tale che $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. (Una tale f è chiamata *inversa destra* di g).

La dimostrazione della seconda asserzione richiede l'Assioma della Scelta (si veda 2.82).

Viceversa.

- Se $f : A \to B$ ha una *inversa sinistra*, allora è iniettiva.
- Se $g : B \to A$ ha una *inversa destra* allora è surgettiva.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2BY']

E2.179 Sia A un insieme e sia $g : A \to A$ iniettiva. Definiamo la relazione $x \sim y$ che è vera quando si ha un $n \geq 0$ per cui $x = g^n(y)$ oppure $x = g^n(y)$; dove [093]

$$g^n = \overbrace{g \circ \cdots \circ g}^{n}$$

è la n-esima iterata della composizione. (Decidiamo che g^0 è la identità). Mostrate che $x \sim y$ è una relazione di equivalenza. Studiate le classi di equivalenza. Sia $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} g^n(A)$ l'intersezione delle immagine ripetute. Mostrate che ogni classe è interamente contenuta in U o ne è esterna.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '094']

E2.180 Mostrate che esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(f(x)) = -x$. Esiste una funzione continua per cui $f(f(x)) = -x$? (Sugg. mostrate che per ogni tale f si ha $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '096'] [095]

E2.181 Mostrate che esiste una funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ tale che $f(f(x)) = \sin(x)$. Esiste una funzione continua? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '098'] [097]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E2.182 Siano D, C insiemi non vuoti. Una **funzione parziale** da D in C è una funzione $\varphi : B \to C$ dove $B \subseteq D$. (La definizione di "*funzione*" è in 2.159). [01P] *(Svolto il 2022-11-15)*

Può far comodo pensare alla funzione parziale come a una relazione $\Phi \subseteq D \times C$ tale che, se $(x,a),(x,b) \in \Phi$ allora $a = b$ (si veda 2.87). Le due nozioni sono equivalenti in questo senso: data Φ costruiamo il dominio di φ, che chiameremo B, con la proiezione di Φ sul primo fattore cioè $B = \{x \in D : \exists c \in C, (x,c) \in \Phi\}$, e definiamo $\varphi(x) = c$ come l'unico elemento $c \in C$ tale che $(x,c) \in \Phi$; viceversa Φ è il grafico di φ.

Le funzioni parziali, viste come relazioni Φ, sono naturalmente ordinate per inclusione; equivalentemente $\varphi \leq \psi$ se $\varphi : B \to C$ e $\psi : E \to C$ e $B \subseteq E \subseteq D$ e $\varphi = \psi_{|B}$.

Sia ora U una **catena**, cioè una famiglia di funzioni parziali che è totalmente ordinata secondo l'ordinamento precedentemente dato; vedendo ogni funzione parziale come relazione, sia Ψ l'unione di tutte le relazioni in U; mostrate che Ψ è il grafico di una funzione parziale $\psi : E \to C$, il cui dominio E è l'unione di tutti i domini delle funzioni in U, e la cui immagine I è l'unione di tutte le immagini delle funzioni in U

Se inoltre tutte le funzioni in U sono iniettive, mostrate che ψ è iniettiva.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '01Q']

§2.f Funzioni elementari

Esercizi

E2.183 Siano n, m, k interi positivi. Si dimostri che il numero $(n+\sqrt{m})^k + (n-\sqrt{m})^k$ è intero. [09G]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '09H']

E2.184 Sia K un intero positivo, N un intero, sia $I = \{N, N+1, \dots, N+K\}$ la successione degli interi da N a $N+K$. Per ogni $n \in I$ fissiamo un valori intero a_n. Sia p l'unico polinomio di grado K tale che $p(n) = a_n$ per ogni $n \in I$. [09J]

- Si mostri che p ha coefficienti razionali.
- Si mostri che $p(x)$ è intero per ogni x intero.
- Si trovi un esempio di polinomio p che assume valori interi per x intero, ma che non ha tutti coefficienti interi.
- Cosa succede se I contiene $K+1$ interi ma non consecutivi? È ancora vero che, definito $p(x)$ come sopra, p assume solo valori interi sugli interi?

E2.185 Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n, si mostri che esiste $c > 0$ tale che per ogni x si abbia $|p(x)| \leq c(1 + |x|^n)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '09M'] [09K]

E2.186 Si dimostri che, per $n \geq 2$, [211] *(Proposto il 2022-12)*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \log(n)$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '212']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§2.g Passaggio al quoziente [1Z5]

Definizione 2.187. *Sia A un insieme e $\sim$ una relazione di equivalenza. Si indica con* [23M]

$$A/\sim$$

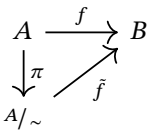
*lo spazio quoziente, cioè l'insieme di tutte le classi di equivalenza; la **proiezione canonica** è la mappa $\pi : A \to A/\sim$ che associa ad ogni $x \in A$ la classe $[x] \in A/\sim$.*

[20Q]

- Supponiamo di avere una funzione $f : A \to C$; diremo che questa è **invariante** (o anche "**compatibile con** $\sim$") se

$$\forall x, y \in A, \quad x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y) \quad . \tag{2.188}$$

  Questo comporta che f è costante su ogni classe di equivalenza; dunque f **passa al quoziente**, cioè è ben definita una funzione $\widetilde{f} : A/\sim \to B$ tale che $\widetilde{f}([x]) = f(x)$ per ogni $x \in A$; cioè $\widetilde{f} \circ \pi \equiv f$.



- Similmente ci comportiamo se f è una funzione a più argomenti $f : A_1 \times A_2 \times \dots A_n \to C$, e su uno o più di questi insiemi A_1 sono presenti relazioni di equivalenza: in questo caso possiamo far passare ai quozienti le variabili associate. Ad esempio nel caso che vi sia una relazione di equivalenza $\sim$ su A_1, richiederemo che

$$\forall x, y \in A_1, \forall a_2 \in A_2 \dots \forall a_n \in A_n \dots \quad x \sim y \Rightarrow f(x, a_2, \dots a_n) = f(y, a_2, \dots a_n)$$

  e allora potremo *passare al quoziente* e definire la funzione $\widetilde{f} : A_1/\sim \times A_2 \times \dots A_n \to C$ in modo che

$$\widetilde{f}(\pi(x), a_2, \dots a_n) = f(x, a_2, \dots a_n) \quad .$$

- Un simile ragionamento può essere fatto per le relazioni $R \in A \times B$; formalmente possiamo ricondurci al caso precedente pensando a R come a una funzione che ha dominio $A \times B$ e codominio l'insieme {"vero","falso"}; per essere più espliciti, diremo che R è invariante rispetto alla relazione $\sim$ su A se

$$\forall x, y \in A, \forall b \in B \quad x \sim y \Rightarrow (xRb \Leftrightarrow yRb) \quad ;$$

  e in questo caso possiamo definire la relazione $\widetilde{R}$ *"proiettata al quoziente"* fra $A/\sim$ e B.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

$$\begin{array}{ccc} A\times A & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \pi\times\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ A/_\sim \times A/_\sim & \xrightarrow[\widetilde{f}]{} & A/_\sim \end{array}$$

- In certi casi invece una funzione *passa al quoziente* contemporaneamente al dominio e al codominio; vediamo il caso di una funzione di due argomenti, che sarà usato in seguito. Supponiamo di avere una funzione $f : A\times A \to A$; diremo che questa è **invariante** se

$$\forall x,\tilde{x},y,\tilde{y}\in A,\quad (x\sim\tilde{x}\wedge y\sim\tilde{y})\Rightarrow f(x,y)\sim f(\tilde{x},\tilde{y})\quad ; \tag{2.189}$$

  allora f **passa al quoziente**, cioè è ben definita una funzione

$$\widetilde{f} : A/_\sim \times A/_\sim \to A/_\sim$$

  tale che

$$\forall x,y\in A\quad \widetilde{f}([x],[y]) = [f(x,y)]\quad .$$

Proposizione 2.190. [1Z6]

- *Supponiamo che la funzione $f : A\times A\to A$ sia invariante per la relazione d'equivalenza $\sim$ in tutte le sue variabili, nel senso definito in* (2.189) *sia $\tilde{f}$ la proiezione al quoziente*

$$\widetilde{f} : A/_\sim \times A/_\sim \to A/_\sim\quad .$$

  *Se f è commutativa (*risp. *associativa) allora $\widetilde{f}$ è commutativa (*risp. *associativa).*

- *Se R è una relazione in $A\times A$ invariante per $\sim$, e R è riflessiva (*risp *simmetrica, antisimmetrica, transitiva) allora $\widetilde{R}$ è riflessiva (*risp *simmetrica, antisimmetrica, transitiva).*

- *Supponiamo che $(A,\leq_A)$ e $(B,\leq_B)$ siano ordinati e sia $f : A\to B$ monotona; supponiamo inoltre che l'ordinamento $\leq_A$ sia invariante rispetto a una relazione di equivalenza $\sim$ su A, e sia $\widetilde{f} : A/_\sim \to B$ la proiezione al quoziente: allora $\widetilde{f}$ è monotona.*

Proposizione 2.191. *(Replaces 06G) (Replaces 06H) Consideriamo R una relazione in $A\times A$* [1Z7] *transitiva e riflessiva: una tale relazione è detta un* preordine *[28]; definiamo $x\sim y \iff (xRy\wedge yRx)$ allora $\sim$ è una relazione di equivalenza, R è invariante per $\sim$, e $\widetilde{R}$ (definita come in 2.190) è una relazione d'ordine.*

Dimostrazione. 1. $\sim$ è chiaramente riflessiva e simmetrica; è transitiva perché se $x\sim y, y\sim z$ allora $xRy\wedge yRx\wedge yRz\wedge zRy$ ma essendo R transitiva si ottiene $xRz\wedge zRx$ cioè $x\sim z$

2. Siano $x,y,\tilde{x},\tilde{y}\in X$ tali che $x\sim\tilde{x}, y\sim\tilde{y}$ allora si ha $xR\tilde{x}\wedge\tilde{x}Rx\wedge yR\tilde{y}\wedge\tilde{y}Ry$ se aggiungiamo xRy per transitività otteniamo $\tilde{x}R\tilde{y}$; e simmetricamente.

3. Vediamo infine che $\widetilde{R}$ è una relazione d'ordine su Y. Usando la (buona) definizione "$[x]\widetilde{R}[y] \iff xRy$" deduciamo che $\widetilde{R}$ è riflessiva e transitiva (come del resto asserito nella proposizione precedente). $\widetilde{R}$ è anche antisimmetrica perché se per $z,w\in A/\sim$ si ha $z\widetilde{R}w\wedge w\widetilde{R}z$ allora presi $x\in z, y\in w$ si ha $xRy\wedge yRx$ che vuol dire $x\sim y$ e dunque $z=w$.

□

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E2.192 Siano $\mathbb{Z}$ i numeri interi relativi dotati delle usuali operazioni. Sia $p \geq 1$ intero fissato. Consideriamo la relazione di equivalenza [1Z8]

$$n \sim m \iff p|(n-m)$$

cioè sono equivalenti quando $n-m$ è divisibile per p.

Mostrate che vi sono p classi di equivalenza $[0], [1], \ldots [p-1]$ Si indica lo spazio quoziente con $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ o più brevemente $\mathbb{Z}_p$.

Mostrate che le usuali operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{Z}$ sono inviarianti (nel senso definito in (2.189)) dunque passano al quoziente.

§2.h Numeri naturali in ZF [246]

In questa sezione costruiremo un modello dei numeri naturali all'interno della teoria ZF degli insiemi; questo modello soddisfa gli assiomi di Peano 3.3 e ha un ordinamento che soddisfa 3.25, dunque questo modello gode di tutte le proprietà elencate in Sez. §3; per questo motivo in questa sezione approfondiremo solo le proprietà specifiche di questo modello.

§2.h.a Successore

Definizione 2.193. *Dato x si definisce il **successore** come* [24X]

$$S(x) \stackrel{def}{=} x \cup \{x\} \quad . \tag{2.194}$$

Spesso scriveremo Sx invece di $S(x)$ per semplicità.
*Diciamo che un insieme A è **S-saturo** se $\varnothing \in A$ e se per ogni $x \in A$ si ha $S(x) \in A$.* †29

Esercizi

E2.195 Notate che $z \in S(x)$ se e solo se $z \in x \vee z = x$; [24V]

E2.196 Prerequisiti:2.72,2.195. Dimostrate che $x \in S(x)$ e $x \subsetneq S(x)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '24N'] [24M]

E2.197 Prerequisiti:2.72,(2.194),2.195. Siano x, y elementi (qualunque, non necessariamente numeri naturali), tali che [239]

$$x \subseteq y \subseteq S(x) \tag{2.198}$$

si mostri che allora

$$x = y \vee y = S(x) \quad ;$$

dove le due condizioni precedenti sono mutualmente esclusive, e (nell'ipotesi (2.198) precedente) la seconda vale se e solo se $x \in y$; riassumendo

$$(2.198) \Rightarrow (x = y \iff y \neq S(x) \iff x \notin y) \quad .$$

Notate l'analogia con 2.243.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E2.199 Si mostri che la intersezione di insiemi S-saturi è un insieme S-saturo. [245]

E2.200 Prerequisiti: 2.72, (2.194), 2.195.[†30] Mostrate che [1YM]

$$x = y \iff S(x) = S(y) \quad .$$

In particolare questo dimostra che, se A è un insieme S-saturo, allora è ben definita la funzione $S : A \to A$, il cui grafico è la relazione

$$\{(x, y) \in A^2 : y = S(x)\} \quad ;$$

inoltre S è iniettiva.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1YN']

E2.201 Trovate un esempio di x, y tali che $x \in y \wedge x \subseteq y$ ma $S(x) \notin S(y)$ [24Q]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '24R']

E2.202 Mostrate che se $x \in y \wedge x \subseteq y$ allora $S(x) \subseteq y$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '24T'] [24S]

§2.h.b Numeri naturali in ZF

Definizione 2.203. *L'**assioma dell'infinito** garantisce che esiste un insieme A che è S-saturo.* [243]

Usando l'assioma dell'infinito 2.203 si può mostrare la esistenza dell'insieme dei numeri naturali.

Teorema 2.204. *$\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme S-saturo.* [244]

Dimostrazione. Dato un insieme A che sia S-saturo, si definisce $\mathbb{N}_A$ come l'intersezioni di tutti i sottoinsiemi S-saturi di A. Per 2.199, $\mathbb{N}_A$ è S-saturo. Dati due insieme A, B che siano S-saturi, si mostra che $\mathbb{N}_A = \mathbb{N}_B$: si indica dunque con $\mathbb{N}$ questo insieme. In particolare, dato un insieme A che sia S-saturo, si ha $\mathbb{N} \subseteq A$. □

Esempio 2.205. *In questo modello il primo numero naturale è* 0 *ed è identificato con* $\emptyset$. *Poi* [291]

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\{\}\}, \\ 2 &= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}, \\ 3 &= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}, \end{aligned}$$

....

Nota 2.206. *Vale questo risultato* [25C]

$$\forall y \in \mathbb{N}, y \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}, S(x) = y$$

questo può essere dimostrato per induzione, come in 3.2, o mostrando che se

$$\exists y \in \mathbb{N}, y \neq \emptyset \wedge \forall x \in \mathbb{N}, S(x) \neq y$$

[†29] In [14] un tale insieme viene definito "*inductive*".
[†30] Proposizione 1.7.4 punto 5 in [3].

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

allora $\mathbb{N} \setminus \{y\}$ *sarebbe un insieme S-saturo più piccolo di* $\mathbb{N}$*, una contraddizione. In particolare da 2.200 si ottiene che la* funzione successore

$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

è bigettiva.

Se $n \neq 0$ *chiameremo* $S^{-1}(n)$ *il* ***predecessore*** *di* n*.*

Possiamo anche dimostrare direttamente il principio di induzione.

Teorema 2.207 (Principio di induzione)**.** *Sia* $A \supseteq \mathbb{N}$ *e* $P(n)$ *una proposizione logica che possa essere valutata per* $n \in A$*. Supponiamo siano soddisfatte le due seguenti ipotesi:* [23B]

- $P(n)$ *è vera per* $n = 0$ *e*
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(S(n))$ *;*

allora P è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$*.*
La prima ipotesi è nota come "base dell'induzione" e la seconda come "passo induttivo"

Dimostrazione. Sia $U = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$ sappiamo che $0 \in U$ e che $\forall x, x \in U \Rightarrow S(x) \in U$, così U è S-saturo e $U \subseteq N$ si conclude $U = \mathbb{N}$. □

Teorema 2.208. *Consideriamo la relazione d'ordine* $\subseteq$ *su* $\mathbb{N}$*; allora* [24D]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \subseteq Sy \wedge x \neq Sy) \iff (x \subseteq y) \quad . \tag{2.209}$$

Questo sarà dimostrato nell'Esercizio 2.218.

Per dimostrare il teorema precedente si possono usare gli esercizi nella prossima sezione.

Nota 2.210. *Questo modello di* $\mathbb{N}$ *soddisfa gli* Assiomi di Peano*; inoltre la relazione d'ordine soddisfa i principi richiesti in Ipotesi 3.25; dunque questo modello di* $\mathbb{N}$ *gode di tutte le proprietà presentate in Sez. §3: le diverse versioni del principio di induzione;* $(\mathbb{N}, \subseteq)$ *è bene ordinato; le definizioni per ricorsione; l'aritmetica; ecc.* [26K]

Quando vorremo confrontare questo modello con altri modelli, lo indicheremo con $\mathbb{N}_{ZF}$*.*

Le proprietà dell'insieme ordinato $\mathbb{N}, \subseteq$ sono dunque queste.

Proposizione 2.211. *Questo modello di* $\mathbb{N}$ *è un insieme bene ordinato dall'ordinamento* [26J]

$$n \leq m \iff n \subseteq m \quad .$$

Inoltre in questo modello si ha

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \in m \iff (n \subseteq m \wedge n \neq m) \quad . \tag{2.212}$$

dunque, definendo (come usuale)

$$n < m \doteq (n \leq m \wedge n \neq m)$$

possiamo scrivere

$$n \in m \iff n < m \quad .$$

Questo è dimostrato negli esercizi successivi, e in particolare in 2.220.

Per approfondimenti si veda negli appunti del corso (Cap. 1 Sez. 7 in [3]); o anche in [14],[13].

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§2.h.c Insiemi transitivi

Definizione 2.213. *Un insieme A si dice **transitivo** se valgono queste condizione equivalenti:* [24Z]

- $$\forall x, x \in A \Rightarrow x \subseteq A \quad ,$$
  cioè ogni elemento di A è anche un sottoinsieme di A;
- $$\forall x, \forall y, x \in y \wedge y \in A \Rightarrow x \in A \quad .$$

Esempio 2.214. *Esempi di insiemi transitivi sono:* [290]

$$\begin{aligned}
\{\} &= 0\\
\{\{\}\} &= 1,\\
\{\{\}, \{\{\}\}\} &= 2,\\
\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\{\}\}\}\},&\\
\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\{\}\}\}, \{\{\{\}\}\}\}\},&\\
&\dots\\
\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\} &= 3\\
\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\{\}\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\},&\\
&\dots.
\end{aligned}$$

Confrontando con 2.205 notate che vi sono insiemi transitivi che non sono numeri naturali.

Esercizi

E2.215 Se ogni elemento di A è un insieme transitivo, allora $x \in y$ è una relazione transitiva in A . (Notate che questo vale anche quando A non è un insieme transitivo). [25J]
Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '25K']`

E2.216 Dimostrate che per ogni $m \in \mathbb{N}$, m è un insieme transitivo. [257]

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '258']`

E2.217 `Prerequisiti:2.213,2.202,2.216.` [26N]

$\forall n, k \in \mathbb{N}$ se $n \in k$ allora $Sn \subseteq k$.

(Sugg: si può dimostrare senza induzione, usate il fatto che ciascun $n \in \mathbb{N}$ è un insieme transitivo).

E2.218 `Prerequisiti:2.217,2.72.` Per concludere il Teorema 2.208 dobbiamo dimostrare (2.209), cioè [26P]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \subseteq Sy \wedge x \neq Sy) \iff (x \subseteq y) \quad . \qquad (2.209)$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Dimostrate che se X è un insieme in cui ogni elemento è transitivo allora

$$\forall x, y \in X, (x \subseteq Sy \wedge x \neq Sy) \iff (x \subseteq y) \quad . \tag{2.219}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '26Q']

Gli esercizi precendenti dimostrano il Teorema 2.208, dopodiché dai risultati in Sez. §3 otteniamo che $(\mathbb{N}, \leq)$ è bene ordinato.

A seguire altri interessanti esercizi.

Esercizi

E2.220 Sappiamo da 2.210 che la relazione $n \subseteq m$ è totale in $\mathbb{N}$. Dimostrate che [269]

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \in m \iff (n \subseteq m \wedge n \neq m) \quad . \tag{2.212}$$

Per 2.96 questo implica

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \subseteq m \iff (n \in m \vee n = m) \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '26B']

E2.221 Mostrate questa affermazione [265]

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \neq \varnothing \Rightarrow \varnothing \in k \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '266']

E2.222 Prerequisiti:2.208,2.211.Dimostrate che [25D]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}\,,\ x \subseteq y \ \wedge\ x \neq y \Rightarrow Sx \subseteq y \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '279']

E2.223 Fissato $N \in \mathbb{N}$, consideriamo la relazione d'ordine $n \subseteq m$ per $n, m \in N$. Dato che $N \subseteq \mathbb{N}$ è bene ordinato, allora la Proposizione 2.211 implica che $(N, \subseteq)$ è bene ordinato; cionondimeno provate a dimostrare direttamente per induzione che $n \subseteq m$ è un buon ordinamento in N. [25W]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '25X']

E2.224 Dimostrate che [25Z]

$$\bigcup \mathbb{N} = \mathbb{N} \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '260']

§2.h.d Ordinali

Sfruttando i risultati precedenti, possiamo dare qualche cenno della teoria degli ordinali.

Definizione 2.225. *Un **ordinale** (secondo Von Neumann) è un insieme transitivo A tale che ogni suo elemento è un insieme transitivo.*

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E2.226 Prerequisiti: 2.72, 2.95. Se A è un insieme dove $\in$ è transitiva, definiamo [25Q]

$$x \leq y \doteq x \in y \vee x = y$$

si mostri che $x \leq y$ è una relazione d'ordine in A (possibilmente parziale).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '25S']

E2.227 Dimostrate che l'intersezione di insiemi transitivi è un insieme transitivo. [25B]

E2.228 Dimostrate che l'intersezione di ordinali è un ordinale. [25N]

E2.229 Dimostrate che se X è un ordinale e $A \in X$ allora A è un ordinale. [25M]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '25P']

E2.230 Usate l'assioma di buona fondazione 2.72 per mostrare che se A è transitivo e $A \neq \emptyset$ allora $\emptyset \in A$. [25G]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '25H']

E2.231 Dimostrare che $\mathbb{N}$ è un insieme transitivo. (Sugg.: usare l'induzione). [255]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '256']

Questo e 2.216 ci dicono che $\mathbb{N}$ è un ordinale.

E2.232 Sia X un ordinale e [26S]

$$P_x = \{z \in X, z \in x\}$$

mostrate che

$$\forall x, y \in X\,,\ P_x = P_y \Rightarrow x = y \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '26T']

(Notate la somiglianza con 3.30).

E2.233 Prerequisiti: 2.226, 2.72, 2.109, 2.240, 2.232. [26V]

Sia X un ordinale, definiamo

$$x \leq y \doteq x \in y \vee x = y$$

sappiamo da 2.226 che $x \leq y$ è una relazione d'ordine in X (possibilmente parziale). Si mostri che $x \leq y$ è un buon ordinamento.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '26W']

Nota 2.234. *Consideriamo di nuovo la proposizione 2.211 che afferma che $\mathbb{N}_{ZF}$ è ben ordinato dalla relazione $\subseteq$.* [275]

Sappiamo da 2.231 e 2.216 che $\mathbb{N}_{ZF}$ è un ordinale; potremmo essere tentati di vedere la proposizione 2.211 come corollario del risultato precedente 2.233.

Questo purtroppo non è un modo ben posto per dimostrare questo risultato, a causa di questa cascata di dipendenze:

- *la dimostrazione di 2.233 si basa sul risultato 2.109*
- *il risultato 2.109 a sua volta necessita di una definizione per ricorrenza di una funzione: questo è il Teorema 3.7*

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- *la dimostrazione del Teorema 3.7 usa il fatto che il principio di induzione vale in* $\mathbb{N}$.

Quindi dobbiamo prima dimostrare le proprietà di $\mathbb{N}_{ZF}$ *in modo indipendente della teoria degli ordinali, e quindi dimostrare i risultati in Sec. §3, e quindi alla fine possiamo dimostrare il risultato 2.233, che afferma che ogni ordinale è ben ordinato dalla relazione* $\subseteq$.

§2.i Buoni ordinamenti

[1YQ]

Definizione 2.235. [07R]

Un ordinamento totale $\leq$ *su un insieme* X *è un* ***buon ordinamento*** *se ogni sottoinsieme non vuoto di* X *ha un minimo.*

In particolare X *ha un minimo che indicheremo con* 0_X.

La teoria dei buoni ordinamenti è molto legata alla teoria degli ordinali, di cui abbiamo dato pochi cenni in Sez. §2.h.d. Ci limitiamo a dire che ogni ordinale è il rappresentante standard di un tipo di buon ordinamento. Usando la teoria standard degli ordinali (dovuta a Von Neumann) molti degli esercizi successivi si possono riformulare e semplificare. [222]

Nota 2.236. *Ricordiamo che l'estremo superiore* $\sup A$ *di* $A \subseteq X$ *è (per definizione) il minimo dei maggioranti (quando questo minimo esiste).* [07S]

(Svolto il 2023-01-17)

Se X *è bene ordinato si ha esistenza dell'estremo superiore* $\sup A$ *per ogni* $A \subseteq X$ *che sia superiormente limitato.* [†31] *(Se* A *non è superiormente limitato possiamo convenzionalmente decidere che* $\sup A = \infty$*).*

Esercizi

E2.237 Se $(X, \leq)$ è un insieme bene ordinato e $Y \subseteq X$ è un sottoinsieme, allora Y con (la restrizione de) l'ordinamento $\leq$ è un insieme bene ordinato. [07W]

E2.238 `Prerequisiti:3.7`. Sia X un insieme totalmente ordinato. Mostrate che sono equivalenti: [07X]

(Svolto il 2023-01-17)

(Proposto il 2022-12)

1. X è bene ordinato;
2. non esistono funzioni $f : \mathbb{N} \to X$ strettamente decrescenti.

(È un caso particolare di 2.109)

E2.239 `Prerequisiti:2.155,2.131,2.148,2.238.Difficoltà:*.Note:`*Esercizio 3 del compito del 29 Gennaio 2021.* [22F]

(Svolto il 2022-10-13 in parte)

Sia dato $(X, \leq_X)$ dove X un insieme infinito e $\leq_X$ è un buon ordinamento.

- Se X non ha massimo, allora esiste $(Y, \leq_Y)$ tale che posto $Z = Y \times \mathbb{N}$ con $\leq_Z$ l'ordinamento lessicografico, allora $(X, \leq_X)$ e $(Z, \leq_Z)$ hanno lo stesso tipo d'ordine.

[†31] "Superiormente limitato" vuol dire che esiste $w \in X$ tale che $x \leq w$ per ogni $x \in A$. Ciò equivale a dire che l'insiemi dei maggioranti di A è non vuoto!

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- Se invece X ha massimo, allora esistono $(Y, \leq_Y)$ e $k \in \mathbb{N}$ tale che, posto Z essere la concatenazione di $Y \times \mathbb{N}$ e di $\{0, \dots k\}$ (dove $Y \times \mathbb{N}$ ha l'ordinamento lessicografico, come sopra), allora $(X, \leq_X)$ e $(Z, \leq_Z)$ hanno lo stesso tipo d'ordine.
- Mostrate che, nei casi precedenti, Y è bene ordinato.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22G']

E2.240 Difficoltà:*. Sia dato l'insieme (parzialmente) ordinato $(X, \leq)$; definiamo [0DQ]

(Proposto il 2022-12)

$$P_x \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in X : w < x\} \quad .$$

supponiamo che $(X, \leq)$ soddisfi questi due requisiti:

- $$\forall x, y \in X\,,\ P_x = P_y \Rightarrow x = y$$
- ogni insieme non-vuoto $A \subseteq X$ contiene almeno un elemento minimale, cioè

$$\exists a \in A, \forall b \in A \neg(b < a) \quad ;$$

allora $(X, \leq)$ è bene ordinato.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '26R']

§2.i.a Successore

Definizione 2.241. *Sia X un insieme non vuoto bene ordinato. Supponiamo che $x \in X$ non sia il massimo, allora l'insieme dei maggioranti $\{y \in X : y > x\}$ non è vuoto, definiamo dunque l'elemento successore $S(x)$ di x come* [1ZO]

$$S(x) = \min\{y \in X : y > x\} \quad .$$

Esercizi

E2.242 Prerequisiti:2.241. [1Z1]

(Proposto il 2023-01-17)

Supponiamo che X non abbia massimo; sia S definito come in 2.241; si dimostri che è una funzione iniettiva

$$S : X \to X \quad ,$$

e che $S(x) \neq 0_X$, per ogni x (cioè, 0_X non è successore di nessun elemento).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '223']

Notiamo che in generale S non sarà surgettiva come funzione $S : X \to X \setminus \{0_X\}$: vi potrebbero essere altri elementi $y \in S, y \neq 0_X$ che non sono successori di alcun elemento. Se però, dato $y \in X$, esiste $x \in X$ per cui $y = S(x)$, diremo che *x è il **predecessore** di y*.

E2.243 Prerequisiti:2.241,2.242. Se $x \leq y \leq S(x)$ allora $y = x \vee y = S(x)$. [22H]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22J']

(Il senso di questo risultato è che $S(x)$ è l'immediato successore di x, non ci sta niente in mezzo...).

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§2.i.b Segmenti e buoni ordinamenti

Nel seguito $(X, \leq_X)$ sarà un insieme ben ordinato.

Definizione 2.244. *Un sottoinsieme non vuoto $S \subseteq X$ è un **segmento iniziale** se* $\forall x \in S, \forall y \in X,\ y < x \Rightarrow y \in S$. [07T]

Esercizi

E2.245 Mostrate che l'unione di segmenti iniziali è un segmento iniziale. [07Z]

E2.246 Se $S \subseteq X$ è un segmento iniziale e $S \neq X$, mostrate che esiste ed è unico $s \in X \setminus S$ (detto *l'elemento successivo* a S) che estende S, tale cioè che $S \cup \{s\}$ è un segmento iniziale. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '081'] (Si noti che vi sono analogie con il concetto di "successore" visto in 2.241...potremmo dire che s è il successore del segmento S). [080] *(Svolto il 2023-01-17)*

E2.247 Prerequisiti: 2.141, 2.142, 2.146. Sia X un insieme bene ordinato. Mostrate che se $I \subseteq X$ è un intervallo allora $I = [a, b)$ oppure $I = [a, b]$ oppure $I = [a, \infty)$ con $a, b \in X$. (Il viceversa è ovviamente vero). [082] *(Svolto il 2023-01-17)*

In particolare un segmento iniziale è $[0_X, b)$ o $[0_X, b]$ oppure tutto X. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '083']

E2.248 Siano $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ insiemi non vuoti totalmente ordinati. Sia $f : X \to Y$ una funzione bigettiva strettamente crescente. Allora per ogni $S \subseteq X$ segmento iniziale si ha che $f(S)$ è un segmento iniziale di Y; e viceversa. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '085'] [084]

E2.249 Prerequisiti:2.238,3.7,2.148. [086]

Sia $(X, \leq_X)$ un insieme non vuoto bene ordinato. Mostrate che se $S \subseteq X$ è un segmento iniziale e $(X, \leq_X)$ e $(S, \leq_X)$ sono equiordinati dalla mappa $f : S \to X$ allora $X = S$ e f è l'identità.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '087'][UNACCESSIBLE UUID '088']

(Notate la differenza con la teoria delle cardinalità: un insieme infinito è in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria, *cf* 2.292 e 2.295. Inoltre se due insiemi hanno la stessa cardinalità allora vi sono molte bigezioni fra essi.)

E2.250 Date un esempio di un insieme totalmente ordinato $(X, \leq_X)$ che ha minimo, e di un segmento iniziale S tali che $(X, \leq_X)$ e $(S, \leq_X)$ sono equiordinati. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08B'] [089] *(Svolto il 2023-01-17)*

E2.251 Prerequisiti:2.249. Siano $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ bene ordinati; supponiamo che esista $f : X \to T$ funzione bigettiva monotona strettamente crescente, dove T un segmento iniziale di Y; allora f è unica (e unico è T). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08D'] [08C] *(Proposto il 2022-12)*

E2.252 Prerequisiti:2.182, 2.245, 2.248, 2.246, 2.251. [08F]

Siano dati due insiemi non vuoti bene ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$. Mostrate che

1. esiste un segmento iniziale S di X e una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $g : S \to Y$; oppure [†32]

[†32] Le due condizioni possono anche valere entrambe, nel qual caso X, Y hanno lo stesso tipo di ordine.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

2. esiste un segmento iniziale T di Y e una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $g : X \to T$.

Nel primo caso scriveremo che $(Y, \leq_Y) \preceq (X, \leq_X)$, nel secondo che $(X, \leq_X) \preceq (Y, \leq_Y)$. (Notate che nel primo caso si ha $|Y| \leq |X|$ e nel secondo $|X| \leq |Y|$). Per l'esercizio precedente la mappa g e il relativo segmento sono uniche.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '08G']

E2.253 Prerequisiti:2.252. Mostrate che se $(X, \leq_X) \preceq (Y, \leq_Y)$ e anche $(Y, \leq_Y) \preceq (X, \leq_X)$, allora sono *equiordinati*. [08H]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '08J']

La relazione $\preceq$ è dunque una relazione di ordine totale fra tipi di buoni ordinamenti.

§2.i.c Esempi

Esercizi

E2.254 Prerequisiti:2.134. Il tipo di buon ordinamento di $\mathbb{N}$ è chiamato ω. Dato $k \geq 2$ naturale, $\mathbb{N}^k$ dotato dell'ordinamento lessicografico è un insieme bene ordinato (per 2.134), e il suo tipo di buon ordinamento è chiamato ω^k. Mostrate che $\omega^k \preceq \omega^h$ per $h > k$, e che ω^k, ω^h non hanno lo stesso tipo d'ordine. [08K]

E2.255 Difficoltà:*. Costruite un buon ordinamento su un insieme numerabile X tale che $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ dove S_n sono segmenti iniziali, ciascuno con tipo di ordinamento ω^n. L'ordinamento così costruito su X si indica con ω^ω. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08N'] [08M]

E2.256 Difficoltà:*. Costruite una mappa crescente fra ω^ω e $\mathbb{R}$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '08Q'] [08P]

§2.j Cardinalità [1YW]

Per comodità useremo il simbolo $|A|$ per indicare la cardinalità dell' insieme A. Questo simbolo si usa come segue. Dati due insiemi A, B, scriveremo $|A| = |B|$ se gli insiemi sono **equipotenti** (o anche **equinumerosi**), cioè se esiste una funzione bigettiva fra A e B; scriveremo $|A| \leq |B|$ se esiste una funzione iniettiva da A a B. Scriveremo anche $|A| < |B|$ se esiste una funzione iniettiva da A a B, ma non una bigezione. Se assumiamo vero l'assioma della scelta allora per ogni coppia di insiemi si ha sempre $|A| \leq |B|$ oppure $|B| \leq |A|$ (si veda 2.276). [22B]

Proposizione 2.257. *Se ora fissiamo una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi di interesse, definiamo innanzitutto la relazione $A \sim B \iff |A| = |B|$; si mostra che questa è una relazione di equivalenza; dunque si ottiene che $|A| \leq |B|$ è un ordinamento totale in $\mathcal{F}/\sim$.* [1Z9]

Dimostrazione. Questo deriva dalla Proposizione 2.191, in quanto la relazione

$$ARB \iff |A| \leq |B|$$

è riflessiva e transitiva, e per il Teorema di Cantor–Bernstein

$$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \iff A \sim B \quad .$$

□

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Nel seguito, sia $E_0 = \emptyset$ oppure $E_n = \{1, \dots n\}$ se $n \geq 1$.

Lemma 2.258. *Se $n, m \in \mathbb{N}, n < m$ allora $|E_n| < |E_m|$. Per la dimostrazione si può vedere il Lemma 1.12.1 degli appunti [3].* [2GK]

Definizione 2.259. *Per definizione* [†33] "un insieme A è **finito** e ha cardinalità n" *se è equipotente a un'insieme E_n (per una scelta di $n \in \mathbb{N}$; vi è al più un n per cui questo può avvenire, per via del il Lemma precedente). Dunque quando l'insieme è finito, $|A|$ si identifica con il numero (naturale) dei suoi elementi, scriveremo $|A| = n$. Se un insieme non è finito, allora è **infinito**.* [1B1]

Notiamo che la mappa nulla $f : \emptyset \to \emptyset$ è una bigezione; e $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$. Il risultato seguente è fondamentale.

Esercizio 2.260. *Dimostrate che $\mathbb{N}$ è infinito, e che $|\mathbb{N}| > n, \forall n \in \mathbb{N}$.* Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2GJ'] [2GH]

Ricordiamo il Teorema 1.12.2 degli appunti [3], per comodità.

Teorema 2.261. *Se A è infinito, allora $|A| \geq |\mathbb{N}|$. In particolare, $|A| > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.* [02S]

Definizione 2.262. *Un insieme A equipotente a $\mathbb{N}$ si dice **numerabile**;* [†34] *un tale insieme è infinito (per il risultato 2.260 sopra riportato). Diremo che un insieme A ha cardinalità **al più numerabile** se è finito o numerabile.* [2DD]

§2.j.a Insiemi finiti

Esercizi

E2.263 Sia A un insieme finito, e $B \subseteq A$, mostrate che B è finito. [02T]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '02V']

E2.264 Supponiamo di avere un numero finito $m \geq 1$ di insiemi $A_1, \dots, A_m$ tutti finiti. Mostrate che $\bigcup_{j=1}^{m} A_j$ è un insieme finito. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '02X'] [02W]

E2.265 Ricordiamo che A^B è l'insieme di tutte le funzioni $f : B \to A$. Se A, B sono insiemi finiti nonvuoti mostrate che $|A^B| = |A|^{|B|}$. Cosa succede se uno, o entrambi, sono vuoti? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '022'] [02Y]

E2.266 Se A, B sono insiemi finiti nonvuoti, calcolate la cardinalità dell'insieme delle funzioni $f : B \to A$ iniettive; e la cardinalità di quelle surgettive. Cosa succede se uno, o entrambi, dei due insiemi A, B sono vuoti? [22K]

§2.j.b Confronto

Esercizi

E2.267 Prerequisiti: 2.178. Supponiamo che A non sia vuoto. Si ha $|A| \leq |B|$ se e solo se esiste una funzione surgettiva $f : B \to A$. (L'implicazione "se" necessita dell'assioma della scelta; si veda anche 2.82). [030]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E2.268 Mostrate che se $|A_1| \leq |A_2|$ e $|B_1| \leq |B_2|$ allora $|A_1 \times B_1| \leq |A_2 \times B_2|$. [031]

E2.269 Mostrate che se $|A_1| \leq |A_2|$ e $|B_1| \leq |B_2|$ allora $|A_1^{B_1}| \leq |A_2^{B_2}|$ *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '033'] [032]

E2.270 Mostrate che $|(A^B)^C| = |A^{(B\times C)}|$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '035'] [034]

E2.271 Sia I una famiglia di indici e B_i, A_i insiemi, per $i \in I$, con $|A_i| \leq |B_i|$; supponiamo che gli insiemi B_i siano a due a due disgiunti; si mostri allora che *(Svolto il 2022-10-27)* [036] *(Svolto il 2023-01-24)*

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \left|\bigcup_{i\in I} B_i\right| .$$

(Secondo voi è possibile dimostrare questo risultato senza usare l'assioma della scelta, almeno nel caso in cui I è numerabile?) *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '037']

E2.272 Sia C un insieme, I una famiglia di indici e siano B_i insiemi per $i \in I$; supponiamo che gli insiemi B_i siano a due a due disgiunti; sia $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} B_i$ per comodità; si mostri allora che [038]

$$\forall i, |B_i| \leq |C| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{B}| \leq |I \times C| \tag{2.273}$$
$$\forall i, |B_i| \geq |C| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{B}| \geq |I \times C| \quad . \tag{2.274}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '039']

E2.275 Sia C un insieme, I una famiglia di indici e siano B_i insiemi per $i \in I$ con $|B_i| = |C|$; si mostri allora che [03C]

$$|\mathcal{B}| = |C^I|$$

dove $\mathcal{B} = \prod_{i\in I} B_i$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '03D']

E2.276 Prerequisiti:2.182. Mostrate che le cardinalità sono sempre confrontabili, cioè che dati due insiemi A, B si ha sempre o $|A| \leq |B|$ o $|B| \leq |A|$. (Usate il lemma di Zorn e la costruzione spiegata nell'esercizio 2.182). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '03G'] [03F] *(Proposto il 2022-12)*

Questo enunciato è equivalente all' Assioma della Scelta, si veda [22].

§2.j.c Cardinalità numerabile

Definizione 2.277. *Ricordiamo che un insieme è "numerabile" se ha la stessa cardinalità di* $\mathbb{N}$. [2DF]

Se A è numerabile, esiste $a : \mathbb{N} \to A$ bigettiva; scrivendo a_n invece di $a(n)$, diremo dunque che $A = \{a_0, a_1, a_2 ...\}$ è una ***enumerazione****.*

Esercizi

E2.278 Trovato un polinomio $p(x, y)$ che, visto come funzione $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sia bigettivo. Se ne ricava, iterando, che esiste un polinomio q_k in k variabili bigettivo $q_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Dunque $\mathbb{N}^k$ è numerabile. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '03J'][UNACCESSIBLE UUID '03K'] [03H]

[†33]Questa è la definizione presentato nel corso. Esistono anche altre definizioni di "insieme finito" [17]. Vedete ad esempio l'esercizio 2.295

[†34]Attenzione, in Inglese il termine *countable* si usa per insiemi finiti o numerabili; per indicare un insieme numerabile si deve dire **countably infinite**.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E2.279 Mostrate che gli insiemi $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sono numerabili. [03M]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '03N']

E2.280 Prerequisiti: 2.271,2.278. [03P]

Siano $A_0, A_1 \dots A_n \dots$ insiemi al più numerabili, per $n \in \mathbb{N}$.

Si mostri che $B = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ è al più numerabile.

Notate che B è numerabile se ad esempio vi è almeno un n per cui A_n è numerabile.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '03Q']

E2.281 Indichiamo con $\mathcal{P}_{\dagger}(A)$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subseteq A$ che sono insiemi finiti. Questo è detto colloquialmente *l'insieme delle parti finite*. [03R]

Si mostri che $\mathcal{P}_{\dagger}(\mathbb{N})$ è numerabile.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '03S']

Questo risultato vale in generale, si veda 2.303.

§2.j.d Cardinalità del continuo

Definizione 2.282. *Diremo che un insieme ha cardinalità del continuo se ha la stessa cardinalità di* $\mathbb{R}$. [03V]

Nota 2.283. *Cantor dimostrò che* $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. *Successivamente Cantor formulò (nel 1878) l'*ipotesi del continuo *CH: per ogni insieme infinito* $E \subseteq \mathbb{R}$, *si ha che* $|E| = |\mathbb{R}|$ *oppure* $|E| = |\mathbb{N}|$. *Per molti anni i matematici provarono a dimostrare CH (o la sua negazione). Ci vollero decenni per capire che questo non è possibile. Oggi sappiamo che, assumendo che la teoria ZF sia consistente, allora né CH né la negazione di CH possono essere dimostrati come teoremi in ZF (anche usando l'Assioma della scelta). La seconda parte dell'asserzione fu dimostrata da Gödel in 1939. La prima parte da Cohen nel 1963. Si veda nel Cap. 6 in [13].* [2F2]

Esercizi

E2.284 Spiegate come potreste costruire esplicitamente una bigezione fra $[0,1)$ e $[0,1)^2$. [03X]

E2.285 Mostrate con costruzioni esplicite che i seguenti insiemi hanno cardinalità del continuo: [03Y]

$$[0,1], \quad [0,1), \quad (0,1), \quad (0,\infty) \ .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '03Z']

(Proposto il 2022-12)

(Proposto il 2022-10-13)

(Svolto il 2022-10-27)

E2.286 Prerequisiti:2.293, 2.270, 2.269. [040]

Mostrate che i seguenti insiemi hanno cardinalità del continuo.

$$\mathbb{R}^n, \quad \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '041'][UNACCESSIBLE UUID '042']

E2.287 Prerequisiti:2.271,2.286.Siano A_t insiemi con cardinalità minore o uguale al continuo, per $t \in \mathbb{R}$. Si mostri che $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t$ ha cardinalità del continuo. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '044'] [043]

E2.288 Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subseteq \mathbb{R}$ che sono insiemi finiti o numerabili; si mostri che $\mathcal{A}$ ha cardinalità del continuo. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '046'] [045]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§2.j.e In generale

Aggiungiamo alcuni esercizi di carattere più generale.

Esercizi

E2.289 Mostrate che $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '049'] [048]

E2.290 Considerate l'insieme $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; e il sottoinsieme $\mathcal{A}$ delle f che possono essere definite usando un algoritmo, scritto in un linguaggio di programmazione a piacere, supponendo inoltre che il computer che lo esegue abbia una memoria potenzialmente illimitata, e tale che per ogni scelta $n \in \mathbb{N}$ in input l'algoritmo deve terminare e restituire $f(n)$. Confrontate le cardinalità di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e di $\mathcal{A}$. [04B]

E2.291 Calcolate la cardinalità dell'insieme $\mathcal{F}$ delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ debolmente descrescenti. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '04F'] [04D] *(Proposto il 2022-12)*

E2.292 Prerequisiti:3.7. [04G]

Un insieme A è detto *Dedekind–infinito* se è in bigezione con una sua parte propria cioè se esiste $B \subset A, B \neq A$ e $h : A \to B$ bigezione. Mostrate che un insieme A è *Dedekind–infinito* se e solo se esiste una funzione iniettiva $g : \mathbb{N} \to A$. (Questo risultato non necessita dell'assioma della scelta).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '04H']

E2.293 Prerequisiti:2.261.Se A è infinito e B è finito o numerabile mostrate che $|A| = |A \cup B|$ usando l'esistenza di una funzione $g : \mathbb{N} \to A$ iniettiva. [04J]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '04K']

E2.294 Prerequisiti:2.264,2.293.Similmente se A è infinito e B è finito mostrate che $|A| = |A \setminus B|$ usando il fatto che per ogni insieme infinito X esiste una funzione $g : \mathbb{N} \to X$ iniettiva. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '22N'] [22M]

E2.295 Prerequisiti:2.261, 2.292. Mostrate che un insieme A è *Dedekind–infinito* se e solo se è infinito (secondo la definizione vista all'inizio del capitolo). [04M]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '04N']

Nota: secondo [11], la precedente equivalenza non può essere dimostrata usando solo gli assiomi di ZF (Zermelo–Fraenkel senza l'assioma della scelta) ; la precedente equivalenza può essere dimostrata usando gli assiomi di ZFC (Zermelo–Fraenkel con l'assioma della scelta); ma la sua validità in ZF è più debole dell'assioma della scelta.

E2.296 Prerequisiti:2.293,2.182.Difficoltà:*. [04P]
Sia X infinito. Mostrate che X si partiziona in due insiemi X_1, X_2 che hanno la stessa cardinalità di X. *(Sugg. considerate sottoinsiemi di X su cui la proprietà vale, usate Zorn) Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '04Q'] *(Proposto il 2022-12)*

E2.297 Prerequisiti:2.296,2.278,2.239.Difficoltà:*. [04R]

Sia A infinito. Mostrate che $|D \times A| = |A|$ per ogni insieme nonvuoto D finito o numerabile. [†35] *(Svolto il 2022-10-13 in parte)*

[†35] Equivalentemente, mostrate che esiste una partizione U di A tale che ogni parte $B \in U$ ha cardinalità $|B| = |A|$, e la famiglia U delle parti ha cardinalità $|U| = |D|$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

(Una possibile soluzione usa 2.296) *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '04S']

(Un'altra possibile soluzione usa il teorema di Zermelo, 2.239 e 2.278; in questo caso 2.296 diviene un corollario di questo risultato.) *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '04T']

E2.298 Siano A, B infiniti. Mostrate che $|A \cup B| = \max\{|A|, |B|\}$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '04W'] [04V] *(Svolto il 2022-10-27)*

E2.299 Mostrate che se A è un insieme infinito, e si decompone nell'unione disgiunta di due insiemi A_1, A_2 con $|A_1| \leq |A_2|$ allora $|A| = |A_2|$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '04Y'] [04X]

E2.300 Prerequisiti:2.182, 2.297.Difficoltà:**. [04Z] *(Proposto il 2022-10-13)* *(Svolto il 2022-11-15)*

Siano A, B infiniti. Mostrate che $|A^2| = |A|$.

Usate questo risultato per mostrare che se A, B sono nonvuoti e almeno uno è infinito allora $|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '050']

Si veda inoltre la nota 2.301.

Nota 2.301. *Note storiche.* [27H]

- *La proposizione "$|A^2| = |A|$ vale per ogni insieme infinito" è equivalente all'assioma della scelta. Questo fu dimostrato da Tarski [24] nel 1928; l'articolo è online e scaricabile e contiene altre sorprendenti equivalenze. Si veda anche [22] Parte 1 Sezione 7 pagina 140 asserzione CN6.*

- *Jan Mycielski [19] riporta:* «Tarski told me the following story. He tried to publish his theorem (stated above) in the *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* but Fréchet and Lebesgue refused to present it. Fréchet wrote that an implication between two well known propositions is not a new result. Lebesgue wrote that an implication between two false propositions is of no interest. And Tarski said that after this misadventure he never tried to publish in the Comptes Rendus».

  Questo aneddoto ci mostra quanto (prima dei lavori di Godel e Cohen [6]), anche i matematici più importanti non capissero l'importanza dell'assioma della scelta.

Esercizi

E2.302 Prerequisiti:2.300. Sia A infinito. Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Mostrate che $|A^n| = |A|$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '052'] [051]

E2.303 Prerequisiti:2.271, 2.302, 2.300. Sia A infinito. Si mostri che l'insieme delle parti finite $\mathcal{P}_{\dagger}(A)$ ha la stessa cardinalità di A. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '054'] [053] *(Proposto il 2022-12)* *(Svolto il 2023-01-24)*

E2.304 Prerequisiti: 2.272, 2.300. Sia X un insieme infinito, sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X, siano $U = X/\sim$ le classi di equivalenza. [055] *(Svolto il 2023-01-24)*

- Supponiamo che ogni classe sia finita, mostrate che $|U| = |X|$.
- Supponiamo che U sia infinito e ogni classe abbia cardinalità al più $|U|$, allora $|U| = |X|$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '056']

E2.305 Prerequisiti:2.83,2.303,2.304.Difficoltà:**. [057]

Sia V uno spazio vettoriale reale. Siano A, B due basi di Hamel (si veda 2.83). Si mostri che $|A| = |B|$. (Questo risultato è noto come "*Teorema della dimensione*")

Più in generale, siano $L, G \subseteq V$, dimostrate che, se i vettori in L sono linearmente indipendenti e se G genera V, allora $|L| \leq |G|$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '058']

Altri esercizi interessanti sono 9.98, 9.7.

§2.j.f Potenza

Ricordiamo che A^B è l'insieme di tutte le funzioni $f : B \to A$. Scriveremo $|2^A|$ per indicare la cardinalità dell'insieme delle parti di A.

Esercizi

E2.306 Prerequisiti:2.300. Siano A, B insiemi non vuoti e tali che A è infinito e $2 \leq |B| \leq |A|$ allora $|B^A| = |2^A|$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '05K'] [05J] *(Proposto il 2022-12)*

E2.307 Siano A, B insiemi non vuoti, supponiamo che esista un insieme C tale che $|B| = |2^C|$ allora $|B^A| = \max\{|B|, |2^A|\}$. [05M]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '05N']

In generale nel caso in cui $|B| > |A|$ lo studio della cardinalità di $|B^A|$ è molto complesso (anche in casi apparentemente semplici come $A = \mathbb{N}$).

§2.k Operazioni su insiemi [1YX]

Esercizi

E2.308 Sia X un insieme non vuoto, e $A \subseteq X$. Indicheremo con $A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$ il complementare di A in X. [05R]

Definiamo la funzione caratteristica $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{Z}$ come

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

Si dimostri che

$$\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A \ , \ \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \ , \ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

E2.309 Consideriamo ora invece la funzione caratteristica definita come prima, ma considerata come $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{Z}_2$ cioè a valori nel gruppo delle classi resto $\mathbb{Z}_2$ (più correttamente indicato come $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). [05S]

In questo caso le precedenti si possono scrivere come

$$\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_A + 1 \ , \ \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \ , \ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \, .$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Ricordiamo la definizione della differenza simmetrica $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, si mostri che questa si scrive come

$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \ .$$

Con queste regole di calcolo si mostri che

$$A\Delta B = B\Delta A \ , \ (A\Delta B)^c = A\Delta(B^c) = (A^c)\Delta B \ , \ A\Delta B = C \iff A = B\Delta C$$

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C) \ , \ A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(A^c \cap C)$$

E2.310 Siano A, B, C insiemi, allora [05T]

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \ ,$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \ .$$

Dunque l'operazione di prodotto cartesiano è distributiva sull'unione e la intersezione.

E2.311 Se A, B, C sono insiemi non vuoti e [05V]

$$(A \times B) \cup (B \times A) = (C \times C)$$

allora $A = B = C$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '05W']

E2.312 Dati quattro insiemi X, Y, A, B con $A \subset X, B \subset Y$, scrivete [05X]

$$(X \times Y) \setminus (A \times B)$$

come unione di tre insiemi a due a due disgiunti, ciascuno un prodotto cartesiano.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '05Y']

E2.313 Vogliamo riscrivere le tautologie viste in 2.10 sotto forma di relazioni insiemistiche. [05Z]

Sia X un insieme e siano $\alpha, \beta, \gamma \subseteq X$ sottoinsiemi. Sia $x \in X$. Se definiamo $A = (x \in \alpha)$, $B = (x \in \beta)$, $C = (x \in \gamma)$ nelle tautologie, potremo poi riscrivere la tautologia come una formula fra insiemi $\alpha, \beta, \gamma, X, \emptyset$, che usi i connettivi $=, \cap, \cup$ e il complementare.

Sorprendentemente, la riscrittura può essere effettuata algoritmicamente e in maniera puramente sintattica. Scegliete una tautologie vista in 2.10. Nel seguito φ, ψ indicano sottoparti della tautologia che sono formule ben formate.

- Sostituite $((\varphi) \Rightarrow (\psi))$ con $((\neg(\varphi)) \vee (\psi))$ (otterrete un'altra tautologia).
- Poi sostituite sintatticamente $\neg(\varphi)$ con $(\varphi)^c$, $\vee$ con $\cup$ e $\wedge$ con $\cap$; sostituite A con α, B con β, C con γ, V con X e F con $\emptyset$.
- Infine, se la formula contiene almeno un " $\iff$ ", trasformateli tutti in "="; altrimenti aggiungete "$= X$" alla fine.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Verificate che questo “algoritmo” funziona davvero!

E2.314 Sia X un insieme. Siano I, J famiglie non vuote di indici, e per ogni $i \in I$ sia $J_i \subseteq J$ una famiglia non vuota di indici. Per ogni $i \in I$, $j \in I_j$ sia $A_{i,j} \subseteq X$. Si mostri che [060]

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i} A_{i,j} = \bigcup_{\beta\in B}\bigcap_{i\in I} A_{i,\beta(i)}$$

dove $B = \prod_{i\in I} J_i$ e ricordiamo che ogni $\beta \in B$ è una funzione $\beta : I \to J$ per cui per ogni i si ha $\beta(i) \in J_i$. Formulate poi una simile regola scambiando il ruolo intersezione e unione (usate i complementari degli insiemi $A_{i,j}$ e le regole di de Morgan).
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '061']

§2.k.a Limsup e liminf di insiemi

Definizione 2.315. *Dati $A_1, A_2 \ldots$ insiemi , per $n \in \mathbb{N}$, definiamo* [1Z2]
(Svolto il 2022-11-29)

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \overset{def}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \tag{2.316}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \overset{def}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \tag{2.317}$$

(2.318)

Supponiamo che $A_n \subseteq X$ per ogni n. (Possiamo porre $X = \bigcup_n A_n$).

Esercizi

E2.319 Ricordiamo che [063]

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$$

è il complementare di A in X (come già definito in 2.42).. Mostrate che

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty}(A_n^c) \ .$$

E2.320 Prerequisiti:3.56. Mostrate che [064]

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ frequentemente in } n\} \ , \tag{2.321}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ definitivamente in } n\} \ . \tag{2.322}$$

(“Frequentemente” e “definitivamente” sono discussi in Sez. §3.g).

E2.323 Prerequisiti:2.320, 3.61. Dati $A_1, A_2 \ldots$ e $B_1, B_2 \ldots$ insiemi, per $n \in \mathbb{N}$, dite se vi è una relazione (di uguaglianza o di contenimento) fra [065]

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n) \cap (\liminf_{n\to\infty} B_n) \overset{?}{=} \liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \ , \tag{2.324}$$

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n) \cup (\liminf_{n\to\infty} B_n) \overset{?}{=} \liminf_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) \ . \tag{2.325}$$

Se non si ha uguaglianza, mostrate un esempio. Usate poi 2.319 per stabilire simili regole per il $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '066']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§2.l Combinatoria

Esercizi

E2.326 Siano dati n, k naturali con $k \geq 1$. Quante diverse scelte di vettori $(j_1, \dots j_k)$ di numeri naturali vi sono per cui $j_1 + \cdots + j_k = n$? Quante diverse scelte di vettori $(j_1, \dots j_k)$ di numeri naturali positivi vi sono per cui $j_1 + \cdots + j_k = n$? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '09P'] [09N]

E2.327 Siano n, m interi positivi e siano $I = \{1, \dots, n\}, J = \{1, \dots m\}$. [09Q]

- Quante sono le funzioni $f : I \to J$?
- Quante sono le funzioni $f : I \to J$ iniettive?
- Quante sono le funzioni $f : I \to J$ strettamente crescenti?
- Quante sono le funzioni $f : I \to J$ debolmente crescenti?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '09R']

Si veda anche l'esercizio 2.265.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§3 Numeri naturali

[1X9]

Vogliamo propriamente definire l'insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

dei numeri naturali.

Un possibile modello, come mostrato in Sez. §2.h, è ottenuto appoggiandosi alla teoria di Zermelo–Fraenkel.

Qui invece presentiamo gli assiomi di Peano, espressi usando la *versione intuitiva* della teoria degli insiemi.

Definizione 3.1 (Assiomi di Peano)**.** [1XB]

(Svolto il 2022-11-03)

(N1) *Esiste un numero* $0 \in \mathbb{N}$.

(N2) *Esiste una funzione* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *(chiamata "successore"), tale che* [†36]

(N3) $S(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{N}$ *e*

(N4) S *è iniettiva, cioè* $x \neq y$ *implica* $S(x) \neq S(y)$.

(N5) *Se* U *è un sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *tale che:* $0 \in U$ *e* $\forall x, x \in U \Rightarrow S(x) \in U$ *, allora* $U = \mathbb{N}$.

Spesso scriveremo Sn *invece di* $S(n)$ *per semplicità.*

Dai precedenti seguono subito due importanti proprietà. Uno è il principio di induzione, si veda 3.4. L'altro è lasciato per esercizio.

Esercizio 3.2. *Mostrate che ogni* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \neq 0$ *è successore di un altro* $k \in \mathbb{N}$, *dimostrando per induzione su* n *questa proposizione* [1YP]

$$P(n) \stackrel{def}{=} (n = 0) \vee (\exists k \in \mathbb{N}, S(k) = n) \quad .$$

Questo dimostra che la funzione successore

$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

è bigettiva.

Se $n \neq 0$ *chiameremo* $S^{-1}(n)$ *il* ***predecessore*** *di* n.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22Q']

(Parte di questo risultato vale più in generale, si veda in 2.242)

L'idea è che la funzione successore codifica gli usuali numeri secondo lo schema

$$1 = S(0), \quad 2 = S(1), \quad 3 = S(2) \ldots$$

e (avendo definito l'addizione) si avrà che $S(n) = n + 1$.

Esercizio 3.3. *Prerequisiti:3.3.Togliendo a turno uno degli assiomi (N1)—(N5), descrivete un insieme che soddisfa gli altri ma non è isomorfo ai naturali.* [1XD]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '22V']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§3.a Induzione [27J]

Proposizione 3.4 (Principio di induzione)**.** *Sia $A \supseteq \mathbb{N}$ e $P(n)$ una proposizione logica che possa essere valutata per $n \in A$. Supponiamo siano soddisfatte le due seguenti ipotesi:* [1XC]

- *$P(n)$ è vera per $n = 0$ e*
- *$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(S(n))$;*

allora P è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Sia $U = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$ sappiamo che $0 \in U$ e che $\forall x, x \in U \Rightarrow S(x) \in U$, allora da (N5) si conclude $U = \mathbb{N}$. □

La verifica di $P(0)$ è detta "base dell'induzione", mentre la verifica $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(S(n))$ è detta "passo induttivo" (in cui $P(n)$ viene presa come ipotesi, e viene detta "ipotesi induttiva").

Esercizi

E3.5 Dimostrate che $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq S(n)$. [1XF]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1XJ']

E3.6 Dimostrate [†37] per induzione le seguenti asserzioni: [1XG]

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$;
5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$;
6. $n! \geq 2^{n-1}$;
7. Se $x > -1$ è un numero reale e $n \in \mathbb{N}$ allora $(1+x)^n \geq 1+nx$ (diseguaglianza di Bernoulli).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1XK']

§3.b Definizione per ricorrenza [274]

Teorema 3.7. [08Z]

Sia A un insieme non vuoto; sia $a \in A$ fissato, siano date funzioni $g_n : A \to A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste ed è unica la funzione $f : \mathbb{N} \to A$ tale che

- *$f(0) = a$, e*

[†36] Stiamo usando la stessa parola *successore* usata per la definizione 2.241 per gli insiemi bene ordinati, e in 2.193 nella teoria di Zermelo-Fraenkel: vedremo che infatti le definizioni sono compatibili.

[†37] Nei successivi esercizi diamo per buona la conoscenza delle operazioni tipiche dei numeri naturali, e della loro relazione d'ordine.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha* $f(S(n)) = g_n(f(n))$.

Si dice che la funzione f *è* ***definita per ricorrenza*** *dalle due precedenti condizioni.*

Dimostrazione. Traccia della dimostrazione. Notate che la dimostrazione usa solo gli assiomi di Peano e il principio di induzione. Dato $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$ ricordiamo che $S^{-1}(m)$ è il precedessore, si veda 3.2 (usando l'aritmetica potremmo scrivere [090]

$$S^{-1}(m) = m - 1 \ , \ \ S(k) = k + 1$$

ma questo teorema è usato nel definire l'aritmetica...) Data una qualunque $R \subseteq \mathbb{N} \times A$ definiamo la proiezione sulla prima componente

$$\pi(R) = \{n \in \mathbb{N}, \exists x \in A, (n, x) \in R\} .$$

Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ delle relazioni $R \subseteq \mathbb{N} \times A$ che soddisfano

$$(0, a) \in R \tag{*}$$

$$\forall n \geq 0, \forall y \in A, \ \ (n, y) \in R \Rightarrow (S(n), g_n(y)) \in R \tag{**}$$

Mostriamo che sotto queste condizioni $\pi(R) = \mathbb{N}$; sappiamo che $0 \in \pi(R)$; se $m \in \pi(R)$, allora esiste $x \in A$ per cui $(m, x) \in R$ ma allora da ** segue che $(S(m), g_m(x)) \in R$, e otteniamo $S(m) \in \pi(R)$.

La famiglia $\mathcal{F}$ è non vuota perché $\mathbb{N} \times A \in \mathcal{F}$. Sia poi T l'intersezione di tutte le relazioni in $\mathcal{F}$. T è dunque la minima relazione in $\mathcal{F}$.

Si può verificare che T soddisfa le precedenti proprietà * e **. In particolare $\pi(T) = \mathbb{N}$.

Dobbiamo ora mostrare che T è il grafico di una funzione (che è la funzione f desiderata), cioè che per ogni n esiste un unico $x \in A$ per cui $(n, x) \in T$.

Sia $A_n = \{x \in A, (n, x) \in T\}$; scriviamo $|A_n|$ per indicare il numero di elementi in $|A_n|$; siccome $\pi(T) = \mathbb{N}$ allora $|A_n| \geq 1$ per ogni n. Mostreremo che $|A_n| = 1$ per ogni n. Lo dimostreremo per induzione. Sia

$$P(n) \doteq |A_n| = 1 \quad .$$

Verifichiamo il passo induttivo.

Supponiamo per assurdo che $|A_m| = 1$ ma $|A_{Sm}| \geq 2$; moralmente in m il grafico della f "biforca" e la funzione diventa "multivoca". Definiamo per comodità $w = g_m(x), k = Sm$; potremmo togliere alcuni elementi a T (quelli che non hanno un "predecessore" secondo la relazione **) definendo

$$\tilde{T} = T \setminus \{(k, y) : y \in A, y \neq w\}$$

si mostra che $\tilde{T}$ soddisfa * e **, ma $\tilde{T}$ sarebbe più piccola di T, contro la minimalità di T. Per provare che $P(0)$, si definisce $k = 0, w = a$ e si procede allo stesso modo.

Il precente ragionamento mostra anche che la funzione è unica, perché se il grafico G di una qualsiasi funzione soddisfacente a * e ** deve contenere T, allora $T = G$. □

Più in generale date $g_n : A^{n+1} \to A$*, si mostra che esiste ed è unica la funzione* $f : \mathbb{N} \to A$ *tale che* $f(0) = a$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha* $f(S(n)) = g_n(f(0), f(1), \ldots f(n))$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E3.8 Prerequisiti: 3.7. Adattate l'esercizio 3.7 per definire la *successione di Fibonacci*, che soddisfa alla regola [1X7]

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

per $n \geq 2$.

Sugg. Non dovete riscrivere tutta la dimostrazione di 3.7, piuttosto scegliete $A = \mathbb{N}^2$ e scegliete g con astuzia.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1X8']

E3.9 Definite l'intervallo di numeri naturali [294]

$$I_n = \{0, \dots n\}$$

usando una definizione ricorsiva (senza fare uso di una relazione d'ordine)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '295']

§3.c Aritmetica [0NN]

Definiremo l'operazione di addizione fra numeri naturali, formalmente

$$\cdot + \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad , \quad (h, k) \mapsto h + k \quad .$$

Definizione 3.10. *Fissato il parametro $h \in \mathbb{N}$ cominciamo col definire l'operazione $h + \cdot$ che sarà una funzione $f_h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data da $f_h(n) = h + n$; per la definizione ricorsiva vorremo esprimere le regole* [292]

- $h + 0 = h$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, h + S(n) = S(h + n)$.

A questo scopo, poniamo $A = \mathbb{N}$, e $g(n, a) = S(a)$, riscriviamo le precedenti come regole ricorsive per f_h

- $f_h(0) = h$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_h(S(n)) = g(n, f_h(n)) = S(f_h(n))$.

questo definisce ricorsivamente f_h. Considerando poi il parametro h come una variabile, abbiamo costruito l'operazione di addizione, e definiamo l'operazione "+" fra naturali come $h + n = f_h(n)$.

Questa operazione è commutativa e associativa, come mostrato sotto.

Notiamo che $h + 0 = f_h(0) = h$ (base della ricorsione); inoltre $0 + n = f_0(n) = n$ (si mostra facilmente per induzione).

Per dimostrare che è commutativa, mostriamo innanzitutto che

Lemma 3.11. $\forall n, h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(n) = S(f_h(n))$ [27N]

(Svolto il 2022-11-03)

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Dimostrazione. Ricordiamo che $S(f_h(n)) = f_h(S(n))$ per definizione ricorsiva; consideriamo

$$P(n) \doteq \forall h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(n) = S(f_h(n)) \quad ;$$

$P(0)$ è la proposizione

$$\forall h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(0) = S(f_h(0)) = S(h)$$

che è vera perché è il valore iniziale della definizione ricorsiva di $f_{S(h)}$ e di f_h; per il passo induttivo assumiamo che $P(n)$ sia vera e studiamo $P(S(n))$ al cui interno possiamo dire

$$f_{S(h)}(S(n)) \overset{(1)}{=} S(f_{S(h)}(n)) \overset{(2)}{=}$$
$$SS(f_h(n)) \overset{(3)}{=} S(f_h(S(n))$$

dove in (1) abbiamo usato la definizione ricorsiva di f_h con $S(h)$ invece di h, in (2) abbiamo usato la ipotesi induttiva, e in (3) la definizione ricorsiva di f_h; e questo completa il passo induttivo.

(Notate come nel primo passaggio è importante che nella definizione di $P(n)$ vi sia $\forall h \in \mathbb{N}, \ldots$). □

Proposizione 3.12. *(Replaces 27Y) L'addizione è commutativa.* [27P]

Dimostrazione. Per il lemma possiamo scrivere

$$S(h) + n = S(h + n) = h + S(n) \tag{3.13}$$

intuitivamente la formula è simmetrica e dunque anche la definizione di addizione deve avere una simmetria. Precisamente, sia $\tilde{f}_n(h) \overset{\text{def}}{=} f_h(n)$ allora $\tilde{f}_n(0) = n$ (come già notato) e per il lemma 3.11 $\tilde{f}_n(S(h)) = S\left(\tilde{f}_n(h)\right)$ ma allora $\tilde{f}$ soddisfa la stessa relazione ricorsiva di f e dunque sono identiche, così $f_h(n) = f_n(h)$. (L'idea è che se avessimo definito la addizione ricorsivamente partendo da sinistro invece che da destra, avremmo raggiunto lo stesso risultato). □

A questo punto possiamo dare un nome a $1 = S(0)$ e notare che $S(n) = n + 1$. Dunque da ora in poi potremmo fare a meno del simbolo S.

Con simili procedure si dimostra che l'addizione è associativa.

Proposizione 3.14. *L'addizione è associativa.* [27Q]

Dimostrazione. Consideriamo

$$P(h) \doteq \forall n, m \in \mathbb{N}, (n + m) + h = n + (m + h) \quad ;$$

ovviamente $P(0)$ è vera, inoltre $P(Sh)$ si dimostra (omettendo "$\forall n, m \in \mathbb{N}$") così

$$(n + m) + Sh = S(n + m) + h = (Sn + m) + h \overset{P(n)}{=}$$
$$= Sn + (m + h) = n + S(m + h) = n + (m + Sh)$$ □

Analogamente si definisce la moltiplicazione.

Definizione 3.15. *Si fissa il parametro m, e si definisce ricorsivamente $(m\times\cdot)$ tramite* [28V] *(Svolto il 2022-11-03)*

- $m \times 0 = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, m \times (n + 1) = m \times n + m$;

poi si possono dimostrare le note proprietà (commutatività, associatività, distributività).

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E3.16 Riscrivete alcune nozioni viste prima, quale il principio di induzione, e la definizione dell'addizione, usando $n+1$ invece di $S(n)$. [27R]

E3.17 Mostrate che la funzione $f_h(n) = (h+n)$ è iniettiva. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '27T'] [27S] *(Svolto il 2022-11-03)*

E3.18 Dimostrate la *proprietà di eliminazione*: se $n+h = m+h$ allora $n = m$. [27V]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '286']

E3.19 Si ha $n+m = 0$ se e solo se $n = 0 \wedge m = 0$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '285'] [27W] *(Svolto il 2022-11-03)*

E3.20 Si ha $n \times m = 0$ se e solo se $n = 0 \vee m = 0$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '284'] [27X] *(Svolto il 2022-11-03)*

E3.21 Dimostrate che la moltiplicazione è commutativa. Sugg. dimostrate per induzione in n [28T]

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, (m+1) \times n = m \times n + n \quad ,$$

dopodiché ragionate come in Prop. 3.12. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '28W']

E3.22 Dimostrate che l'addizione distribuisce rispetto alla moltiplicazione. Sugg. dimostrate per induzione in h [281]

$$\forall m, n, h \in \mathbb{N},\ m \times (n+h) = m \times n + m \times h \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '28Y']

E3.23 Prerequisiti: 3.22. Dimostrate che la moltiplicazione è associativa. Sugg. dimostrate per induzione in n [27Z]

$$\forall m, n, h \in \mathbb{N}, (m \times n) \times h = m \times (n \times h) \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '28X']

E3.24 Dati $n \neq 0$ e $h \in \mathbb{N}$ scrivete una definizione ricorsiva dell'elevamento a potenza n^h; indi dimostrate che $n^{h+k} = n^n n^k$ e $(n^h)^k = n^{(hk)}$. [280]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2DG']

Nel seguito scriveremo semplicemente nm invece di $n \times m$.

§3.d Ordinamento [27K]

Ipotesi 3.25. *Studieremo una relazione d'ordine (possibilmente parziale) $\leq$ su $\mathbb{N}$ tale che* [26H]

$$\forall x \in \mathbb{N}, (0 \leq x) \quad , \tag{3.26}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x < Sy) \iff (x \leq y) \quad ; \tag{3.27}$$

dove (come al solito)

$$x < y \doteq (x \leq y) \wedge (x \neq y) \quad .$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Teorema 3.28. *Vi è una unica relazione d'ordine $\preceq$ su $\mathbb{N}$ tale che* (3.27),(3.26) *in* 3.25 *valgano, e questo è un buon ordinamento.* [26Y]

Questo teorema sarà dimostrato in seguito: unicità in 3.29, buon ordinamento in 3.53. L'esistenza di una tale relazione deriva dal modello Z-F, come visto in precedenza e ricapitolato in Sezione §3.e; oppure l'ordinamento si può definire usando l'aritmetica, come mostrato in Sezione §3.d.a.

Esercizi

E3.29 Supponiamo che $\preceq$ sia una relazione di ordine (possibilmente parziale) su $\mathbb{N}$ soddisfacente (3.27),(3.26) in 3.25 allora $\preceq$ è unico. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '270'] [267]

E3.30 Sia [271]

$$P_x = \{z \in \mathbb{N}, z < x\}$$

mostrate che

$$\forall x, y \in \mathbb{N}\ ,\ P_x = P_y \Rightarrow x = y$$

usando le proprietà nell'Ipotesi 3.25.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '272']

(Notate la somiglianza con 2.232).

E3.31 Impostando $n = x = y$ in (3.27) otteniamo che $n < Sn$. [276]

E3.32 Prerequisiti:3.31,3.25. Usando le proprietà in 3.25 e assumendo che $\preceq$ sia una relazione d'ordine totale (come effettivamente dimostreremo), mostrate che [277]

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (n < m) \Rightarrow (Sn < Sm) \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '278']

E3.33 Se $\preceq$ è un ordinamento totale su $\mathbb{N}$ allora sono equivalenti [26X]

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \preceq y \preceq Sx) \Rightarrow (x = y \vee y = Sx) \quad , \tag{3.34}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \prec Sy) \iff (x \preceq y) \quad ; \qquad (\text{come in } (3.27))$$
$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \prec y) \iff (Sx \preceq y) \quad . \tag{3.35}$$

Notate l'analogia con 2.197

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '296']

§3.d.a Ordinamento dall'aritmetica [287]

Avendo già definito l'aritmetica, una definizione comoda di ordinamento è come segue.

Definizione 3.36. *Dati $n, m \in \mathbb{N}$, si dirà che $n \leq m$ se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $n + k = m$* [288]

Mostreremo che $\leq$ è una relazione di ordine totale, che è un buon ordinamento. Vediamo innanzitutto alcune proprietà elementari ma fondamentali.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Lemma 3.37. *Siano $n, m, k \in \mathbb{N}$.* [289]

1. *Per ogni n si ha $0 \leq n$*
2. *$n \leq m$ se e solo se $n < S(m)$.*
   Notate che questi due punti soddisfano (3.27),(3.26) *in 3.25*
3. *Per ogni n si ha $n < S(n)$*
4. *$n < m$ se e solo se $S(n) \leq m$.*
5. *Se $n \leq m \leq S(n)$ allora $m = n$ oppure $m = S(n)$.*

Le dimostrazioni sono lasciate per esercizio 3.42. (Una volta dimostrato che la relazione è totale, allora per 3.33 le ultime due sono equivalenti).

Proposizione 3.38. *$\leq$ è una relazione di ordine.* [28B]

Dimostrazione. Proprietà riflessiva: $n+0 = n$. Proprietà antisimmetrica: se $n+k = m$ e $m + h = n$ allora $n + k + h = n$ dunque per eliminazione 3.18 $h + k = 0$, e per 3.19 $h = k = 0$ così $n = m$. Proprietà transitiva: se $n + k = m$ e $m + h = p$ allora $n + k + h = p$. □

Dunque questa relazione "$\leq$" definita in 3.36 soddisfa la regola 3.25; mostreremo che ogni tale ordinamento è un buon ordinamento; qui presentiamo comunque una dimostrazione per questo caso particolare. [298]

Proposizione 3.39. *$\leq$ è una relazione di ordine totale.* [28Z]

Dimostrazione. Si considera la proposizione

$$P(n) \doteq \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m \vee m \leq n$$

Si ha che $P(0)$ è vera. Diamo per vera $P(n)$; prendiamo un m;

- se $m \leq n$ allora $m \leq S(n)$ per il lemma (punto 2), così $P(Sn)$ vale;
- se $\neg m \leq n$ ma $P(n)$ vale, allora $n \leq m$, ma non potendo essere $n = m$, si ottiene $n < m$, che comporta $S(n) \leq m$ per il lemma (punto 4);

in ogni caso $P(S(n))$ è dimostrata partendo da $P(n)$. □

Proposizione 3.40. *$\leq$ è un buon ordinamento.* [297]

Dimostrazione. Traccia della dimostrazione. Per il Lemma 3.37 (punto (2)) sappiamo che questo ordinamento soddisfa il principio forte di induzione 3.49; così possiamo provare (come in Esercizio 3.52) che ogni sottoinsieme non vuoto ha un elemento minimale; ma sappiamo che l'ordinamento è totale, dunque l'elemento minimale è il minimo. □

Definizione 3.41 (Sottrazione)**.** *Se $m \geq n$, esiste ed è unico h tale che $m = n + h$ (l'unicità segue da 3.18); indicheremo questo h come $m - n$.* [28C]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E3.42 Mostrate le proprietà in 3.37. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '28F'] [28D]

E3.43 Mostrate che se $n \leq m$ allora $m-n \leq m$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '28H'] [28G]

E3.44 Mostrate che se $n \neq 0$ allora $n \times m \geq m$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '28P'] [28N]

E3.45 `Argomenti:Divisione con resto.` [28J]

Dimostrate che, dati $d, n \in \mathbb{N}, d \geq 1$ esistono e sono unici due numeri $q, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < d$ per cui $n = q \times d + r$ (dove n è il "dividendo" d è il "divisore" , q è il "quoziente" e r è il "resto") *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '28K']

E3.46 *(Replaces 282)* [28M]

Sia $h \neq 0$, dimostrate che se $n \times h = m \times h$ allora $n = m$. *(Sugg. usate la sottrazione)*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '28S']

In particolare la mappa $n \mapsto n \times h$ è iniettiva.

§3.d.b Ordinamento e aritmetica [28Q]

L'ordinamento è compatibile con l'aritmetica.

Proposizione 3.47. [28R]

- (Compatibilità di addizione e ordinamento) *Si ha $n \leq m$ se e solo se $n+k \leq m+k$.*
- (Compatibilità di moltiplicazione e ordinamento) *Quando $k \neq 0$ si ha $n \leq m$ se e solo se $n \times k \leq m \times k$.*

In particolare (ricordando 3.46) la mappa $n \mapsto n \times h$ è strettamente crescente (e dunque iniettiva).

Dimostrazione. Useremo alcune proprietà lasciate per esercizio.

- Se $n \leq m$, per definizione $m = n + h$, allora $n + k \leq m + k$ in quanto $m + k = n + h + k$ (notate che stiamo usando l'associatività). Se $n + k \leq m + k$ sia allora j l'unico naturale tale che $n + k + j = m + k$ ma allora $n + j = m$ per eliminazione 3.18.
- Se $n \leq m$ allora $m = n + h$ dunque $m \times k = n \times k + h \times k$ così $n \times k \leq m \times k$. Viceversa sia $k \neq 0$ e sia $n \times k \leq m \times k$ cioè $n \times k + j = m \times k$: dividiamo j per k usando la divisione con resto 3.45, scriviamo $j = q \times k + r$ dunque per associatività $(n + q) \times k + r = m \times k$, ma per unicità della divisione con resto $r = 0$: infine raccogliendo $(n + q) \times k = m \times k$ e usando 3.46 concludiamo che $(n + q) = m$.

□

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§3.e Compatibilità Z-F e Peano [26F]

Torniamo ora al modello $\mathbb{N}_{ZF}$ di $\mathbb{N}$ costruito appoggiandosi alla teoria di Zermelo–Fraenkel, visto in Sez. §2.h. Vogliamo vedere che questo modello soddisfa gli assiomi di Peano.

Ricordiamo che, dato x (qualunque, non necessariamente numero naturale) si definisce il successore come

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \cup \{x\} \quad .$$

È facile vedere che **N1** e **N3** sono vere. La proprietà **N5** segue dal fatto che $\mathbb{N}_{ZF}$ è il più piccolo insieme S-saturo. **N2** e **N4** derivano da 2.200.

Abbiamo inoltre visto nel Teorema 2.208 che la relazione $\subseteq$ soddisfa i requisiti delle Ipotesi 3.25.

§3.f Induzione generalizzata, buon ordinamento [27M]

Proposizione 3.48 (Induzione generalizzata)**.** *Sia $N \in \mathbb{N}$, sia $P(n)$ una proposizione logica vera per $n = N$ e tale che* [1XR]

$$\forall n \geq N, P(n) \Rightarrow P(S(n)) \quad ,$$

allora P è vera per ogni $n \geq N$.

Presentiamo adesso il principio di induzione forte.

Proposizione 3.49 (Induzione forte)**.** *Assumiamo che un ordinamento (parziale) associato a $\mathbb{N}$ soddisfi 3.25. Sia $P(n)$ una proposizione logica vera per $n = 0$ e tale che* [1XS]

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Big(\big(\forall k \leq n, P(k) \big) \Rightarrow P(Sn) \Big) \tag{3.50}$$

allora P è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Questo principio è apparentemente più forte di quello usuale; ma vedremo che è in effetti equivalente.

Anche questo risultato si può generalizzare richiedendo che $P(N)$ sia vera, e scrivendo l'ipotesi induttiva nella forma "$\forall k, N \leq k \leq n, P(k)$": si otterrà che $P(n)$ è vera per $n \geq N$.

Si noti che il principio di buon ordinamento è in un qualche senso equivalente al principio di induzione; si veda 3.55.

Esercizi

E3.51 `Prerequisiti:3.25,3.4.Difficoltà:*.` [1XN]

Usate il principio di induzione 3.4 per dimostrare il principio di induzione forte 3.49

Attenzione: usate le proprietà nell'Ipotesi 3.25, ma non assumete che $\leq$ sia un ordinamento totale: infatti useremo questo risultato per dimostrarlo.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1XQ']`

E3.52 `Prerequisiti:3.25,3.49.Difficoltà:*.` [1XP]

Assumiamo che un ordinamento (parziale) $\leq$ associato a $\mathbb{N}$ soddisfi 3.25. Usate il principio di induzione forte 3.49 per mostrare che ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto ha un elemento minimale, cioè

$$\exists a \in A \ , \ \forall b \in A \ , \ \neg(b < a) \quad .$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1XZ']

E3.53 Prerequisiti:3.30,3.52,2.240. Usate i prerequisiti per mostrare che $(\mathbb{N}, \leq)$ è ben ordinato. [273]

E3.54 Prerequisiti:3.49. Usate l'induzione forte per dimostrare che ogni $n \geq 2$ si fattorizza nel prodotto di numeri primi. [1XT]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1XV']

E3.55 Difficoltà:*. Sia A un insieme bene ordinato [†38] dall'ordinamento $\leq$; sia $m = \min A$; allora per proposizioni $P(a)$ con $a \in A$ si può usare un metodo di dimostrazione, detto *induzione transfinita*, in cui [1XY]

- si richiede che $P(m)$ sia vera, e
- si dimostra il "passo induttivo"

$$\forall n \in \mathbb{N}\Big(\big(\forall k < n, P(k)\big) \Rightarrow P(n)\Big)$$

Si dimostri che se la proposizione P soddisfa le due precedenti, allora $\forall x \in A, P(x)$.

Si dimostri inoltre che se $A = \mathbb{N}$ allora il "passo induttivo" è equivalente al passo induttivo della induzione forte (definita in 3.49).

Altri esercizi che usano l'induzione sono: 8.9

§3.g Frequentemente, definitivamente [26G]

Siano $\mathbb{N}$ i numeri naturali.

Definizione 3.56 (frequentemente, definitivamente)**.** *Sia* P(n) *una proposizione logica che dipende da una variabile libera $n \in \mathbb{N}$. Diremo che* [018]

(Svolto il 2022-10-27)

P(n) *vale definitivamente in n se*	$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq m$ *vale* P(n) *;*
P(n) *vale frequentemente in n se*	$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq m$ *per cui* P(n) *vale.*

Questa definizione è equivalente alla definizione 5.14 per variabile reale $x \to \infty$; si può ulteriormente generalizzare, come visto in 2.125.

Nota 3.57. *In Inglese si può tradurre* frequentemente *come* frequently *e* definitivamente *come* eventually*; ma questi termini non sono molto usati.* [†39] [23Q]

Esercizi

E3.58 Notate che «*P(n)* vale definitivamente in *n*» implica «*P(n)* vale frequentemente in *n*». [019]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '01B']

E3.59 Notate che «(non *P(n)*) vale frequentemente in *n*» se e solo se «non (*P(n)* vale definitivamente in *n*)». [01C]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '01D']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E3.60 Notate che «*P(n)* vale frequentemente in *n*» se e solo se «*P(n)* vale per un numero infinito di *n*». [01F]

(Questa equivalenza non è vera in un qualunque insieme ordinato. Si veda invece 2.126 per la corretta formulazione).

E3.61 Siano ora $P(n), Q(n)$ due proposizioni. [01G]

(Svolto il 2022-10-27// in parte)

- Dite quali implicazioni vi sono fra
  - "$(P(n) \wedge Q(n))$ vale definitivamente" e
  - "$P(n)$ vale definitivamente e $Q(n)$ vale definitivamente".
- Similmente per le proposizioni
  - "$(P(n) \vee Q(n))$ vale definitivamente" e
  - "$P(n)$ vale definitivamente oppure $Q(n)$ vale definitivamente".

Formulate inoltre simili risultati per la nozione di "frequentemente".

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '01H']`

E3.62 Siano $P(n), Q(n)$ due proposizioni. Se "$P(n)$ *vale definitivamente* e $Q(n)$ *vale frequentemente*" allora "$(P(n) \wedge Q(n))$ *vale frequentemente*". [29G]

[38] Come definito in 2.235.

[39] Con alcune importanti eccezioni, come ad esempio [15]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§4 Gruppi, Anelli, Campi

[1ZD]

Vediamo brevemente queste definizioni.

Definizione 4.1. *Un **gruppo** è un insieme G munito di una operazione binaria $*$, che ad ogni coppia $a, b \in G$ associa un elemento $a * b \in G$, rispettando le seguenti proprietà*

[1ZF]
(Svolto il 2022-11-15)

1. *proprietà associativa: dati $a, b, c \in G$ vale $(a * b) * c = a * (b * c)$.*
2. *esistenza dell'elemento neutro: un elemento indicato con e tale che $a*e = e*a = a$.*
3. *Esistenza dell'inverso: ad ogni elemento $a \in G$ è associato un elemento **inverso** a', tale che $a * a' = a' * a = e$. L'inverso dell'elemento a è spesso indicato con a^{-1} (o $-a$ se il gruppo è commutativo).* [†40]

*Un gruppo si dice **commutativo** (o abeliano) se vale anche $a*b = b*a$ per ogni coppia $a, b \in G$.*

Definizione 4.2. *Un **anello** è un insieme A dotato di due operazioni binarie*

[1ZG]
(Svolto il 2022-11-15)

- *$+$ (detta somma o addizione) e*
- *$\cdot$ (detta "moltiplicazione", indicata anche con il simbolo $\times$ o $*$, e spesso omesso),*

tale che

- *A con $+$ è un gruppo commutativo (in genere l'elemento neutro si indica con 0);*
- *l'operazione $\cdot$ ha elemento neutro (in genere l'elemento neutro si indica con 1) ed è associativa;*
- *la moltiplicazione distribuisce sull'addizione, sia a sinistra*

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in A$$

sia a destra

$$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a) \quad \forall a, b, c \in A$$

*Un anello si dice **commutativo** se la moltiplicazione è commutativa. (Nel qual caso si equivalgono le distributività a destra o a sinistra).*

Si assume in genere che $0 \neq 1$ (altrimenti l'insieme $\{0\}$ sarebbe un anello).

Esempi di anelli commutativi sono: gli interi $\mathbb{Z}$, i polinomi $A[x]$ con coefficienti scelti in un anello commutativo A.

Un esempio di anello non commutativo molto usato è dato dalle matrici $\mathbb{R}^{n\times n}$, con la loro usuale operazione di addizione e moltiplicazione.

Definizione 4.3. *Un **campo** F è un anello per cui la moltiplicazione è commutativa, e ogni elemento $x \in F$ con $x \neq 0$ ha un inverso x^{-1} per la moltiplicazione.*

[1ZH]
(Svolto il 2022-11-15)

(Così $F \setminus \{0\}$ è un gruppo commutativo per la moltiplicazione, si veda 4.13).

Esempi di campi sono: i numeri razionali $\mathbb{Q}$, i numeri reali $\mathbb{R}$ e i numeri complessi $\mathbb{C}$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Nota 4.4. *In genere*[†41] *si usano le scritture a sinistra al posto delle scritture a destra (dove x, y, z sono nel campo e n è intero positivo)* [20R] *(Svolto il 2022-11-15)*

$x - y$	$x + (-y)$
$\frac{x}{y}$	$x \cdot y^{-1}$
$x + y + z$	$(x + y) + x$
xyz	$(x \cdot y) \cdot z$
nx	$\underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ volte}}$
x^n	$\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}}$
x^{-n}	$(x^{-1})^n$

Precisamente, nx significa "sommare x a se stesso n volte"; l'operazione $n \mapsto n \cdot x$ si può definire ricorsivamente ponendo $0 \cdot x = 0$ e $(n+1) \cdot x = n \cdot x + x$. Similmente x^n significa "moltiplicare x per se stesso n volte": si veda l'esercizio 4.21.

Nota 4.5. *Il teorema di Hurwitz [47] asserisce che se V è un campo ed è anche uno spazio vettoriale reale con un prodotto scalare, allora $V = \mathbb{R}$ oppure $V = \mathbb{C}$.* [1ZW]

Definizione 4.6. *Un **anello ordinato** F è un anello con una relazione d'ordine totale $\leq$ per la quale, per ogni $x, y, z \in F$,* [1ZJ]

- $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;
- $x, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$.

Per via di 4.13, se F è un campo, nella seconda ipotesi potremmo equivalentemente scrivere $x, y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$. (Riguardo alla seconda ipotesi si veda anche 4.14) Per approfondimenti si vedano le referenze in [40]. Assumeremo che in un anello ordinato la moltiplicazione sia commutativa.

Esempi di campi ordinati sono: i numeri razionali $\mathbb{Q}$ i numeri reali $\mathbb{R}$. I numeri complessi $\mathbb{C}$ non ammettono un ordinamento che soddisfi le proprietà sopra viste (esercizio 4.19).

Definizione 4.7. *Un campo ordinato F è **archimedeo** se $\forall x, y \in F$ con $x > 0, y > 0$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ per cui $nx > y$. (Si veda 4.4 per la definizione di nx).* [1ZK]

[†42]

Esercizi

E4.8 L'elemento neutro di un gruppo è unico. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1ZN'] [1ZM]

E4.9 In un gruppo, l'inverso di un elemento è unico. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1ZQ'] [1ZP]

E4.10 Fissato un elemento $g \in G$ in un gruppo, le mappe $L_g : G \to G$ e $R_g : G \to G$ [29C]

[†40] La notazione a^{-1} è giustificato dal fatto che l'elemento inverso è unico: *cf* 4.9.
[†41] Tratto dal 1.13 in [23]
[†42] Parti dei seguenti esercizi sono tratti da Cap. 2 Sez. 7 in [3], oppure Cap. 1 in [23],

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

$$L_g(h) = g * h \ , \ R_g(h) = h * g$$

di moltiplicazione a destra e a sinistra sono bigezioni.

E4.11 Provate[†43] che in un gruppo: [1ZR]

1. Se $x + y = x + z$ allora $y = z$.
2. Se $x + y = x$ allora $y = 0$.
3. Se $x + y = 0$ allora $y = -x$.
4. $-(-x) = x$.

E4.12 Provate[†44] che in un anello: [1ZS]

1. $0 \cdot x = 0$
2. $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.
3. $(-x)(-y) = xy$.
4. $(-1)x = -x$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '299']

E4.13 Considerate la proprietà [203]

$$\forall x, y \in A \ , \ x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

questa può essere falsa in un anello A; gli anelli per cui vale sono detti *domini d'integrità* [38].

Si mostri che un campo F è sempre un dominio di integrità. Conseguentemente $F \setminus \{0\}$ è un gruppo commutativo per la moltiplicazione. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '204']

E4.14 Supponiamo che in un anello A vi sia un ordinamento totale $\leq$ tale che per ogni $x, y, z \in A$ si ha $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$; allora mostrate che sono equivalenti [1ZT]

- $x \leq y \ \wedge \ 0 \leq z \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z$;
- $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot y \geq 0$.

E4.15 Prerequisiti: 2.101, 4.12, 4.14. Provate [†45] che in un anello ordinato F: [1ZV]

1. per ogni $x \in F, x^2 \geq 0$, in particolare $1 = 1^2 > 0$;
2. $x > 0 \Rightarrow -x < 0$
3. $y > x \Rightarrow -y < -x$;
4. $x \leq y \wedge a \leq 0 \Rightarrow a \cdot x \geq a \cdot y$;
5. $x \geq a \wedge y \geq b \Rightarrow x + y \geq a + b$;
6. $x > a \wedge y \geq b \Rightarrow x + y > a + b$;
7. $x \geq a \geq 0 \wedge y \geq b \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq a \cdot b$;

Provate che in un campo ordinato F:

[†43] [23] Prop. 1.14
[†44] [23] Prop. 1.16
[†45] Dal Cap. 2 Sez. 7 in [3], oppure [23] Prop. 1.18

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

1. $x > a > 0 \wedge y > b \geq 0 \Rightarrow x \cdot y > a \cdot b$;
2. $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$;
3. $y > x > 0 \Rightarrow x^{-1} > y^{-1} > 0$;
4. $x \cdot y > 0$ se e solo se x e y sono concordi (cioè o entrambi > 0 o entrambi < 0);

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '29B']

E4.16 In un campo ordinato F chiamiamo $P = \{x \in F : x \geq 0\}$ l'insieme dei numeri positivi (o nulli); soddisfa le seguenti proprietà: †46 [1ZX]

- $x, y \in P \Rightarrow x + y, x \cdot y \in P$,
- $P \cap (-P) = \{0\}$ e
- $P \cup (-P) = F$.

viceversa se in un campo F possiamo trovare un insieme $P \subseteq F$ che le soddisfi, allora F è un campo ordinato ponendo $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$.

E4.17 Non tutti i campi sono insiemi infiniti. Considerate $X = \{0, 1\}$ e le operazioni $0 + 0 = 1 + 1 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ e $1 \cdot 1 = 1$. Verificate che è un campo. Mostrate che non può essere un campo ordinato. [1ZY]

E4.18 Consideriamo l'anello delle matrici $\mathbb{R}^{2\times 2}$ poniamo [1ZZ]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

allora verificate che

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

concludete che l'anello delle matrici non è commutativo.

E4.19 Mostrate che non esiste un ordinamento $\leq$ su $\mathbb{C}$ tale che $(\mathbb{C}, \leq)$ sia un campo ordinato. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '20S'] [08V]

E4.20 Fissiamo $N \geq 2$ intero che non sia un quadrato perfetto. Consideriamo il sottoinsieme F di $\mathbb{R}$ dato dai numeri x che si possono scrivere come $x = a + b\sqrt{N}$, con $a, b \in \mathbb{Q}$; gli associamo le operazioni di $\mathbb{R}$: mostrate che F è un campo. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '201'] [200]

E4.21 Sia F un campo; dati $\alpha \neq 0$ e $h \in \mathbb{N}$ considerate la definizione ricorsiva dell'elevamento a potenza α^h data da $\alpha^0 = 1$ e $\alpha^{(n+1)} = \alpha^n \cdot \alpha$; indi dimostrate che $\alpha^{h+k} = \alpha^h \alpha^k$ e $(\alpha^h)^k = \alpha^{(hk)}$ per ogni $k, h \in \mathbb{N}$. [202]

E4.22 Prerequisiti:4.21. Dato $\alpha \neq 0$ in un campo, definite che $\alpha^0 = 1$ e che α^{-n} sia l'inverso moltiplicativo di α^n quando $n \geq 1$ naturale. (Usate 4.21). Per $n, m \in \mathbb{Z}$ mostrate che [20T]

$$\alpha^n \alpha^m = \alpha^{n+m} \quad , \quad (\alpha^h)^k = \alpha^{(hk)} \quad ;$$

se il campo è ordinato e $\alpha > 1$ mostrate che $n \mapsto \alpha^n$ è strettamente monotona crescente.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E4.23 Sia F un anello commutativo, $a, b \in F$, $n \in \mathbb{N}$ allora [205]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

in cui il fattore

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

si chiama *"coefficiente binomiale"*. (Questo risultato è noto come il teorema binomiale, formula di Newton, binomio di Newton o sviluppo binomiale). Per dimostrarlo per induzione, verificate che

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

per $0 \leq k, k+1 \leq n$.

[†46]Dal Cap. 2 Sec. 7 in [3]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§5 Retta reale

[09X]

Indicheremo nel seguito con $\mathbb{R}$ la retta reale, e con $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ la sua estensione. [†47]

Useremo gli *intervalli* (si veda la definizione in 2.141).

Nota 5.1. *Dato un insieme $I \subset \mathbb{R}$ vi sono vari modi di dire che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è **monotona**. Elenchiamo innanzitutto i diversi tipi di monotonia* [2DJ]

$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \tag{5.2}$$
$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) \tag{5.3}$$
$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y) \tag{5.4}$$
$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) > f(y) \tag{5.5}$$

Purtroppo nell'uso comune vi sono diverse e incompatibili convenzioni usate nel nominare le precedenti definizioni. Ecco una tabella, in cui ogni convenzione è una colonna.

(5.2)	*non decrescente*	*crescente*	*debolmente crescente*
(5.3)	*crescente*	*strettamente crescente*	*strettamente crescente*
(5.4)	*non crescente*	*decrescente*	*debolmente decrescente*
(5.5)	*decrescente*	*strettamente decrescente*	*strettamente decrescente*

In questo testo viene usate la convenzione nell' ultima colonna.

(La prima colonna è, a mio parere, problematica. Spesso porta all'uso, purtroppo comune, di frasi come *"f è una funzione non decrescente"* o *"prendiamo una funzione f non decrescente"*; questa può dare adito a confusione: sembra dire che f non soddisfa il requisito di essere decrescente, ma non specifica se è monotona. Chi segue la convenzione in prima colonna (a mio parere) dovrebbe sempre dire anche "monotona").

Esercizi

E5.6 Prerequisiti: 2.146. [09Y]

Si mostri che ogni intervallo I in $\mathbb{R}$ ricade in una delle categorie precedentemente viste in 2.142. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '09Z']

E5.7 Prerequisiti: 4.22. Sia fissato $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Sappiamo che, per ogni $n \geq 1$ naturale, esiste ed è unico un $\beta > 0$ tale che $\beta^n = \alpha$, e β viene denotato dalla notazione $\sqrt[n]{\alpha}$. (Si veda ad es. la Proposizione 2.6.6 Cap. 2 Sez. 6 degli appunti del corso [3] oppure Teorema 1.21 in [23]). Dato $q \in \mathbb{Q}$, scriviamo $q = n/m$ con $n, m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$, definiamo [20V]

$$\alpha^q \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[m]{\alpha^n} \quad .$$

Mostrate che questa definizione non dipende dalla scelta della rappresentazione $q = n/m$; che

$$\alpha^q = \left(\sqrt[m]{\alpha}\right)^n \quad ;$$

che per $p, q \in \mathbb{Q}$

$$\alpha^q \alpha^p = \alpha^{p+q} \quad , \quad (\alpha^p)^q = \alpha^{(pq)} \quad ;$$

mostrate che quando $\alpha > 1$ allora $p \mapsto \alpha^p$ è strettamente monotona crescente.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E5.8 Prerequisiti:5.7.Difficoltà:*.Fissato $\alpha > 1$, definite, per $x \in \mathbb{R}$, [20W]

$$\alpha^x = \sup\{\alpha^p \,:\, p \in \mathbb{Q}, p \leq x\} \quad ;$$

mostrate che:

- è una buona definizione (cioè che l'insieme a destra è superiormente limitato e non vuoto).
- che se x è razionale allora α^x così definito coincide con la definizione nel precedente esercizio 5.7;
- mostrate che $x \mapsto \alpha^x$ è strettamente crescente.
- Mostrate che
$$\alpha^x \alpha^y = \alpha^{x+y} \quad , \quad (\alpha^x)^y = \alpha^{(xy)} \quad .$$

Si veda anche l'esercizio 13.5.

E5.9 Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che [20X]

$$\forall L \in \mathbb{R}, L > b \Rightarrow L > a \quad .$$

Dimostrate che $b \geq a$.

E5.10 Sia fissato $I = \{1, \dots n\}$. Siano dati n punti distinti $y_1, \dots y_n \in \mathbb{R}$; cerchiamo una permutazione $\sigma : I \to I$ per cui le diseguaglianze triangolari fra punti successivi siano uguaglianze cioè [0B0]

$$|y_{\sigma(i+2)} - y_{\sigma(i+1)}| + |y_{\sigma(i+1)} - y_{\sigma(i)}| = |y_{\sigma(i+2)} - y_{\sigma(i)}|$$

per $i = 1, \dots n-2$. Si mostri che ne esistono solo due, le chiamiamo σ_1, σ_2. Suggerimento: mostrate che ogni tale permutazione necessariamente mette i punti "in ordine", cioè si ha

$$\forall i, y_{\sigma_1(i+1)} > y_{\sigma_1(i)} \quad , \quad \forall i, y_{\sigma_2(i+1)} < y_{\sigma_2(i)}$$

(a meno di decidere quale è σ_1 e quale è σ_2).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0B1']

§5.a Intorni

[29H]

(Svolto il 2022-11-24)

Gli intorni sono una famiglia di insiemi associata a un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, oppure a $x_0 = \pm\infty$. Gli intorni sono insiemi che contengono un insieme "esempio". Vediamo qui alcune definizioni.

Definizione 5.11 (Intorni)**.** *Gli intorni "bucati" di punti $x_0 \in \mathbb{R}$ si dividono in tre classi.* [0B2]

- *Intorni di $x_0 \in \mathbb{R}$, che contengono un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ per un $\delta > 0$;*
- *intorni destri di $x_0 \in \mathbb{R}$, che contengono un insieme del tipo $(x_0, x_0 + \delta)$ per un $\delta > 0$;*

[†47]La struttura topologica di $\overline{\mathbb{R}}$ sarà ulteriormente discussa in 7.31.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- *intorni sinistri di $x_0 \in \mathbb{R}$, che contengono un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0)$ per un $\delta > 0$;*

in ogni caso gli intorni "bucati" non devono contenere il punto x_0. Gli intorni "pieni" si ottengono aggiungendo x_0. Gli "intorni pieni" sono la base per la topologia standard su $\mathbb{R}$.

Ai precedenti aggiungiamo poi gli intorni di $\pm\infty$:

- *intorni di ∞ , che contengono un insieme del tipo (y, ∞) al variare di $y \in \mathbb{R}$;*
- *intorni di $-\infty$, che contengono un insieme del tipo $(-\infty, y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$;*

in questo caso non distinguiamo intorni "bucati" e intorni "pieni".

(Nella letteratura Inglese gli *intorni bucati* si chiamano "*deleted neighbourhoods*" o "*punctured neighbourhoods*").

Esercizio 5.12. `Prerequisiti:2.110.Difficoltà:*.` *Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano $\mathcal{F}$ tutti gli intorni di x_0. Associamo l'ordinamento* [29J] *(Proposto il 2022-11-24)*

$$I, J \in \mathcal{F} \ , I \leq J \iff I \supseteq J$$

mostrate che l'ordinamento è filtrante.

(Questo vale sia per intorni "bucati" che "pieni"; sia per "destri" che "sinistri" e "bilaterali").

(Si veda anche 7.15 per un simile enunciato in spazi topologici).

§5.b Frequentemente, definitivamente [29K]

Scriveremo $\overline{\mathbb{R}}$ per $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Definizione 5.13 (punto di accumulazione)**.** *Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, un punto $x \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice* punto di accumulazione *per A se ogni intorno "bucato" di x interseca A.* [0BG]

Definizione 5.14 (frequentemente, definitivamente)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per I. Sia* P(x) *una proposizione logica che possiamo valutare per $x \in I$. Definiamo che* [0B3]

"P(x) *vale definitivamente per x tendente a x_0" se*	*esiste un intorno U di x_0 $\forall x \in U \cap I$, vale* P(x) *;*
"P(x) *vale frequentemente per x tendente a x_0" se*	*per ogni intorno U di x_0 $\exists x \in U \cap I$ per cui* P(x) *;*

dove si intende che gli intorni sono "bucati".

Nota 5.15. *Come già visto in 3.59, anche in questo caso le due seguenti proposizioni sono equivalenti.* [0B4]

- *"non $\Big($ $P(x)$ vale definitivamente, per x tendente a x_0 $\Big)$",*
- *" $\big($ non $P(x)$ $\big)$ vale frequentemente per x tendente a x_0".*

Nota 5.16. *Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ non è punto di accumulazione per I, allora si ha sempre che* "$P(x)$ vale definitivamente per x tendente a x_0" . [22X]

Proposizione 5.17. *Supponiamo per semplicità che $I = \mathbb{R}$. Mettendo insieme le idee precedenti, possiamo scrivere equivalentemente:* [20C]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- *se* $x_0 \in \mathbb{R}$,

$\exists \delta > 0, \forall x \neq x_0, \lvert x - x_0 \rvert < \delta \Rightarrow P(x)$	$P(x)$ *vale definitivamente per* x *tendente a* x_0
$\forall \delta > 0, \exists x \neq x_0, \lvert x - x_0 \rvert < \delta \wedge P(x)$	$P(x)$ *vale frequentemente per* x *tendente a* x_0

- *nel caso in cui* $x_0 = \infty$

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x, x > y \Rightarrow P(x)$	$P(x)$ *vale definitivamente per* x *tendente a* ∞
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x, x > y \wedge P(x)$	$P(x)$ *vale frequentemente per* x *tendente a* ∞

- *e similmente* $x_0 = -\infty$

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x, x < y \Rightarrow P(x)$	$P(x)$ *vale definitivamente per* x *tendente a* $-\infty$
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x, x < y \wedge P(x)$	$P(x)$ *vale frequentemente per* x *tendente a* $-\infty$

§5.c Estremi superiori e inferiori

[29M]

Rivediamo preliminarmente le caratterizzazioni degli estremi superiori e inferiori in $\mathbb{R}$, viste in Sez. §2.d.c (o in Cap. 1 Sec. 5 negli appunti [3]). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

Definizione 5.18. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *non vuoto. Ricordiamo che* ***l'estremo superiore*** *di un insieme* A *è il minimo dei maggioranti; lo indicheremo con la usuale scrittura* $\sup A$. *Se* A *è superiormente limitato allora* $\sup A$ *è un numero reale; in caso contrario, per convenzione, si pone* $\sup A = +\infty$.

[08T]

Proposizione 5.19. *Sia dunque* $A \subseteq \mathbb{R}$ *non vuoto, sia* $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*; si possono facilmente dimostrare le seguenti proprietà:*

[208]

(Svolto il 2022-11-24)

$\sup A \leq l$	$\forall x \in A, x \leq l$
$\sup A > l$	$\exists x \in A, x > l$
$\sup A < l$	$\exists h < l, \forall x \in A, x \leq h$
$\sup A \geq l$	$\forall h < l, \exists x \in A, x > h$

la prima e la terza derivano dalla definizione di estremo superiore, [†48] *la seconda e la quarta per negazione; nella terza si può concludere equivalentemente che* $x < h$, *e nella quarta che* $x \geq h$.

Se $l \neq +\infty$ *allora usa anche scrivere (sostituendo* $h = l - \varepsilon$*)*

$\sup A < l$	$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, x \leq l - \varepsilon$
$\sup A \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > l - \varepsilon$

Combinando le precedenti, riotteniamo il risultato già visto in 2.138

Corollario 5.20. *Preso* $A \subseteq \mathbb{R}$ *non vuoto, allora* $\sup A$ *è l'unico numero* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *che soddisfa queste due proprietà*

[20K]

(Svolto il 2022-11-24)

$$\forall x \in A, x \leq \alpha$$
$$\forall h < \alpha, \exists x \in A, x > h$$

come già visto in 2.138 per il caso più generale di insiemi totalmente ordinati.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Definizione 5.21. *Similmente, dato $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto,* l'estremo inferiore *di A è il massimo dei minoranti; lo indicheremo con la usuale scrittura* $\inf A$*. Se A è inferiormente limitato allora* $\inf A$ *è un numero reale; in caso contrario, per convenzione, si pone* $\inf A = -\infty$. [209]

Nota 5.22. *Si noti che se si sostituisce A con* [0B5]

$$-A = \{-x : x \in A\}$$

(Proposto il 2022-11-24)

e l con $-l$, si passa dalle definizioni del sup *a quelle del* inf *(e viceversa).*

Proposizione 5.23. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, sia $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; valgono le seguenti proprietà:* [20B]

$\inf A \geq l$	$\forall x \in A, x \geq l$
$\inf A < l$	$\exists x \in A, x < l$
$\inf A > l$	$\exists h > l, \forall x \in A, x \geq h$
$\inf A \leq l$	$\forall h > l, \exists x \in A, x < h$

Se $l \neq -\infty$ allora usa anche scrivere (sostituendo $h = l + \varepsilon$)

$\inf A > l$	$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, x \geq l + \varepsilon$
$\inf A \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x \leq l + \varepsilon$

Corollario 5.24. *Preso $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, allora* $\inf A$ *è l'unico numero $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ che soddisfa queste due proprietà* [20M]

(Proposto il 2022-11-24)

$$\forall x \in A, x \geq \alpha$$
$$\forall h > \alpha, \exists x \in A, x < h$$

Spesso le precedenti definizioni e proprietà si usano in questa forma.

Definizione 5.25. *Data J famiglia di indici non vuota, sia $a_n \in \mathbb{R}$ per $n \in J$. Si definiscono gli estremi superiori e inferiori come* [20H]

(Svolto il 2022-11-24)

$$\sup_{n \in J} a_n = \sup A \quad , \quad \inf_{n \in J} a_n = \inf A$$

dove $A = \{a_n : n \in J\}$ è l'immagine della successione.

Dato D non vuoto, sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione. Si definiscono gli estremi superiori e inferiori come

$$\sup_{x \in D} f(x) = \sup A \quad , \quad \inf_{x \in D} f(x) = \inf A$$

dove $A = \{f(x) : x \in D\}$ è l'immagine della funzione.

§5.c.a Esercizi

Siano I, J generici insiemi non vuoti. Si vedano le definizioni in Sez. §5.c

Esercizi

E5.26 Sia a_n una successione a valori reali, per $n \in I$ un insieme di indici; siano $r > 0, t \in \mathbb{R}, \rho < 0$; mostrate che [0B6]

(Svolto il 2022-11-24)

$$\sup_{n \in I}(a_n + t) = t + \sup_{n \in I} a_n \ , \ \sup_{n \in I}(r a_n) = r \sup_{n \in I} a_n \ , \ \sup_{n \in I}(\rho a_n) = \rho \inf_{n \in I} a_n \ .$$

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '22W']`

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E5.27 Sia $a_{n,m}$ una successione reali a due indici $n \in I, m \in J$, mostrate che [0B7]

$$\sup_{n\in I, m\in J} a_{n,m} = \sup_{n\in I}\left(\sup_{m\in J} a_{n,m}\right) \ .$$

(Svolto il 2022-11-24)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0B8']

E5.28 Prerequisiti:5.27,5.26. Siano a_n, b_n successioni reali, per $n \in I$, mostrate che [0B9]

$$\sup_{n,m\in I}(a_n + b_m) = (\sup_{n\in I} a_n) + (\sup_{n\in I} b_n) \ ,$$

(Svolto il 2022-11-24)

ma

$$\sup_{n\in I}(a_n + b_n) \le (\sup_{n\in I} a_n) + (\sup_{n\in I} b_n) \ ;$$

trovate un caso in cui la disuguaglianza è stretta. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0BB']

E5.29 Prerequisiti:5.27. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e sia [0BC]

$$A \oplus B = \{x + y \ : \ x \in A, y \in B\}$$

la *somma di Minkowski* [†49] dei due insiemi: mostrate che

$$\sup(A \oplus B) = (\sup A) + (\sup B) \ .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0BD']

E5.30 Siano $I_n \subseteq \mathbb{R}$ (per $n \in \mathbb{N}$) intervalli non vuoti chiusi e limitati, tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$: si mostri che $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ è non vuoto. [0BF]

Questo risultato è noto come ***"teorema dell'intersezione di Cantor"*** *[45]. Si estende a contesti più generali, si vedano 9.120 e 7.41.*

Se sostituiamo $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Q}$ e assumiamo che $I_n \subseteq \mathbb{Q}$, il risultato vale lo stesso?

E5.31 Si studino le equivalenze in proposizione 5.19 per il caso in cui $\sup A = +\infty$: cosa dicono le formule a destra? [20P]

(Svolto il 2022-11-24)

E5.32 Riscrivete le proprietà della proposizione 5.23 per i casi visti in 5.25. [20J]

E5.33 Calcolate estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi (dove n, m sono interi). [20Y]

(Proposto il 2022-12)

$$\left\{\frac{mn}{m^2+n^2} \ : \ n, m \ge 1\right\} \quad , \quad \left\{\frac{mn}{m+n} \ : \ n, m \ge 1\right\}$$
$$\{2^n + 2^m \ : \ n, m \in \mathbb{N}\} \quad , \quad \{2^n + 2^m \ : \ n, m \in \mathbb{Z}\}$$
$$\left\{\frac{m^2-2}{n} \ : \ n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\} \quad , \quad \left\{\frac{m+1}{m^2} \ : \ m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\right\}$$

§5.d Limiti [29N]

Scriveremo $\overline{\mathbb{R}}$ per $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Definizione 5.34. *Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.* [20D]

L'idea di limite (destro o sinistro o bilaterale) è così espressa.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$	*per ogni intorno V "pieno" di l, esiste intorno U "bucato" di x_0 tale che per ogni $x \in U \cap I$, si ha $f(x) \in V$*

dove l'intorno U sarà destro o sinistro se il limite è destro o sinistro; si può anche dire che

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$	*per ogni intorno V "pieno" di l, si ha $f(x) \in V$ definitivamente per x tendente a x_0*

aggiungendo che $x > x_0$ se il limite è destro, oppure $x < x_0$ se il limite è sinistro.

Scriviamo ora esplicitamente queste idee.

Proposizione 5.35. *Sia I un insieme, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per I, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione, $l \in \mathbb{R}$.* [0BH]

Mettendo insieme tutte le definizioni viste precedentemente, otteniamo queste definizioni di limite.

Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon$
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon$
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $l = \pm\infty$.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$

Sia $l \in \mathbb{R}$, $x_0 = \pm\infty$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$

Nota 5.36. *Si noti che se si sostituisce $f \mapsto -f$, si passa dalle definizioni con $l = \infty$ a quelle del $l = -\infty$ (e viceversa). Un'altra simmetria si ottiene scambiando $x_0 \to -x_0$ e gli intorni destri e sinistri.* [0BJ]

§5.e Limiti superiori e inferiori [29P]

Dalla precedente definizione passiamo alle definizioni di *"limite superiore"* lim sup e *"limite inferiore"* lim inf. L'idea è così espressa.

Definizione 5.37. *Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I, $f : I \to \mathbb{R}$* [20F]

[48] In particolare nella terza si può pensare che $h = \sup A$.

[49] La *somma di Minkowski* ritornerà nella sezione §11.f.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

funzione. Si definiscono

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{U \text{intorno di } x_0} \sup_{x\in U\cap I} f(x) \tag{5.38}$$

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{U \text{intorno di } x_0} \inf_{x\in U\cap I} f(x) \tag{5.39}$$

dove il primo "inf" (risp. il "sup") si esegue rispetto alla famiglia di tutti gli intorni U di x_0 (sempre del tipo "col buco"); e gli intorni saranno destri o sinistri se il limite è destro o sinistro.

Nota 5.40. *Usando le proprietà di* inf, sup, *otteniamo ad esempio queste caratterizzazioni* [20G] *(Svolto il 2022-11-29)*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le l \iff \forall z > l,\ \textit{definitivamente per } x \to x_0, f(x) < z \ ;$$

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \ge l \iff \forall z < l,\ \textit{frequentemente per } x \to x_0, f(x) > z \ ;$$

e così via. (In questa scrittura semplificata, diamo per sottointeso che $x \in I$).

In particolare, ponendo $l = \limsup_{x\to x_0} f(x)$, le precedenti caratterizzano esattamente il "limsup".

Corollario 5.41. *Si ha $\alpha = \limsup_{x\to x_0} f(x)$ se e solo se* [20N]

$$\forall z > \alpha,\ \textit{definitivamente per } x \to x_0, f(x) < z \ ;$$

$$\forall z < \alpha,\ \textit{frequentemente per } x \to x_0, f(x) > z \ .$$

Le esplicitiamo ulteriormente in quanto segue. (Si raccomanda di provare a riscrivere autonomamente alcune voci, a titolo di esercizio).

Proposizione 5.42. *Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$, dividiamo la definizione in due condizioni:* [†50] [0BK]

$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le l$ $\limsup_{x\to x_0} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x, \lvert x-x_0\rvert<\delta, x\neq x_0, x\in I \Rightarrow f(x) < l+\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists x, \lvert x-x_0\rvert<\delta, x\neq x_0, x\in I, f(x) > l-\varepsilon$
$\limsup_{x\to x_0^+} f(x) \le l$ $\limsup_{x\to x_0^+} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x, \lvert x-x_0\rvert<\delta, x> x_0, x\in I \Rightarrow f(x) < l+\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists x, \lvert x-x_0\rvert<\delta, x> x_0, x\in I, f(x) > l-\varepsilon$
$\limsup_{x\to x_0^-} f(x) \le l$ $\limsup_{x\to x_0^-} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x, \lvert x-x_0\rvert<\delta, x< x_0, x\in I \Rightarrow f(x) < l+\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists x, \lvert x-x_0\rvert<\delta, x< x_0, x\in I, f(x) > l-\varepsilon$

[†50] Nelle seguenti tabelle tutte le virgole "," dopo l'ultimo quantificatore devono essere interpretate come congiunzioni "$\wedge$", ma sono state scritte come "," per alleggerire la notazione.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq l$ $\liminf_{x\to x_0} f(x) \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I, f(x) < l+\varepsilon$
$\liminf_{x\to x_0^+} f(x) \geq l$ $\liminf_{x\to x_0^+} f(x) \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I, f(x) < l+\varepsilon$
$\liminf_{x\to x_0^-} f(x) \geq l$ $\liminf_{x\to x_0^-} f(x) \leq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I, f(x) < l+\varepsilon$

Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l = \pm\infty$:

$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists \delta > 0, \forall x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I, f(x) < z$
$\liminf_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I, f(x) < z$
$\liminf_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall \delta > 0, \exists x, \lvert x-x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I, f(x) < z$

Nel caso $x_0 = \pm\infty$ e $l = \pm\infty$:

$\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) > z$
$\limsup_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\liminf_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) < z$
$\liminf_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) < z$

Nel caso $x_0 = \pm\infty$ e $l \in \mathbb{R}$:

$\limsup_{x\to\infty} f(x) \leq l$ $\limsup_{x\to\infty} f(x) \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < l+\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) > l-\varepsilon$
$\limsup_{x\to-\infty} f(x) \leq l$ $\limsup_{x\to-\infty} f(x) \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < l+\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) > l-\varepsilon$
$\liminf_{x\to\infty} f(x) \leq l$ $\liminf_{x\to\infty} f(x) \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x > y, x \in I, f(x) < l+\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$
$\liminf_{x\to-\infty} f(x) \leq l$ $\liminf_{x\to-\infty} f(x) \geq l$	$\forall \varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x < y, x \in I, f(x) < l+\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$

Nota 5.43. *Notate che* [OBM]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

e

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Nota 5.44. *Si noti che se si sostituisce $f \mapsto -f$, $l \mapsto -l$, si passa dalle definizioni del* lim sup *a quelle del* lim inf *(e viceversa). Un'altra simmetria si ottiene scambiando $x_0 \to -x_0$ e gli intorni/limiti destri e sinistri.* [OBN]

Esercizi

E5.45 Siano $A_1, A_2 \ldots$ insiemi , per $n \in \mathbb{N}$; sia $X = \bigcup_n A_n$. Definiamo la funzione caratteristica $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ come [OBP]

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

Useremo le definizioni $\limsup_n A_n$ e $\liminf_n A_n$ viste in eqn. (2.316) e (2.317). Si ha

$$\mathbb{1}_{(\limsup_n A_n)} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n} , \tag{5.46}$$

$$\mathbb{1}_{(\liminf_n A_n)} = \liminf_n \mathbb{1}_{A_n} . \tag{5.47}$$

E5.48 Fissiamo una successione a_n a valori reali; consideriamo ora la definizione in 5.37 ponendo $I = \mathbb{N}$ e $x_0 = \infty$, in modo che gli intorni di x_0 siano gli insiemi contenenti $[n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$; con questi presupposti mostrate che si ha [OBQ]

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} a_n &= \inf_n \sup_{m\geq n} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} a_n , \\ \liminf_{n\to\infty} a_n &= \sup_n \inf_{m\geq n} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} a_n ., \end{aligned} \tag{5.49}$$

E5.50 `Prerequisiti:5.37,5.12,2.110,6.58,6.63.Difficoltà:*.` [29R]
(Proposto il 2022-11-24)

Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione. Come in 5.12 siano $\mathcal{F}$ tutti gli intorni di x_0 con l'ordinamento filtrante

$$U, V \in \mathcal{F} \ , U \leq V \iff U \supseteq V \quad .$$

Sia

$$s, i : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \ , \ \ s(U) = \sup_{x\in U\cap I} f(x) \ , \ \ i(U) = \inf_{x\in U\cap I} f(x)$$

notate che sono funzioni monotone, e mostrate che [†51]

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{U\in\mathcal{F}} s(U) = \lim_{U\in\mathcal{F}} s(U) \tag{5.51}$$

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{U\in\mathcal{F}} i(U) = \lim_{U\in\mathcal{F}} i(U) \tag{5.52}$$

dove i limiti sono definiti in 6.58.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E5.53 Prerequisiti:5.50. [29S]

Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I, e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni. Mostrate che *(Svolto il 2022-11-24)*

$$\limsup_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) \le \limsup_{x\to x_0} f(x) + \limsup_{x\to x_0} g(x) \quad .$$

E5.54 Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione. Siano $r > 0, t \in \mathbb{R}, \rho < 0$; mostrate che [29T]

$$\limsup_{x\to x_0}(f(x)+t) = t + \limsup_{x\to x_0} f(x) \ , \quad \limsup_{x\to x_0}(rf(x)) = r \limsup_{x\to x_0} f(x) \ ,$$
$$\limsup_{x\to x_0}(\rho f(x)) = \rho \liminf_{x\to x_0} f(x) \ .$$

Altri esercizi su limiti di successioni si trovano in Sez. §6.a.

§5.f Approssimazione di numeri irrazionali [29Q]

Nei prossimi esercizi useremo le seguenti definizioni.

Definizione 5.55. *Per $x \in \mathbb{R}$ sia $\lfloor x \rfloor$ la parte intera inferiore di x definita da* [OBS]

$$\lfloor x \rfloor \stackrel{def}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$$

(detta in Inglese floor function*).*

Definizione 5.56. *$x - \lfloor x \rfloor$ è la parte frazionaria di x.* [OBT]

(Posto $\varphi(x) = x - \lfloor x \rfloor$, notate che $\varphi(3,1415) = 0,1415$ ma $\varphi(-4,222) = 0,778$ perché $\lfloor -4,222 \rfloor = -5$).

Esercizi

E5.57 Notate che $k = \lfloor x \rfloor$ è l'unico intero per cui si ha $k \le x < k+1$ o equivalentemente $0 \le (x-k) < 1$ o equivalentemente $x - 1 < k \le x$. [OBV]

E5.58 Prerequisiti:5.55. Dati $x \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}, N \ge 2$, si dimostri che almeno un elemento dell'insieme $\{x, 2x, \dots, (N-1)x\}$ dista al massimo $1/N$ da un intero, cioè esistono $n, m \in \mathbb{Z}$ con $1 \le n \le N-1$ tali che $|nx - m| \le 1/N$. [OBW]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OBX']

E5.59 Prerequisiti:5.55,5.58. Dati $x, b \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ irrazionale, e $\varepsilon > 0$, si dimostri che esiste un M naturale tale che $Mx - b$ dista al massimo ε da un intero. [OBY]

Sia $\varphi(x) = x - \lfloor x \rfloor$ la parte frazionaria di x, si ha $\varphi(x) \in [0,1)$. Il risultato precedente implica che la successione $\varphi(nx)$ è densa nell'intervallo $[0,1]$.

Notate che invece se $x \neq 0$ è razionale cioè $x = n/d$ con n, d interi primi tra loro e $d > 0$, allora la successione $\varphi(nx)$ assume tutti e soli i valori $\{0, 1/d, 2/d, \dots (d-1)/d\}$.

(Questo si dimostra con il Lemma di Bézout [39]).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OBZ']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E5.60 Prerequisiti:5.58. *(Teorema di approssimazione di Dirichlet)* Dato un numero irrazionale x, si dimostri che esistono infiniti razionali α tali che si può rappresentare $\alpha = m/n$ in modo da soddisfare la relazione [0C1]

$$\left|x - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2} \quad .$$

Alcuni commenti.

- Si noti per ogni fissato $n \geq 2$ esiste al più un m per cui la precedente relazione vale; ma potrebbe non esisterne uno.
- Si noti che se la relazione vale per un α razionale, vi sono solo finite scelte di rappresentazioni per cui vale,
- e sicuramente vale per la scrittura "canonica" con n, m primi fra loro.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0C2']

Notate che il teorema di Hurwitz [37] dice che per ogni irrazionale ξ esistono infiniti $m, n \in \mathbb{Z}$ coprimi per cui [2B0]

$$\left|\xi - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, n^2}.$$

E5.61 Fissati $k > 0$, $\varepsilon > 0$ e un numero razionale x, si dimostri che esistono solo finiti razionali α tali che si può rappresentare $\alpha = m/n$ in modo da soddisfare la relazione [0C3]

$$\left|x - \frac{m}{n}\right| \leq \frac{k}{n^{1+\varepsilon}} \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0C4']

E5.62 Dimostrare che per ogni razionale m/n si ha [0C5]

$$\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{4n^2}.$$

Si ottiene che l'insieme $A = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2}\right)$ è un aperto che contiene ogni numero razionale, ma $A \neq \mathbb{R}$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0C6']

§5.g Algebrici

Definizione 5.63. *Un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ è detto* algebrico *se esiste un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con coefficienti razionali tale che $p(\alpha) = 0$. In caso contrario α è detto* trascendente. [0C7]

Notiamo che ogni $\alpha = n/m$ razionale è algebrico, in quanto radice di $p(x) = mx - n$.

Definizione 5.64. *Dato un anello commutativo A, l'insieme dei polinomi $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con coefficienti $a_i \in A$ è usualmente denotato da $A[x]$; questo insieme, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi, è un anello commutativo.* [0C8]

Vogliamo mostrare che i numeri algebrici sono un campo.

[†51] *cf* 5.38, (5.39).

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E5.65 Dato $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, si costruisca un $q \in \mathbb{Z}[z]$ tale che $q(\alpha) = 0$. [OC9]

Dunque la definizione di *algebrico* si può dare equivalentemente con i polinomi a coefficienti interi.

E5.66 Dato $\alpha \neq 0$ e $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, si costruisca un $q \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $q(1/\alpha) = 0$. [OCB]

Dunque se $\alpha \neq 0$ è algebrico allora $1/\alpha$ è algebrico.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0BR']

E5.67 Dato $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, dato $b \in \mathbb{Q}$ si costruisca un $q \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $q(b\alpha) = 0$. [OCC]

Dunque se α è algebrico allora $b\alpha$ è algebrico.

E5.68 Dato $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, dato $b \in \mathbb{Q}$ si costruisca un $q \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $q(b + \alpha) = 0$. [OCD]

Dunque se α è algebrico allora $b + \alpha$ è algebrico.

E5.69 Difficoltà:*. Più in generale, dati $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, $q \in \mathbb{Q}[z]$, e date α, β tali che $p(\alpha) = 0 = q(\beta)$, si costruisca un polinomio $r \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $r(\alpha + \beta) = 0$. [OCF]

(Sugg. si usi la teoria del risultante [48]).

Dunque se α, β sono algebrici allora $\alpha + \beta$ è algebrico.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0CG']

E5.70 Si mostri che se α è algebrico allora α^2 è algebrico. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0CJ'] [OCH]

E5.71 Se α, β sono algebrici si mostri che $\alpha\beta$ è algebrico. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0CM'] [OCK]

Quanto sopra dimostra che i numeri algebrici sono un campo.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§6 Successioni e serie [OCN]

§6.a Successioni [2GY]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una successione di numeri reali (come definita in in 2.160).

Dato $N \in \mathbb{N}$ nel seguito scriveremo $\sup_{n\geq N} a_n$ invece di $\sup\{a_N, a_{N+1} \ldots\}$, e analogamente per l'estremo inferiore. (Questo è in accordo con quanto discusso in 5.25)

Esercizi

E6.1 `Prerequisiti:5.24.` [OCP]

Si ha che $\sup_{n\geq N} a_n = \sigma \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se

$$\forall n \geq N, a_n \leq \sigma \quad \text{e} \tag{6.2}$$
$$\forall L < \sigma, \exists n \geq N, a_n > L \tag{6.3}$$

(notate che se $\sigma = \infty$ la prima è banalmente vera, mentre se $\sigma = -\infty$ quest'ultima è vera perché non vi sono L).

Soluzione. 6.4. *Segue dalla caratterizzazione 5.20.* [OCQ]

E6.5 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione con $a_n \sim n^n$. Si dimostri che, posto $s_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_n$ si ha $s_n \sim a_n$. [OCR]

E6.6 Siano e_n, d_n due successioni reali tali che $d_n \leq e_n$ per ogni n, e supponiamo che $\limsup_n e_n = \liminf_n d_n = b$ (possibilmente infinito): mostrate allora che $\lim_n e_n = \lim_n d_n = b$. *Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID 'OCT']` [OCS]

E6.7 `Prerequisiti:5.28,5.48.` Siano a_n, b_n successioni a valori reali, mostrate che [OCV]

(Svolto il 2022-11-24)

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} a_n) + (\limsup_{n\to\infty} b_n) \ ;$$

trovate un caso in cui la disuguaglianza è stretta. *Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID 'OCW']`

E6.8 `Difficoltà:*.` [OCX]

Sia $a_{n,m}$ una successione reale [†52] a due indici $n, m \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

- per ogni m esista il limite $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$, e che
- esista finito il limite $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ uniformemente in n, cioè

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall h \geq m \ \ |a_{n,h} - b_n| < \varepsilon \ .$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m} \tag{6.9}$$

nel senso che se uno dei due limiti esiste (possibilmente infinito), allora esiste anche l'altro, e sono uguali.

Trovate un semplice esempio in cui i due limiti in (6.9) sono infiniti.

[†52] Questo risultato vale più in generale se $a_{n,m}$ sono elementi di uno spazio metrico; inoltre un simile risultato si ha quando i limiti $n \to \infty$ e/o $m \to \infty$ vengono rimpiazzati con limiti $x \to \hat{x}$ e/o $y \to \hat{y}$ dove le precedenti variabili si muovono in spazi metrici. Si veda ad esempio 17.12.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

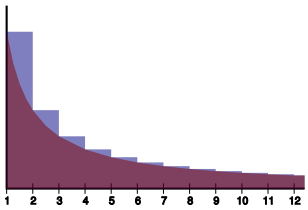


Figura 1: Rappresentazione della costante di Eulero-Mascheroni
Immagine di William Demchick, Creative Commons Attribution 3.0 Unported License, tratta da wikipedia.

Trovate un esempio in cui $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ ma il limite non è uniforme e la precedente uguaglianza (6.9) non vale.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0CZ']

E6.10 Prerequisiti:6.8,6.6. Sia di nuovo $a_{n,m}$ una successione reale a due indici $n, m \in \mathbb{N}$; supponiamo che, per ogni n, esista finito il $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ uniformemente in n, e che esista finito il $\lim_n b_n$. Si può concludere che esistono i limiti $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$ per ogni fissato m? Sapete scrivere un'uguaglianza come in eqn. (6.9) in cui però a destra si usino i limiti superiori o inferiori di $a_{n,m}$ per $n \to \infty$, al posto dei limiti $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$? [0D0]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0D1']

E6.11 Difficoltà:*. Mostrate che da ogni successione $(a_n)_n$ si può estrarre una sotto-successione monotona. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0D3'] [0D2]

E6.12 Difficoltà:*. Mostrate che da ogni successione $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ si può estrarre una sottosuccessione monotona per cui [0D4]

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0D5']

E6.13 Argomenti:costante di Eulero-Mascheroni.Prerequisiti:2.186. [0D6]

Mostrate che esiste finito il limite

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right) \quad .$$

Questa γ è detta Costante di Eulero - Mascheroni. Si può definire in moltissimi modi diversi (si veda il link precedente) fra cui

$$\gamma = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) \mathbb{d}x$$

dove le parentesi $\lfloor\cdot\rfloor$ indicano la funzione parte intera $\lfloor x \rfloor \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Nella immagine 1 la costante γ è l'area blu.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0D8']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E6.14 Note:*Ese 5 del compito gennaio 2010.* [OD9]

Sia $a_k = \sqrt[3]{k^3+k} - k$. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \frac{1}{3}\log(n)$$

nel senso che il rapporto fra queste due successioni tende a 1 quando $n \to \infty$.
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ODB'][UNACCESSIBLE UUID 'ODC']

E6.15 Note:*Esercizio 1 del compito 9 Aprile 2011.* Sia (a_n) una successione di numeri reali, con $a_n \geq 0$. [ODD]

1. Si mostri che se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora convergono anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m\right)$$

2. Assumendo inoltre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, poniamo

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \ b = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m\right) \ , \ c = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

si mostri allora che $a^2 = 2b + c$.

Esercizio 6.16. *Siano a_n, b_n successioni reali (che possono avere segno variabile, assumere valore zero, e non sono necessariamente infinitesime).* [ODJ]
Ricordiamo che la notazione $a_n = o(b_n)$ significa:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \overline{n} \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon |b_n| \ .$$

Si mostri che queste due asserzioni sono equivalenti.

- *Definitivamente in n si ha che $a_n = 0 \iff b_n = 0$; precisato questo si ha $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$, dove si decide che $0/0 = 1$ (in particolare a_n, b_n hanno definitivamente lo stesso segno, quando non sono entrambi nulli);*
- *si ha che $a_n = b_n + o(b_n)$.*

La seconda condizione appare in Definizione 3.2.7 in [3] dove viene indicata con la notazione $a_n \sim b_n$.
Deducete che $a_n \sim b_n$ è una relazione di equivalenza.
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '29Y']

Esercizio 6.17. Prerequisiti:2.191.*Siano a_n, b_n successioni reali (che possono avere segno variabile, assumere valore zero, e non sono necessariamente infinitesime); sia $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo spazio di tutte le successioni.* [O2F]
Ricordiamo che la notazione $a_n = O(b_n)$ significa:

$$\exists M > 0,\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \overline{n} \Rightarrow |a_n| \leq M |b_n| \ .$$

Si mostrino queste asserzioni:

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- *per $a, b \in X, a = (a_n)_n, b = (b_n)_n$ consideriamo la relazione*

$$aRb \iff a_n = O(b_n)$$

mostrate che R è un preordine;

- *definiamo $x \asymp y \iff (xRy \wedge yRx)$ allora $\asymp$ è una relazione di equivalenza, inoltre R è invariante per $\asymp$, la sua proiezione $\preceq$ è una relazione d'ordine su $X/\asymp$; (sugg. usate la Prop. 11.58).*

- *Definite (come usuale)*

$$\hat{a} \prec \hat{b} \iff (\hat{a} \preceq \hat{b} \wedge \hat{a} \neq \hat{b})$$

per $\hat{a}, \hat{b} \in X/\asymp$, $(a_n)_n \in \hat{a}, (b_n)_n \in \hat{b}$ rappresentanti; assumendo che $b_n \neq 0$ (definitivamente in n), mostrate che

$$\hat{a} \prec \hat{b} \iff 0 = \liminf_n \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{b_n} < \infty \quad .$$

Chiamiamo gli elementi di $X/\asymp$ ordini di grandezza. *La precendente discussione è collegato alla Definizione 3.2.3 (e seguenti) in [3].*

Si vedano anche gli esercizi 5.28 e 5.27.

§6.a.a Sommazione per parti

Esercizi

E6.18 Siano $(a_n)_n, (b_n)_n$ successioni di numeri reali e sia c_n definita come da 6.50; siano poi [217]

$$A_n = \sum_{h=0}^{n} a_h \ , \ B_n = \sum_{h=0}^{n} b_h \ , \ C_n = \sum_{h=0}^{n} c_h$$

le somme parziali delle tre serie, supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ sia convergente: si mostri che

$$C_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} B_i = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(B_i - B) + A_n B \quad .$$

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '216']`

E6.19 `Note`:*Tratto da Rudin [23] Prop. 3.41.* [21H]

Siano $(a_n)_n (b_n)_n$, successioni, sia $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $A_{-1} = 0$, $0 \leq p \leq q$, allora

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p \quad .$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§6.b Successioni definite per ricorrenza

Esercizi

E6.20 Siano $f(x) = x - x^3$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione definita per ricorrenza da $x_{n+1} = f(x_n)$. Si dimostri che esiste un $\lambda > 0$ tale che se $|x_0| < \lambda$ allora $x_n \to 0$, mentre se $|x_0| > \lambda$ allora $|x_n| \to \infty$; e possibilmente si calcoli questo λ. [0DK]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0DM']

E6.21 Note:*metodo Babilonese per la radice quadrata.* Sia $S > 0$ e consideriamo la successione definita per ricorrenza da [0DN]

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{S}{x_n}\right) \quad ;$$

mostrate che $x_n \to \sqrt{S}$ e che, per $S \in [1/4, 1]$ e $x_0 = 1$, la convergenza è superquadratica, cioè

$$\left|x_n - \sqrt{S}\right| \leq 2^{1-2^n} \quad .$$

Trovate una funzione $f(x)$ (dipendente da S) tale che la precedente iterazione si possa vedere come un metodo di Newton, cioè

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{S}{x}\right).$$

Generalizzate il metodo Babilonese per trovare una radice $\sqrt[k]{S}$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0DP']

§6.c Serie [2GZ]

§6.c.a Criteri

Teorema 6.22 (Criterio della radice)**.** *Sia $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ allora* [219]

- *Se $\alpha < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;*
- *Se $\alpha = 1$ non si può concludere nulla;*
- *Se $\alpha > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge, e inoltre $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.*

Dimostrazione. [21B]

- Se $\alpha < 1$, preso $L \in (\alpha, 1)$ si ha definitivamente $\sqrt[n]{|a_n|} < L$ dunque vi è un N per cui $|a_n| \leq L^{N-n}$ per ogni $n \geq N$ e si conclude per confronto con la serie geometrica.
- Per le due serie $1/n$ e $1/n^2$ si ha $\alpha = 1$.
- Se $\alpha > 1$ si ha frequentemente $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ dunque $|a_n| > 1$, in contrasto con il criterio necessario.

□

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Teorema 6.23 (Criterio del rapporto, o di D'Alambert)**.** *Assumiamo che $a_n \neq 0$. Sia* [21C]
$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *allora*

- *Se $\alpha < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;*
- *se $\alpha \geq 1$ non si può concludere nulla.*

Dimostrazione.

- Se $\alpha < 1$, preso $L \in (\alpha, 1)$ si ha definitivamente $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L$ dunque vi è un N per cui $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L$ per ogni $n \geq N$, per induzione si mostra che $|a_n| \leq L^{n-N}|a_N|$ e si conclude per confronto con la serie geometrica.
- Vediamo alcuni esempi. Per le due serie $1/n$ e $1/n^2$ si ha $\alpha = 1$.
  Definendo
  $$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ pari} \\ 2^{2-n} & n \text{ dispari} \end{cases} \tag{6.24}$$
  si ottiene una serie convergente ma per cui $\alpha = 2$.

□

Nota 6.25. *Se è possibile applicare il criterio del rapporto 6.23, abbiamo visto nella* [0F1]
dimostrazione che, per un $L < 1$, vi è un N per cui $|a_n| \leq L^{n-N} a_N$ per ogni $n \geq N$, e dunque $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq L < 1$*, cioè si applica il criterio della radice 6.26.*

Teorema 6.26 (Criterio di condensazione di Cauchy)**.** *Se $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ ha termini* [21D]
positivi ed è monotona (debolmente) decrescente, la serie converge se e solo se converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad .$$

Dimostrazione. Dato che la successione $(a_n)_n$ è decrescente, allora per $h \in \mathbb{N}$
$$2^h a_{2^{(h+1)}} \leq \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k \leq 2^h a_{2^h} \quad . \tag{6.27}$$
Notiamo ora che
$$\sum_{h=0}^{N} \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k = \sum_{n=2}^{2^{N+1}} a_n$$
e dunque
$$\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{2^{(N+1)}} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \quad .$$
dunque possiamo sommare i termini in (6.27) per ottenere
$$\sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^{(h+1)}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^h}$$
laddove il termini a destra è finito se e solo se quello a sinistra è finito, in quanto
$$\sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^h} = a_1 + 2 \sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^{(h+1)}} \quad :$$
si conclude la dimostrazione con il teorema di confronto. □

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Il criterio di Dirichlet per le serie generalizza il criterio *dei segni alterni* di Leibniz.

Teorema 6.28 (criterio di Dirichlet)**.** *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Se b_n tende monotonamente a 0 e se la serie delle somme parziali di a_n è limitata, cioè se* [21F]

$$b_n \geq b_{n+1} > 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad , \quad \exists M > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}\,, \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| < M \quad ,$$

allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$$

è convergente.

La dimostrazione è lasciata come esercizio (sugg. si usi 6.19)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '21G']

In particolare, ponendo $a_n = (-1)^n$ si dimostra l'esistenza del limite nel criterio di Leibniz.

Teorema 6.29 (criterio di Leibniz)**.** *Sia b_n una successione per cui* [238]

$$b_n \geq b_{n+1} > 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad ,$$

allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$$

è convergente; inoltre, chiamato ℓ il valore della serie, poste

$$B_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n b_n$$

le somme parziali, si ha che la successione B_{2N} è decrescente , la successione B_{2N+1} è crescente, e entrambe convergono a ℓ.

Teorema 6.30 (Criterio di Raabe)**.** *Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dove i termini sono positivi: $a_n > 0$. Definiamo* [ODR] *(Svolto il 2022-12-13)*

$$z_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

per comodità.

- *Se $z_n \leq 1$ definitivamente in n, allora la serie non converge.*
- *Se esiste $L > 1$ tale che $z_n \geq L$ definitivamente in n, cioè equivalentemente se*

$$\liminf_{n\to\infty} z_n > 1 \quad ,$$

allora la serie converge.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Inoltre, fissato $h \in \mathbb{Z}$, si può definire

$$z_n = (n+h)\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

oppure

$$z_n = n\left(\frac{a_{n+h}}{a_{n+h+1}} - 1\right)$$

come ad esempio

$$z_n = n\left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1\right)$$

e il criterio vale allo stesso modo. Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ODS']

§6.c.b Esercizi

Esercizi

E6.31 Sia $\alpha > 0$; usate il criterio di Raabe 6.30 per studiare la convergenza della serie [214] *(Svolto il 2022-12-13)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '215']

E6.32 Sia $\alpha > 0$; usate il criterio di condensazione 6.26 per studiare la convergenza della serie [23D] *(Svolto il 2022-12-13)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

E6.33 Data una serie $\sum_n^\infty a_n$ dire se le condizioni successive sono necessarie e/o sufficienti per la convergenza. [ODW]

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\ \forall k \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{j=n}^{n+k} a_k\right| < \varepsilon \tag{6.34}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad \left|\sum_{j=n}^{n+k} a_k\right| < \varepsilon \tag{6.35}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=n}^{n+k} |a_k| < \varepsilon \tag{6.36}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad \sum_{j=n}^{n+k} |a_k| < \varepsilon \tag{6.37}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ODX']

E6.38 Trovate due successioni $(a_n)_n, (b_n)_n$ con $a_n, b_n > 0$ tali che $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$ è convergente, $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n b_n$ è non convergente, e $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'ODZ'] [ODY] *(Proposto il 2022-12-13)*

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E6.39 Note:*Esame del 9 aprile 2011.*Sia (a_n) una successione di numeri reali (non necessariamente positivi) tali che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga ad $a \in \mathbb{R}$; sia $b_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$; si mostri che se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge allora $a = 0$. [OF0]

E6.40 Trovare due esempi di $a_{i,j} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ [OF2] *(Proposto il 2022-12)*

- tale che, per ogni i, $\sum_j a_{i,j} = 0$, mentre per ogni j, $\sum_i a_{i,j} = \infty$;
- tale che, per ogni i, $\sum_j a_{i,j} = 0$, mentre per ogni j, $\sum_i a_{i,j} = 1$.

Riuscite a trovare esempi dove sia abbia inoltre che $|a_{i,j}| \leq 1$ per ogni i, j?

E6.41 Note:*Compitino del 4 Apr 2009, ese 1.* Data una successione $(a_n)_n$ di numeri strettamente positivi, si dice che *il prodotto infinito* $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge* se esiste finito e strettamente positivo il limite dei prodotti parziali, cioè [OF4] *(Proposto il 2022-12-13)*

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N} a_n \in (0, +\infty) \quad .$$

Si dimostri che

1. se $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ converge allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$;
2. se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - 1|$ converge, allora converge anche $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$;
3. trovate un esempio in cui la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - 1)$ converge ma $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = 0$.

E6.42 Indichiamo con $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subseteq \mathbb{N}$ che sono insiemi finiti. Questo è detto *l'insieme delle parti finite*. [OF5]

Abbreviamo $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ nel seguito.

Data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali e un $B \in \mathcal{P}$ indichiamo con $s(B) = \sum_{n\in B} a_n$ la somma finita con indici in B.

Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga ma non converga assolutamente. Allora:

- $\{s(F) : F \in \mathcal{P}\}$ è denso in $\mathbb{R}$.
- Esiste un riordinamento σ di $\mathbb{N}$, cioè una funzione bigettiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che l'insieme delle somme parziali $\sum_{n=0}^{N} a_{\sigma(n)}$ (al variare di N) è denso in $\mathbb{R}$.

E6.43 Note:*Questo risultato è attribuito a Riemann, si veda 3.54 in [23].*. [OF7]

Sia data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (a un valore finito) ma $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$; per ogni l, L con $-\infty \leq l \leq L \leq +\infty$ esiste una permutazione $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che, posto $S_N = \sum_{k=0}^{N} a_{\pi(k)}$, si ha che

$$\limsup_{N\to\infty} S_N = L \quad , \quad \liminf_{N\to\infty} S_N = l \quad .$$

E6.44 Sia data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali positivi tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$: dimostrare che per ogni $l \in \mathbb{R}$ esiste una successione $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ per ogni n, tale che [OF8]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n a_n) = l \quad .$$

Se invece $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S < \infty$, cosa si può dire dell'insieme E delle somme $\sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon_n a_n) = l$, al variare di $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ per ogni n?

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- Analizzate i casi in cui $a_n = 2^{-n}$ oppure $a_n = 3^{-n}$
- Mostrate che E è sempre chiuso.
- Sotto quali ipotesi si ha che $E = [-S, S]$?

Suggerimento. Sia $\tilde{E}$ l'insieme delle somme $\sum_n (\varepsilon_n a_n) = l$, al variare di $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ per ogni n; notate che $\tilde{E} = \{(S + x)/2 : x \in E\}$.

E6.45 Note:*Compitino del 12 gen 2019.* Mostrate che la seguente serie converge [0F9]

(Svolto il 2022-12-13)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdots (3n)} \right)^2$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0FB']

E6.46 Dire per quali $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ si ha che [21M]

(Proposto il 2022-12)

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\log n)^{\beta} (\log(\log n))^{\gamma}}$$

converge.

E6.47 Note:*compitino 29 Gennaio 2021.*Sia $\alpha > 0$. Dite (giustificando) per quali α le seguenti serie convergono o divergono [23F]

(Proposto il 2022-12-13)

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[4]{n^8 + n^{\alpha}} - n^2 \right)$$
- $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha} + 1} \right)$$
- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^{\alpha \log_2(n)}}$$

  dove i logaritmi sono in base 2.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '23G']

E6.48 Note:*Compitino del 26 gen 2016.* Sia [20Z]

$$z_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)} \quad ;$$

Mostrate che $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \infty \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '213']

E6.49 Note:*esercizio 2, compito 15 Gennaio 2014.* Sia $(a_n)_{n\geq 0}$ una successione di numeri reali positivi. Posto $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ si mostri che: [210]

- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/s_n$ converge;
- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/(s_n)^2$ converge.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '21K']

Si veda anche l'esercizio 23.1.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§6.c.c Prodotto di Cauchy

Definizione 6.50. *Date due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ a valori reali o complessi, il loro **prodotto di Cauchy** è la successione $(c_n)_n$ data da* [0FH]

$$c_n \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad .$$

Esercizi

E6.51 Se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \geq 0$ si mostri che [0FJ]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

con la convenzione che $0 \cdot \infty = 0$.

E6.52 Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono assolutamente, si mostri che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge assolutamente e [0FK] *(Proposto il 2022-12-13)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad .$$

E6.53 `Prerequisiti:6.18.Note:`*Noto come: Teorema di Mertens.*. [0FM]

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, si mostri che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad .$$

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '0FN']`

E6.54 Si discuta il prodotto di Cauchy della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ con se stessa. *Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID '0FQ']` [0FP]

Si veda anche l’esercizio 18.7.

§6.d Successioni generalizzate, o “reti” [29X]

Definizione 6.55. *Sia nel seguito $(J, \leq)$ un insieme ordinato con la* proprietà filtrante [21J]

$$\forall x, y \in J \; \exists z \in J, \; x < z \wedge y < z \tag{6.56}$$

(Si veda la sezione §2.d.a).

*Una funzione $f : J \to X$ viene chiamata **rete**.*

Questa f è una generalizzazione del concetto di successione*; infatti l’insieme $J = \mathbb{N}$ con il suo usuale ordinamento ha la proprietà filtrante*

In questa sezione ci concentriamo sul caso $X = \mathbb{R}$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Nota 6.57. *Notate che questa definizione si discosta da quella generalmente usata, si veda in [35] o in [15]; ma è equivalente a tutti gli effetti pratici, per quanto spiegato in 2.129, 6.66, 7.15.* [2B3]

Definizione 6.58. *Prerequisiti: 2.121, 2.125, Sez. §2.d.a.* [0FR]

Dato J insieme ordinato (parzialmente) e filtrante, e data $f : J \to \mathbb{R}$, vogliamo definire il concetto di limite di $f(j)$ "per $j \to \infty$". [†53].

- *Diremo che*
$$\lim_{j\in J} f(j) = l \in \mathbb{R}$$
se
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists k \in J \forall j \in J,\ j \geq k \Rightarrow |l - f(j)| < \varepsilon \quad .$$
Similmente si definiscono i casi $l = \pm\infty$ (imitando le definizioni usate quando $J = \mathbb{N}$.) (Questa è la definizione negli appunti del corso, cap. 4 sez. 2 in [3])

- *Equivalentemente possiamo dire che*
$$\lim_{j\in J} f(j) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$
se per ogni intorno U di l si ha che $f(j) \in U$ definitivamente per $j \in J$; dove definitivamente *è stato definito in 2.125.*

- *Ricordiamo da 2.118 che* "un intorno di ∞ in J" *è un sottoinsieme $U \subseteq J$ tale che $\exists k \in J \forall j \in J, j \geq k \Rightarrow j \in U$. Allora possiamo imitare la definizione 5.34.*
Data $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha $\lim_{j\in J} f(j) = l$ quando per ogni intorno V "pieno" di l in $\mathbb{R}$, esiste intorno U di ∞ in J tale che $f(U) \subseteq V$.

In particolare questa ultima definizione si può usare per definire i limiti di $f : J \to E$ dove E è uno spazio topologico.

Definizione 6.59. *Presa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale, $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ è una* sottosuccessione *quando n_k è una successione strettamente crescente di numeri naturali.* [230]

Similmente presa $f : J \to \mathbb{R}$, sia $H \subseteq J$ un sottoinsieme cofinale *(come definito in 2.115): sappiamo da 2.122 che H è* filtrante. *Allora la restrizione $h = f_{|_H}$ è una rete $h : H \to \mathbb{R}$, ed è detta* "una **sottorete** di f".

Più in generale, supponiamo che $(H, \leq_H)$ sia cofinale in $(J, \leq)$ per mezzo di una mappa $i : H \to J$; ricordiamo che questo significa (adattando (2.117)) che

$$(\forall h_1, h_2 \in H, h_1 \leq_H h_2 \Rightarrow i(h_1) \leq i(h_2)) \ \wedge\ (\forall j \in J\, \exists h \in H,\ i(h) \geq j) \quad ; \quad (6.60)$$

*allora $h = f \circ i$ è una **sottorete**.*

Esercizi

E6.61 Dimostrate che le asserzioni in 6.58 sono equivalenti. [22Z]

E6.62 *Prerequisiti: 6.58, 6.55, 2.123.* Mostrate che se esiste il limite $\lim_{j\in J} f(j)$ allora è unico. [0FS]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E6.63 Supponiamo che f sia monotona, mostrate che $\lim_{j\in J} f(j)$ esiste (possibilmente infinito) e coincide con $\sup_J f$ (se è crescente) o con $\inf_J f$ (se è decrescente). [0FT]

Deducete che

$$\limsup_{j\in J} f(j) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{j\in J}\sup_{k\geq j} f(k)$$
$$\liminf_{j\in J} f(j) \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{j\in J}\inf_{k\geq j} f(k)$$

sono sempre ben definiti.

E6.64 Mostrate che esiste il limite $\lim_{j\in J} f(j) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se [0FV]

$$\limsup_{j\in J} f(j) = \liminf_{j\in J} f(j) = \ell\ .$$

E6.65 Prerequisiti:2.110,2.122,6.58,6.55,2.124.Supponiamo che $H \subseteq J$ sia *cofinale* e sia $h = f_{|H}$ la sottorete (come definito in 6.59); [22Y]

Supponiamo che $\lim_{j\in J} f(j) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ si mostri che $\lim_{j\in H} h(j) = l$.

Simimente se $(H, \leq_H)$ è cofinale in $(J, \leq)$ per mezzo di una mappa $i : H \to J$, e , e $h = f \circ i$.

Nota 6.66. *Supponiamo che l'insieme J sia diretto ma non filtrante; allora per 2.121 esso ammette un elemento massimo che chiamiamo ∞; le precedenti definizioni e proprietà si possono dare anche in questo caso, ma sono banali, in quanto si dimostra che* [237]

$$\lim_{j\in J} f(j) = \liminf_{j\in J} f(j) = \limsup_{j\in J} f(j) = f(\infty) \quad .$$

§6.e Serie generalizzate [2HO]

§6.e.a Serie generalizzate a termini positivi

Definizione 6.67. *Sia I una famiglia infinita di indici e sia $a_i : I \to [0,\infty]$ una successione generalizzata, definiamo la somma $\sum_{i\in I} a_i$ come* [0FW]

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left\{\sum_{i\in K} a_i : K \in \mathcal{P}_{\text{f}}(I)\right\}$$

dove $\mathcal{P}_{\text{f}}(I)$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti $K \subseteq I$.

Esercizi

E6.68 Prerequisiti:2.326.Note:*Dal compitino del 27 marzo 2010.*.Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la sommatoria [0FX]

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(n+m+1)^\alpha} \quad .$$

[†53]Notate che ∞ è un simbolo ma non è un elemento di J : se lo fosse dovrebbe essere il massimo, ma un insieme filtrante non può avere massimo, *cf* 2.121

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

converge. Si discuta poi, per $N \geq 3$, la convergenza di

$$\sum_{(m_1,\dots m_N)\in\mathbb{N}^N} \frac{1}{(1+m_1+\dots+m_N)^\alpha} \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0FY']

E6.69 Sia I una famiglia di indici, sia a_i una successione con $a_i \geq 0$; sia poi $\mathcal{F}$ una partizione di I (non necessariamente di cardinalità finita); mostrare allora che [0FZ]

$$\sum_{F\in\mathcal{F}} \sum_{i\in F} a_i = \sum_{i\in I} a_i \quad .$$

E6.70 Difficoltà:*. Siano I famiglia di indici; sia $a_{i,j} : I\times\mathbb{N} \to [0,\infty]$ una successione generalizzata, tale che $j \mapsto a_{i,j}$ è debolmente crescente per ogni fissato i; si dimostri allora che [0G0]

$$\sum_{i\in I} \lim_{j\to\infty} a_{i,j} = \lim_{j\to\infty} \sum_{i\in I} a_{i,j} \ .$$

(Questa è una versione per le serie del noto *Teorema di convergenza monotona*).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0G2']

E6.71 Estendete il precedente 6.70, sostituendo $\mathbb{N}$ con un insieme di indici J filtrante secondo un ordinamento $\leq$. [0G3]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§7 Topologia [0G5]

Sia X un insieme fissato e non vuoto. Useremo questa notazione. Per ogni insieme $A \subseteq X$ definiamo che $A^c = X \setminus A$ è il **complementare di A**.

Definizione 7.1. *Uno **spazio topologico** è una coppia (X, τ) dove X è un insieme (non vuoto) con associata la famiglia τ degli aperti, che è detta **topologia**.* [2DY]

Definizione 7.2. *La **topologia** $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di sottoinsiemi di X che vengonono chiamati **aperti**. Questa famiglia gode di tre proprietà: $\emptyset, X$ sono aperti; l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto; l'unione di un numero arbitrario di aperti è un aperto.*

*Un insieme A è **chiuso** se A^c è aperto.* [0G6]

Definizione 7.3. *Siano dati $A, B \subseteq X$.* [0G7]

1. *La **parte interna** di A, denotata da A°, è l'unione di tutti gli aperti contenuti in A, e dunque è il più grande aperto contenuto in A;*
2. *la **chiusura** di B, denotata da $\overline{B}$, è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono B, cioè è il più piccolo chiuso che contiene B.*
3. *A si dice **denso in** B se $\overline{A} \supseteq B$.*[†54]
4. *La **frontiera** ∂A di A è $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.*

Definizione 7.4. *Si dice che uno spazio topologico (X, τ) è T_2, o* "di Hausdorff"*, se $\forall x, y \in X$ esistono $U, V \in \tau$ aperti disgiunti con $x \in U, y \in V$.* [0G8]

Definizione 7.5. *Ogni insieme X può essere associato a diverse topologie. Di seguito due semplici esempi:* [2F6]

- *La **topologia discreta** è quella in cui tutti gli insiemi sono aperti, e dunque chiusi. Equivalentemente, la topologia discreta è quella in cui ogni singoletto è un aperto.*
- *La **topologia indiscreta** è quella in cui $X, \emptyset$ sono gli unici insiemi aperti (e chiusi).*

Ulteriori informazioni si possono trovare in Cap. 2 of [23] o in [15].

Nota 7.6. *Uno spazio metrico è un caso particolare di spazio topologico, in quanto gli aperti dello spazio metrico soddisfano i requisiti della definizione 7.2; la topologia associata è sempre Hausdorff. I seguenti risultati dunque valgono anche per gli spazi metrici.* [2DH]

Esercizi

E7.7 Mostrate che se lo spazio è T_2 allora ogni singoletto $\{x\}$ è chiuso. [0G9]

E7.8 Mostrate che se $A \subseteq B$ allora $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ e $A^\circ \subseteq B^\circ$ [0GB]

E7.9 Mostrate che se $A = B^c$ allora $(\overline{B})^c = A^\circ$, usando le definizioni 7.2 e 7.3. [0GC]

E7.10 Notate che $A \supseteq A^\circ$ e $B \subseteq \overline{B}$, in genere. Mostrate che A è aperto se e solo se $A = A^\circ$; e che B è chiuso se e solo se $B = \overline{B}$, usando le definizioni 7.2 e 7.3. [0GD]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E7.11 `Argomenti:parte interna.` Dato X spazio topologico e $A \subseteq X$, mostrate che [OGF]

$$A^\circ = (A^\circ)^\circ \ .$$

usando la definizione di A° data sopra.

(Per il caso di X spazio metrico, si veda anche il 9.34)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0GG']

E7.12 `Argomenti:chiusura.` Dato X spazio topologico e $A \subseteq X$, mostrate che [OGH]

$$\overline{A} = \overline{\left(\overline{A}\right)}$$

sia per passaggio al complementare rispetto al 7.11, sia usando la definizione di $\overline{A}$ come *"intersezione di tutti i chiusi che contengono A"*.

(Per il caso di X spazio metrico, si veda anche il 9.37)

E7.13 `Argomenti:chiusura, parte interna.` Sia dato X spazio topologico e $A \subseteq X$ aperto. [OGJ]

1. Mostrate che $A \subseteq \left(\overline{A}\right)^\circ$ (la parte interna della chiusura di A).
2. Trovate un esempio di insieme $A \subset \mathbb{R}$ aperto per cui $A \neq \left(\overline{A}\right)^\circ$.
3. Formulate poi una simile relazione per A chiuso, passando ai complementari.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0GK']

E7.14 Dati gli insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$, si determinino le relazioni tra le seguenti coppie di insiemi [OGM]

$$\begin{array}{rcl} \overline{A \cup B} & \text{e} & \overline{A} \cup \overline{B}\,, \\ \overline{A \cap B} & \text{e} & \overline{A} \cap \overline{B}\,, \\ (A \cup B)^\circ & \text{e} & A^\circ \cup B^\circ\,, \\ (A \cap B)^\circ & \text{e} & A^\circ \cap B^\circ\,. \end{array}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0GP']

E7.15 `Prerequisiti:2.112,2.110,2.121.Difficoltà:*.` *(Replaces 29W)* Sia (X, τ) uno spazio topologico. Consideriamo l'ordinamento discendente fra insiemi [†55], con questo ordinamento τ è un insieme diretto; notiamo che ha minimo, dato da $\emptyset$. [OGQ]

Supponiamo ora che la topologia sia Hausdorff. Preso poi $x \in A$, sia $\mathcal{U} = \{A \in \tau : x \in A\}$ la famiglia degli aperti che contengono x: mostrate che $\mathcal{U}$ è un insieme diretto; mostrate che ha minimo se e solo se il singoletto $\{x\}$ è aperto (e in questo caso il minimo è $\{x\}$). [†56]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0GR']

Per l'esercizio 2.121, quando $\{x\}$ non è aperto allora $\mathcal{U}$ è un insieme filtrante, e dunque può essere usato come famiglia di indici per definire un "limite" non banale (si veda la nota 6.66). Vedremo applicazioni in sezione §7.g.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E7.16 Note:*Compito del 25 Marzo 2017.*Siano (X,τ), (Y,θ) due spazi topologici con intersezione non vuota e si supponga che le topologie ristrette a $C = X \cap Y$ coincidano (cioè $\tau_{|C} = \theta_{|C}$) [†57] e che C sia aperto in entrambi le topologie (cioè $C \in \tau, C \in \theta$). Si dimostri che esiste una sola topologia σ su $Z = X \cup Y$ tale che $\sigma_{|X} = \tau$ e $\sigma_{|Y} = \theta$ e che $X, Y \in \sigma$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OGT'][UNACCESSIBLE UUID 'OGV'] [OGS]

§7.a Intorni, punti aderenti, punti isolati, punti di accumulazione [29V]

Definizione 7.17 (Intorni)**.** [†58] *Sia (X,τ) uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$.* [OGW]

- *Si chiama **intorno** di x_0 un qualunque soprainsieme di un aperto contenente x_0 .*
- *Si chiama **sistema fondamentale di intorni** di x_0 una famiglia $\{U_i\}_{i\in I}$ di intorni di x_0 con la proprietà che ogni intorno di x_0 contenga almeno uno degli U_i .*

*Diremo che U è un **intorno aperto di** x_0 semplicemente per dire che U è un aperto che contiene x_0.*

Definizione 7.18. *Siano $E, F \subseteq X$:* [OGX]

- *un punto $x_0 \in X$ si dice **aderente a** E se ogni intorno U di x_0 ha intersezione non vuota con E;*
- *un punto $x_0 \in E$ si dice **isolato in** E se esiste un intorno U di x_0 tale che $E \cap U = \{x_0\}$;*

(Notate che, in certi casi, gli insiemi possono avere al più un numero numerabile di punti isolati: si veda 9.95 e 7.98, e anche 9.96).

Definiamo inoltre questo concetto (già visto in 5.13 per il caso $X = \mathbb{R}$).

Definizione 7.19 (punto di accumulazione)**.** *Dato $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ si dice **punto di accumulazione** per A se per ogni intorno U di x si ha che $U \cap A \setminus \{x\}$ è non vuoto.* [†59] [OGY]

*L'insieme di tutti i punti di accumulazione di A si chiama **derivato** e verrà indicato con $D(A)$.*

Nella letteratura Inglese *punto di accumulazione* si traduce anche come *"limit point"* (il che può creare confusione con la definizione 9.57); per questo non useremo questa dicitura. [†60] [2BN]

Esercizi

E7.20 Verificate che nelle definizioni 7.18 e 7.19 potete equivalentemente usare, al posto degli intorni U di x_0, gli intorni aperti U di x_0. [OGZ]

E7.21 Verificate che nelle definizioni 7.18 e 7.19 potete equivalentemente usare intorni U di x_0 scelti in un sistema fondamentali di intorni fissato. [OHO]

[†54] Spesso quando si dice "A è denso in B" si ha che B è chiuso e $A \subseteq B$: in questo caso "denso" è $\overline{A} = B$.
[†55] Per riportarci formalmente alla definizione vista in 2.112 definiamo $A \preceq B \iff A \supseteq B$ e associamo l'ordinamento $\preceq$ a τ.
[†56] Notate che, il singoletto $\{x\}$ è aperto se e solo se x è un punto isolato.
[†57] Ricordiamo che $\tau_{|C} = \{B \cap C : B \in \tau\}$.
[†58] Definizione 5.6.4 negli appunti [3]
[†59] Potremmo chiamare $U \setminus \{x\}$ un "intorno bucato"; dunque stiamo chiedendo che l'intorno bucato $U \setminus \{x\}$ abbia intersezione non vuota con A; come già avevamo fatto in 5.13.
[†60] Si veda a questo proposito [43].

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E7.22 Verificate che l'insieme dei punti aderenti ad A coincide con la chiusura di A. [OH1]
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OH2']

E7.23 Prerequisiti:7.22. Verificate che $\overline{A} = A \cup D(A)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OH4'] [OH3]

E7.24 Un punto $x \in X$ è punto di accumulazione per X [†61] se e solo se il singoletto $\{x\}$ non è aperto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OH6'] [OH5]

E7.25 Argomenti:frontiera. Sia $A \subset X$. Ricordiamo la definizione di *frontiera* $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. Si noti che ∂A è chiuso: infatti posto $B = A^c$ il complementare, si verifica facilmente che $\partial A = \overline{A} \cap \overline{B}$. In particolare abbiamo mostrato che $\partial A = \partial B$. [OH7]

Mostrate che i tre insiemi $\partial A, A^\circ, B^\circ$ sono disgiunti, e che la loro unione è X; in particolare mostrate che i tre insiemi sono caratterizzati da queste tre proprietà:

- ogni intorno di x interseca sia A che B;
- esiste intorno di x contenuto in A;
- esiste intorno di x contenuto in B.

(Si veda anche 9.44 per il caso di spazi metrici). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OH8']

E7.26 Argomenti:frontiera.Difficoltà:*. [OH9]

Dato X spazio topologico e $A \subseteq X$; se A è aperto (o chiuso) la frontiera ∂A non ha parte interna; si ha $\partial A \supseteq \partial\partial A$ con uguaglianza se ∂A non ha parte interna; inoltre $\partial\partial A = \partial\partial\partial A$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OHB'][UNACCESSIBLE UUID 'OHC']

E7.27 Prerequisiti:7.23. Se (X, τ) è uno spazio topologico e $A \subset X$ non ha punti isolati, allora anche $\overline{A}$ non ha punti isolati. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OHF'] [OHD]

E7.28 Note:*compitino 12/1/2013.* Sia A un sottoinsieme aperto di X. Si dimostri che, per ogni sottoinsieme B di X, vale l'inclusione $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Si dimostri con un esempio che la conclusione non vale se si rimuove l'ipotesi che A sia aperto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OHH'] [OHG]

E7.29 Dato $E \subseteq X$, distinguiamo i punti $x \in X$ in tre insiemi distinti che sono una partizione di X. [OHJ]

- Per ogni intorno U di x, $U \setminus \{x\}$ interseca E. Questi sono i *punti di accumulazione* di E.
- $x \in E$ e esiste un intorno U di x tale che $U \cap E = \{x\}$. Questi sono i *punti isolati* in E.
- *Descrivete ora voi il terzo insieme di punti*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OHK']

§7.b Esempi [2BD]

Esercizi

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E7.30 Consideriamo su $\mathbb{R}$ le famiglia $\tau_+ = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$. Mostrate che è una topologia. È Hausdorff? Calcolate chiusura, parte interna, frontiera e derivato di questi insiemi: [OHM]

$$\{0\} \quad , \quad \{0,1\} \quad , \quad [0,1] \quad , \quad (0,1) \quad ,$$
$$[0,\infty) \quad , \quad (-\infty,0] \quad , \quad (0,\infty) \quad , \quad (-\infty,0) \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OHN']

E7.31 Prerequisiti:7.85,7.86. Sia $X = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, consideriamo la famiglia $\mathcal{B}$ di parti di X che contiene [OHP]

- gli intervalli aperti (a,b) con $a,b \in \mathbb{R}$ e $a < b$,
- le semirette $(a,+\infty] = (a,+\infty) \cup \{+\infty\}$ con $a \in \mathbb{R}$,
- le semirette $[-\infty,b) = (-\infty,b) \cup \{-\infty\}$ con $b \in \mathbb{R}$.

(Notate l'analogia degli insiemi nel secondo e terzo punto, con gli "intorni di infinito" visti in Sez. §5.a).

Si mostri che $\mathcal{B}$ verifica le proprietà *(a),(b)* viste in 7.85. Sia τ dunque la topologia generata da questa base. Lo spazio topologico (X,τ) è detto **retta estesa**, spesso indicata $\overline{\mathbb{R}}$.

Questo spazio topologico è T_2, è compatto (Esercizio 7.43), e è omoemorfo all'intervallo $[0,1]$. Può essere dotato di una distanza che genera la topologia sopra descritta.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OHQ']

E7.32 Prerequisiti:7.85,7.86. Sia $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, consideriamo questa famiglia $\mathcal{B}$ di parti di X: [OHR]

- gli intervalli aperti (a,b) con $a,b \in \mathbb{R}$ e $a < b$,
- gli insiemi $(a,+\infty) \cup (-\infty,b) \cup \{\infty\}$ con $a,b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

Si mostri che $\mathcal{B}$ verifica le proprietà *(a),(b)* viste in 7.85. Sia τ dunque la topologia generata da questa base. Lo spazio topologico (X,τ) è detto **retta compattificata a un punto**. Questo spazio topologico è T_2, è compatto (Eser. 7.44); è omeomorfo alla circonferenza (Eser. 9.170); dunque può essere dotato di una distanza che genera la topologia sopra descritta.

E7.33 Argomenti:ordinamento diretto.Prerequisiti:2.112. [OHS]

Sia $(J,\leq)$ un insieme con ordinamento diretto. Decidiamo che un "aperto" in J è un insieme A che contiene una "semiretta" della forma $\{k \in J : k \geq j\}$ (per un $j \in J$) [†62]. Sia dunque τ la famiglia di tutti tali aperti, a cui aggiungiamo $\varnothing, J$. Mostrate che τ è una topologia. Questa topologia è Hausdorff? Quali sono i punti di accumulazione?

E7.34 Argomenti:punto di accumulazione, massimo, ordinamento diretto.Prerequisiti:2.112, 7.33. [OHT]

Trovate un semplice esempio di insieme $(J,\leq)$ con ordinamento diretto che ha massimo ma, associandovi la topologia τ_J dell'esempio precedente, non ha punti di accumulazione.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OHV']

[†61] Stiamo prendendo $A = X$ nella definizione 7.19.

[†62] Potremmo chiamare un tale A un *intorno di infinito*, come già si fece in Sez. §5.a.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E7.35 Argomenti:ordinamento diretto. Prerequisiti:2.110, 2.112, 2.121. [OHW]

Sia $(I, \leq)$ un insieme con ordinamento diretto e con un massimo che chiamiamo ∞. Chiamiamo $J = I \setminus \{\infty\}$ e assumiamo che J sia filtrante (con l'ordinamento indotto) e non vuoto. In questo caso proponiamo una topologia più fine. La topologia τ per I contiene:

- $\emptyset, I$;
- gli insiemi A che contengono una "semiretta", della forma $\{k \in I : k \geq j\}$, per un $j < \infty$ (che sono detti "intorni di ∞");
- i sottoinsiemi di I che non contengono ∞.

Mostrate che τ è una topologia. Questa topologia è Hausdorff? Mostrate che ∞ è l'unico punto di accumulazione.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OHX']

La precedente costruzione si può usare in questo modo.

Nota 7.36. *Sia $(J, \leq)$ un insieme (non vuoto) con ordinamento filtrante. Sappiamo da 2.121 che J non ha massimo. Estendiamo $(J, \leq)$ aggiungendo un punto "∞": poniamo $I = J \cup \{\infty\}$ e decidiamo che $x \leq \infty$ per ogni $x \in J$. Si verifica facilmente che $(I, \leq)$ è un ordinamento diretto, e ovviamente ∞ è il massimo di I.* [†63] *Sia τ la topologia definita in 7.35. Sappiamo che ∞ è punto di accumulazione. Questa topologia può spiegare in senso topologico il limite già definito in 6.58, e altri esempi che vedremo in Sez. §7.g.* [OHY]

§7.c Topologie generate [2BJ]

Esercizi

E7.37 Prerequisiti:2.59. Sia X un insieme e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di parti di X; definiamo τ come l'intersezione di tutte le topologie che contengono $\mathcal{V}$ cioè [OJ1]

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{\sigma, \sigma \supseteq \mathcal{V}, \sigma \text{ topologia in } X\}$$

Mostrate che τ è una topologia.

τ è la *"topologia generata da $\mathcal{V}$"*; è anche detta *"la più piccola topologia che contiene $\mathcal{V}$"*.

Si vedano anche gli esercizi 7.86.

§7.d Compattezza [2BF]

Definizione 7.38. *Un sottoinsieme $K \subseteq X$ è* compatto [†64] *se da ogni famiglia di aperti $(A_i)_{i \in I}$ la cui unione $\bigcup_{i \in I} A_i$ copre K si può scegliere un numero finito $J \subset I$ di aperti la cui unione $\bigcup_{i \in J} A_i$ copre K.* [OJ3]

Se formulate questi esercizi in spazi metrici, potete usare il teorema 9.110 a pagina 138 per trattare con gli insiemi compatti.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E7.39 Supponiamo che lo spazio topologico sia compatto. Si mostri che ogni sottoinsieme chiuso è compatto. [0J4]

E7.40 Supponiamo che lo spazio topologico sia T_2 (si veda 7.4). Si mostri che ogni sottoinsieme compatto è chiuso. [0J5]

E7.41 Argomenti:compatti.Prerequisiti:7.40. Note:*Per il caso reale si può vedere 5.30. Per il caso di spazi metrici si veda 9.120.*. [0J6]

Sia (X,τ) uno spazio topologico T_2 e siano $A_n \subseteq X$ sottoinsiemi compatti non vuoti tali che $A_{n+1} \subseteq A_n$: allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Cosa succede se lo spazio non è T_2? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0J7']

E7.42 Prerequisiti:7.40. Siano (X,τ) e (Y,σ) spazi topologici, con X compatto e Y uno spazio T_2. Sia $f : X \to Y$ continua e iniettiva; si mostri che f è un omeomorfismo fra X e la sua immagine $f(X)$. [0J8]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0J9']

E7.43 Prerequisiti:7.31. Si mostri che la *retta estesa* (lo spazio topologico mostrato in 7.31) è compatta. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0JC'] [0JB]

E7.44 Prerequisiti:7.32. Si mostri che la *retta compattificata* (lo spazio topologico mostrato in 7.32) è compatta. [0JD]

Si veda anche l'esercizio 7.71 per una caratterizzazione degli insiemi compatti tramite le *reti*.

§7.e Connessione [2BG]

Definizione 7.45. *Sia (X,τ) uno spazio topologico. Dati $A,B \subseteq X$, per abbreviare le formule useremo la notazione (nonstandard)* [2BR]

- *A***i***B per dire che A,B hanno intersezione non vuota,*
- *A***d***B per dire che sono disgiunti, e*
- **n***A per dire che A non è vuoto.*

Ricordiamo la definizione di s/connessione *(Cap. 5 Sez. 11 degli appunti [3] oppure Cap. 2 in [23]).*

- *Lo spazio X è sconnesso se è l'unione disgiunta di due aperti non vuoti.*
- *Lo spazio X è connesso se non è sconnesso. Questo può essere scritto in molteplici modi, come ad esempio*

$$\forall A,B \in \tau, (\mathbf{n}A \ \wedge\ \mathbf{n}B \ \wedge\ X \subseteq A \cup B) \Rightarrow A\mathbf{i}B\ .$$

[†63] Dunque $(I,\leq)$ non è un ordinamento filtrante.

[†64] Dalla definizione si ricava che l'insieme vuoto è compatto. Alcuni testo però escludono esplicitamente questo caso.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- *Un suo sottoinsieme $E \subseteq X$ nonvuoto è sconnesso se è sconnesso con la topologia indotta; cioè se E è coperto dall'unione di due aperti, ciascuno dei quali interseca E, ma che sono disgiunti in E; in simboli,*

$$\exists A, B \in \tau, E\mathbf{i}A \ \wedge \ E\mathbf{i}B \ \wedge \ E \subseteq A \cup B \ \wedge \ A \cap B \cap E = \varnothing \, . \tag{7.46}$$

- *Similmente $E \subseteq X$ nonvuoto è connesso se è connesso con la topologia indotta. Questo si può scrivere così*

$$\forall A, B \in \tau, (E\mathbf{i}A \ \wedge \ E\mathbf{i}B \ \wedge \ E \subseteq A \cup B) \Rightarrow A \cap B \cap E \neq \varnothing \, . \tag{7.47}$$

o equivalentemente

$$\forall A, B \in \tau, (E \subseteq A \cup B \wedge A \cap B \cap E = \varnothing) \Rightarrow (E \subseteq A \vee E \subseteq B) \, . \tag{7.48}$$

Nota 7.49. *È consuetudine assumere che l'insieme vuoto sia connesso; questo caso però è di scarso interesse, in genere lo escluderemo nei seguenti esercizi.* [2BS]

Vi sono molte maniere equivalenti di esprimere le precedenti definizioni; le lasciamo come (semplici) esercizi. Questo Lemma inoltre potrebbe essere utile.

Lemma 7.50. *Se $Y \subseteq X$ è connesso e $Y \subseteq E \subseteq \overline{Y}$, allora E è connesso.* [2FY]

Per la dimostrazione sia veda il Teorema 5.11.6 in [3], o Theorem 20 nel Chap. 1 in [15].

Esercizi

E7.51 Mostrate che le condizioni (7.47),(7.48) in 7.45 sono equivalenti. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2BV'] [2BT]

E7.52 Lo spazio X è sconnesso se e solo se è l'unione disgiunta di due chiusi non vuoti. [0JF]

E7.53 Un sottoinsieme $E \subseteq X$ nonvuoto è sconnesso se E è coperto dall'unione di due chiusi, ciascuno dei quali interseca E, ma che sono disgiunti dentro E. [0JG]

E7.54 Prerequisiti:7.45. X è sconnesso se e solo se esistono $A, B \subseteq X$ nonvuoti la cui unione copre X, ma tali che $\overline{B}\mathbf{d}A$ e $B\mathbf{d}\overline{A}$. [0JH]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0JJ']

E7.55 Difficoltà:*. Supponiamo che $E \subseteq X$ sia sconnesso, possiamo supporre che [0JK]

$$\exists A, B \in \tau, E\mathbf{i}A \ \wedge \ E\mathbf{i}B \ \wedge \ E \subseteq A \cup B \ \wedge \ A\mathbf{d}B \, . \tag{7.56}$$

cioè che esistano di due aperti disgiunti, ciascuno dei quali interseca E e che E sia coperto dalla loro unione?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0JM'][UNACCESSIBLE UUID '0JP'] Si veda anche 9.77.

E7.57 Sia (X, τ_X) uno spazio topologico, e $Y \subseteq X$ lo spazio topologico con la topologia indotta [2DK]

$$\tau_Y = \{A \cap Y \, : \, A \in \tau_X\} \, .$$

Fissato $E \subseteq Y$, si considerino queste affermazioni.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

(cX) E è connesso nello spazio topologico (X, τ_X);

(cY) E è connesso nello spazio topologico (Y, τ_Y).

Le due asserzioni sono equivalenti?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '113']

E7.58 Note:*Proposizione 5.11.2 appunti [3].* [2BW]

Un insieme $E \subseteq X$ è disconnesso se e solo se esiste una funzione continua $f : E \to \mathbb{R}$ che assume esattamente due valori, ad esempio $f(E) = \{0, 1\}$.

E7.59 Note:*Teorema 5.11.7 appunti [3].* [0JQ]

Sia I una famiglia di indici. Si mostri che se E_i è una famiglia di sottoinsiemi connessi di X tali che

$$\forall i, j \in I\,,\ E_i \cap E_j \neq \varnothing\,,$$

allora $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ è connesso.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0JR']

Definizione 7.60. *Dato $x \in X$, diremo che la **componente connessa** di X contenente x è l'unione di tutti i connessi che contengono x (e notiamo che il singoletto $\{x\}$ è connesso). L'esercizio precedente 7.59 mostra che la* componente connessa *è, per l'appunto, un connesso.* [0JT]

Esercizi

E7.61 Note:*Sezione 5.11.2 negli appunti [3].* Si mostri che due componenti connesse o sono disgiunte o coincidono. Dunque lo spazio X si partiziona in componenti connesse. [0JV]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0JW']

E7.62 Sia $C \subseteq X$ un insieme chiuso; sia K una componente connessa di C: si mostri che K è chiuso. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0JZ'] [0JY]

E7.63 Si trovi un esempio di uno spazio (X, τ) dove vi è una componente connessa che non è aperta. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2G0'] [2FZ]

E7.64 Sia ora (X, d) uno spazio metrico dove le palle aperte $B(x, r)$ sono anche chiuse. Si mostri che le componenti connesse di X sono tutti e solo i singoletti $\{x\}$. [0KO]

(Uno spazio dove gli unici connessi sono singoletti è detto *totalmente disconnesso*).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0K1']

[UNACCESSIBLE UUID '2GX']

Si vedano anche gli esercizi in Sez. §9.e.

§7.f Reti [2B6]

Useremo i concetti di *ordinamento diretto*, *ordinamento filtrante* e *insieme cofinale* già discussi in Sez. §2.d.a. Sia nel seguito (Y, σ) uno spazio topologico Hausdorff.

Definizione 7.65. *Sia (Y, σ) spazio topologico Hausdorff. Sia $(J, \leq)$ un insieme con ordinamento filtrante (definita in 2.110). Sia $\varphi : J \to Y$ una **rete** (già incontrata in Sez. §6.d).* [0K4]

Si pone $\lim_{j \in J} \varphi(x) = \ell \in Y$ se e solo se, per ogni intorno V di ℓ in Y si ha che $\varphi(j) \in V$ definitivamente per $j \in J$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

La definizione di *definitivamente* è in 2.125, e significa che esiste $k \in J$ tale che per ogni $j \geq k$ si ha $\varphi(j) \in V$.

Anche in questo case vale quanto discusso nella nota 6.57.

Definizione 7.66. *Data una rete $x : J \to Y$, un punto $z \in Y$ si dice **punto limite** per x se esiste una sottorete $y : H \to Y$ tale che $\lim_{j\in H} y(j) = z$.* [2B4]

(Notate che "sottorete" si intende come nel caso generale visto alla fine di 6.59, dove $y = x \circ i$ per mezzo di una mappa $i : H \to J$ che soddisfa (6.60)).

Esercizi

E7.67 `Prerequisiti:2.121.` Sia J un insieme diretto ma non filtrante; allora sia $m \in J$ il suo massimo (che esiste per quanto visto in 2.121); se definiamo $\lim_{j\in J} \varphi(x)$ come in 7.65, mostrate che il limite esiste sempre e vale $\varphi(m)$. [0K5]

E7.68 Sia (Y, σ) spazio topologico Hausdorff, sia $A \subseteq Y$. Si mostri che $\overline{A}$ coincide con l'insieme di tutti i possibili limiti di reti $\varphi : J \to A$ (al variare della scelta di J e poi di φ). [0K6]

E7.69 Sia (Y, σ) spazio topologico Hausdorff, sia $A \subseteq Y$. Si mostri che $x \in Y$ è punto di accumulazione per A se e solo se esiste un J insieme filtrante e esiste una rete $\varphi : J \to A \setminus \{x\}$ tale che $\lim_{j\in J} \varphi(x) = x$. [0K7]

E7.70 `Prerequisiti:2.115,6.59.Difficoltà:**.` [2B7]

Sia (Y, σ) uno spazio topologico Hausdorff. Sia J un insieme filtrante e $x : J \to Y$ una rete in Y. Per ogni $\alpha \in J$ definiamo $E_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x_\beta : \beta \in J, \beta \geq \alpha\}$ e

$$E = \bigcap_{\alpha\in J} \overline{E_\alpha}$$

Mostrate che E coincide con l'insieme L dei punti limite (definito in 7.66).

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '2FK']`

E7.71 `Prerequisiti:2.115,6.59,7.70.Difficoltà:**.` [0K8]

Sia (Y, σ) uno spazio topologico Hausdorff. Mostrate che Y è compatto se e solo se ogni rete a valori in Y ammette una sottorete convergente.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '0K9']`

§7.g Continuità e limiti [2B8]

Definizione 7.72 (Limite)**.** [†65] *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici, con (Y, σ) Hausdorff.* [†66] *Sia $E \subseteq X$ e $f : E \to Y$. Sia inoltre x_0 un punto di accumulazione di E in X. Si pone $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in Y$ se e solo se, per ogni intorno V di ℓ in Y, esiste U intorno di x_0 in X tale che $f(U \cap E \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.* [0KB]

Definizione 7.73. *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici, con (Y, σ) Hausdorff; sia $f : X \to Y$ una funzione.* [2B9]

*Si dice che f è **continua in** x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

*Si dice che f è **continua** se (equivalentemente)*

[†65] Definizione 5.7.2 negli appunti [3].

[†66] Per avere unicità del limite e dunque dare un significato univoco a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ come elemento di Y.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- *f è continua in ogni punto, cioè $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$ per ogni $y \in X$, oppure*
- *se $f^{-1}(A) \in \tau$ per ogni $A \in \sigma$.*

(Teor. 5.7.4 negli appunti [3].).

*Una funzione continua bigettiva $f : X \to Y$ tale che la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ sia di nuovo continua, è detta **omeomorfismo**.*

Esercizi

E7.74 Considerate questa affermazione. [2BB]

(Proposto il 2022-12)

«Sia $f : X \to Y$ e $x_0 \in X$, allora f è continuo in x_0 quando, per ogni insieme aperto $B \subseteq Y$ con $f(x_0) \in B$, abbiamo che $f^{-1}(B)$ è aperto.»

Questa affermazione non è corretta.

Costruite un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua in $x_0 = 0$ ma tale che, per ogni $J = (a, b)$ intervallo limitato aperto non vuoto, $f^{-1}(J)$ non è aperto. *Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID '2BC']`

E7.75 `Difficoltà:*.` [225]

Sia Y uno spazio topologico. Diciamo che Y soddisfa la proprietà (P) rispetto ad uno spazio topologico X quando soddisfa la condizione: per ogni $A \subseteq X$ denso ed per ogni coppia di funzioni continue $f, g : X \to Y$ tali che $f(a) = g(a)$ per ogni $a \in A$ si ha necessariamente che $f = g$.

Dimostrare che Y è di Hausdorff se e solo se soddisfa la proprietà (P) rispetto ad ogni spazio topologico X.

E7.76 `Prerequisiti:7.36.` Spiegate come la definizione 7.65 si può vedere come un caso particolare della 7.72. (Sugg. procedete come in nota 7.36 e ponete $E = J, X = I, x_0 = \infty$). [0KC]

E7.77 `Prerequisiti:7.76.` Siano X, Y spazi topologici Hausdorff. Sia $E \subseteq X$, sia $f : E \to Y$, sia x_0 un punto di accumulazione di E in X. [0KD]

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ allora, per ogni rete $\varphi : J \to X$ con $\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$ si ha $\lim_{j\in J} f(\varphi(j)) = \ell$.
- Consideriamo l'insieme filtrante J dato dagli intorni di x_0; [†67] consideriamo le reti $\varphi : J \to X$ con la proprietà che $\varphi(U) \in U \setminus \{x_0\}$ per ogni $U \in J$; notiamo che si ha $\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$.
  Se per ogni tale rete si ha $\lim_{j\in J} f(\varphi(j)) = \ell$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '0KF']`

E7.78 `Prerequisiti:7.67,7.76.` Siano X, Y spazi topologici Hausdorff. Sia $f : X \to Y$, $x_0 \in X$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti. [0KG]

1. f è continua in x_0;

[†67] Il fatto che questo sia filtrante è stato mostrato in 2.121, 7.15 e 7.24

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

2. per ogni rete $\varphi : J \to X$ tale che

$$\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$$

si ha

$$\lim_{j\in J} f(\varphi(j)) = f(x_0) \quad .$$

Suggerimento per dimostrare che 2 implica 1. Supponiamo che x_0 sia punto di accumulazione. Consideriamo l'insieme filtrante J dato dagli intorni di x_0; consideriamo le reti $\varphi : J \to X$ con la proprietà che $\varphi(U) \in U$ per ogni $U \in J$; notiamo che si ha $\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0KH']

§7.h Basi

[2B5]

Definizione 7.79 (Base)**.** *Dato uno spazio topologico (X, τ), una **base** [†68] è una collezione $\mathcal{B}$ di aperti (cioè $\mathcal{B} \subseteq \tau$) con la proprietà che ogni elemento di τ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.* [0KK]

Per esempio, se X è uno spazio metrico, allora la famiglia di tutte le palle aperte è una base.

Esercizi

E7.80 Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X; preso un aperto $A \in \tau$, per ogni $x \in A$ possiamo scegliere un $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x$, e tali che $A = \bigcup_{x\in A} B_x$. [0KM]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0KN'][UNACCESSIBLE UUID '0KP']

E7.81 Prerequisiti:7.80. Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X. Mostrate che, dato $x \in X$, [0KQ]

$$\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

è un sistema fondamentale di intorni di x .

E7.82 Prerequisiti:7.21, 7.81, 7.80. Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X. Mostrate che, dato $A \subseteq X$, si ha che [0KS]

$$A^\circ = \underline{\bigcup}\{B \in \mathcal{B} : B \subseteq A\}$$

mentre

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall B \in \mathcal{B}, x \in B \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset\}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0KT']

E7.83 Prerequisiti:7.80. Dato X, date $\mathcal{C}$ base per una topologia σ su X, e $\mathcal{B}$ base per una topologia β su X, si ha che $\sigma \supseteq \beta$ se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni $B \in \mathcal{B}, B \ni x$ esiste $C \in \mathcal{C}, C \ni x, C \subseteq B$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0M8'] [0M7]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E7.84 Prerequisiti:7.37. Sia $X = \{1,2,3\}$ e sia $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$; sia τ la più piccola topologia che contiene $\mathcal{B}$, mostrate che $\mathcal{B}$ non è una base per τ. [OKV]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKW']

È dunque interessante cercare di capire quando una famiglia $\mathcal{B}$ può essere base per una topologia.

E7.85 Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X; allora valgono le due proprietà seguenti. [OKX]

(a) $\underline{\bigcup}\mathcal{B} = X$ cioè l'unione di tutti gli elementi della base è X.

(b) Dati $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ esiste $B_3 \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OKY']

E7.86 Prerequisiti:7.37,ZF:4. Viceversa sia X un insieme e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi che verifica le precedenti proprietà *(a),(b)* viste in 7.85. Sia σ la famiglia degli insiemi che si ottengono come unione di elementi di $\mathcal{B}$, in simboli [†69] [OKZ]

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigcup_{i\in I} A_i \,:\, I \text{ famiglia di indici e } A_i \in \mathcal{B} \forall i \in I \right\} ;$$

si intende che anche $\emptyset \in \sigma$. Si mostri che σ è una topologia.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OMO']

E7.87 Prerequisiti:topologia generata 7.37, 7.85, 7.86. Riprendiamo 7.86. Sia di nuovo X un insieme e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi che verifica le precedenti proprietà *(a),(b)* viste in 7.85; sia τ la più piccola topologia che contiene $\mathcal{B}$. Si verifichi $\mathcal{B}$ è una base per τ. [OM1]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OM2']

Possiamo dunque dire che una famiglia che soddisfa *(a),(b)* è una base per la topologia che essa genera. Questo risponde all'interrogativo posto in 7.84.

E7.88 Prerequisiti:7.37,7.85,7.86. Siano ora $X_1, \dots X_n$ spazi topologici con topologie rispettivamente $\tau_1, \dots \tau_n$; sia $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ il prodotto cartesiano. Applichiamo i precedenti risultati per definire la **topologia prodotto** τ: questa si può vedere in due maniere equivalenti. [OM3]

- Unione di tutti i prodotti cartesiani di aperti [†70]

$$\tau = \left\{ \bigcup_{j\in J} \prod_{i=1}^{n} A_{i,j} \,:\, A_{1,j} \in \tau_1, \dots A_{n,j} \in \tau_n \forall j \in J, J \text{ famiglie arbitrarie di indici} \right\} .$$

- τ è la più piccola topologia che contiene i prodotti cartesiani di aperti.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OM4']

E7.89 Prerequisiti:7.88,7.85,7.86. Siano ora $X_1, \dots X_n$ spazi topologici con topologie ri- [OM5]

[†68] Si veda [15] pag. 46, o capitolo 5 sezione 6 definizione 5.6.4 negli appunti [3], o [44] per una introduzione.

[†69] Come già discusso in ZF:4, si potrebbe anche usare la notazione più compatta $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \underline{\bigcup}\mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \right\}$.

[†70] Così definita all'inizio della sezione 6 del capitolo 5 degli appunti [3].

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

spettivamente $\tau_1, \dots \tau_n$ e siano $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots \mathcal{B}_n$ basi per questi spazi; sia $X = \prod_{i=1}^n X_i$ il prodotto cartesiano, e sia

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^n A_i \, : \, A_1 \in \mathcal{B}_1, A_2 \in \mathcal{B}_2, \dots A_n \in \mathcal{B}_n \right\}$$

la famiglia di tutti i prodotti cartesiani di elementi scelti dalle rispettive basi. Mostrate che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia prodotto. (Questo esercizio generalizza il precedente 7.88, prendendo $\mathcal{B}_i = \tau_i$).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0M6']

Vedete anche l'esercizio 9.51 per una applicazione al caso di spazi metrici.

E7.90 Prerequisiti:7.88,7.89,7.83. Siano ora, più in generale, I un'insieme non vuoto di indici, e siano (X_i, τ_i) spazi topologici , al variare di $i \in I$; siano $\mathcal{B}_i$ basi per τ_i. (La scelta $\mathcal{B}_i = \tau_i$ è ammissibile). [2F7]

Sia $X = \prod_{i \in I} X_i$ il prodotto cartesiano.

Definiamo la *topologia prodotto* τ su X, similmente a 7.88, ma con una differenza.

Una base $\mathcal{B}$ per τ è data dalla famiglia di tutti gli insieme della forma $A = \prod_{i \in I} A_i$ dove

$$\forall i \in I, A_i \in \mathcal{B}_i \vee A_i = X_i \ ,$$

e inoltre $A_i = X_i$ eccetto eventualmente un numero finito di i.

Dimostrate che $\mathcal{B}$ soddisfa i requisiti visti in 7.85, dunque è una base per la topologia τ che essa genera. Dimostrate che la topologia prodotto τ non dipende dalla scelta delle basi $\mathcal{B}_i$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2F8']

E7.91 Prerequisiti:2.112, 7.85. Verifichiamo che quanto espresso in 7.15 vale anche per le "basi". Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X; consideriamo l'ordinamento discendente fra insiemi (formalmente $A \preceq B \iff A \supseteq B$); con questo ordinamento $(\mathcal{B}, \preceq)$ è un insieme diretto, il cui minimo è $\varnothing$. Supponiamo ora che la topologia sia Hausdorff. Preso poi $x \in X$, sia $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{B} \, : \, x \in A\}$ la famiglia degli elementi della base che contengono x: mostrate che $\mathcal{U}$ è un insieme diretto; mostrate che ha minimo se e solo se il singoletto $\{x\}$ è aperto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0MB'] [0M9]

E7.92 Si consideri un insieme totalmente ordinato X (con almeno due elementi), e la famiglia $\mathcal{F}$ di tutti gli intervalli aperti [2F5]

$$(x, \infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in X \, : \, x < z\} \ , \quad (-\infty, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in X \, : \, z < y\} \ ,$$
$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in X \, : \, x < z < y\} \tag{7.93}$$

per tutti $x, y \in X$. (*Cf.* 2.142.) Dimostrare che questa è una base per una topologia, *i.e.* che soddisfa 7.86. Quindi $\mathcal{F}$ è una base per la topologia τ che essa genera. Questa topologia τ è chiamata **topologia d'ordine**.

Se X non ha né massimo né minimo, allora gli intervalli (x, y) da soli sono già una base per τ. Questo è il caso delle usuali topologie in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$.

E7.94 Prerequisiti:7.90. Si considerino spazi topologici (X_i, τ_i), ciascuno con la topologia discreta (e ciascuno X_i ha almeno due elementi). Sia $I = \mathbb{N}$ o $I = \{0, 1, \dots N\}$; [2FD]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

definiamo $X = \prod_{i\in I} X_i$ il prodotto cartesiano. Definiamo la *topologia prodotto* τ su X, come definito in 7.90. Mostrate una semplice base per questa topologia. Inoltre, se $I = \mathbb{N}$, mostrate che la topologia τ non è la topologia discreta.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2FF']

E7.95 Prerequisiti:7.92,7.90,2.131,7.90. [2F9]

Si considerino insiemi totalmente ordinati $(X_i, \leq_i)$ (con almeno due elementi), e le associate *topologia d'ordine* τ_i.

Sia $I = \mathbb{N}$ o $I = \{0, 1, \dots N\}$; definiamo $X = \prod_{i\in I} X_i$ il prodotto cartesiano.

Si considerino queste due topologie.

- Definiamo la *topologia prodotto* τ su X, come definito in 7.90.
- Dotiamo X dell' ordine lessicografico $\preceq$, e poi della topologia d'ordine σ. (Si rivedano 2.131,7.90)

Quale relazione di inclusione si ha fra σ e τ?

Se ciascun X_i è finito, dimostrate che queste due topologie coincidono [†71].

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2FC']

§7.i Spazi primo- e secondo-numerabili [2BK]

Definizione 7.96. *Uno spazio topologico soddisfa il primo assioma di numerabilità se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni che sia numerabile.* [OMC]

Definizione 7.97. *Uno spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità se esiste una base numerabile.* [OMD]

Esercizi

E7.98 Difficoltà:*. Se (X, τ) soddisfa il secondo assioma di numerabilità, se $A \subseteq X$ è composto solo da punti isolati, allora A ha cardinalità numerabile o finita. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0MG'] [OMF]

E7.99 Prerequisiti:7.82. Se (X, τ) soddisfa il secondo assioma di numerabilità, dato $A \subseteq X$ esiste un sottoinsieme numerabile $B \subseteq A$ tale che $\overline{B} \supseteq A$. In particolare l'intero spazio X ammette un sottoinsieme numerabile denso: si dice che X è *separabile*. Il viceversa vale ad esempio negli spazi metrici, si veda 9.46. Si veda anche 9.91 per un applicazione in $\mathbb{R}^n$. [OMH]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0MJ']

Gli assiomi di numerabilità ritorneranno negli esercizi 9.45 e 9.46.

§7.j Spazi non primo-numerabili [2BM]

Esercizi

E7.100 [†72] Prerequisiti:7.90,7.79.Difficoltà:*. Sia Ω un insieme non vuoto; consideriamo $X = \mathbb{R}^{\Omega}$. [OMM]

[†71] Notate che la topologia d'ordine su un insieme finito coincide con la topologia discreta; usate 7.94.

[†72] Questi due esercizi 7.100,7.101, sono tratti da un testo originalmente pubblicato dal Prof. Ricci in http://dida.sns.it/dida2/cl/08-09/folde0/pdf9 nel Marzo 2014.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

1. Siano
$$U^f_{E,\rho} = \{g \in X, \forall x \in E, |f(x) - g(x)| < \rho\}$$
dove $f \in X$, $\rho > 0$ e $E \subset \Omega$ finito. Mostrate che la famiglia di questi $U^f_{E,\rho}$ soddisfa i requisiti di 7.86, ed è dunque una *base* per una topologia τ (Sugg. usate 7.90). Questa topologia è la *topologia prodotto* delle topologie di $\mathbb{R}$.

   In particolare per ciascun $f \in X$ gli insiemi $U^f_{E,\rho}$ sono un sistema fondamentale di intorni.
2. Verificate che la topologia è T_2.
3. Notate che X è uno spazio vettoriale, e mostrate che l'operazione di somma è continua, come operazione $X \times X \to X$; a questo scopo, mostrate che se $f, g \in X, h = f + g$, per ogni intorno V_h di h esistono intorni V_f, V_g di f, g tali che $V_f + V_g \subseteq V_h$.
4. Dati $B_i \subset \mathbb{R}$ aperti non-vuoti , uno per ciascun $i \in \Omega$, mostrate che $\prod_i B_i$ è aperto se e solo se $B_i = \mathbb{R}$ salvo al più finiti i.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0MN']

E7.101 Prerequisiti:7.79,7.100,7.65.Difficoltà:*.Sia Ω un insieme infinito più che numerabile; consideriamo $X = \mathbb{R}^\Omega$ con la topologia τ vista in 7.100. [2BP]

1. Mostrate che ogni punto in (X, τ) non ammette un sistema fondamentale numerabile di intorni.
2. Posto
$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in X, f(x) \neq 0 \text{ per al più numerabili } x \in \Omega\} \tag{7.102}$$
mostrate che si ha $\overline{C} = X$;
3. che se $(f_n) \subset C$ e $f_n \to f$ puntualmente allora $f \in C$.
4. Sia I l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di Ω, questo è un insieme filtrante se ordinato per inclusione; consideriamo la rete
$$\varphi : I \to X \quad , \varphi(A) = \mathbb{1}_A$$
si ha che $\forall A \in I, \varphi(A) \in C$ ma
$$\lim_{A \in I} \varphi(A) = \mathbb{1}_X \notin C \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2BQ']

E7.103 Difficoltà:*.Restringiamo la topologia descritta nell'esempio precedente all'insieme $Y = [0,1]^{[0,1]}$ (cioè, restringiamo $\mathbb{R}$ a $[0,1]$, e poniamo $\Omega = [0,1]$). Trovate una successione $(f_n) \subset Y$ che non ammetta una sottosuccessione convergente. [OMP]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0MQ']

Ricordiamo la definizione 7.38: uno spazio X è "compatto per ricoprimenti" *se, per ogni $(A_i)_{i \in I}$ famiglia di aperti tale che $\bigcup_{i \in I} A_i = X$, esiste una sotto famiglia finita $J \subset I$ tale che $\bigcup_{i \in J} A_i = X$. Sappiate che, per un importante teorema dovuto a Tychonoff, questo spazio Y è "compatto per ricoprimenti". Questo esercizio vi mostra invece che Y non è "compatto per successioni".*

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§8 Miscellanea [2FB]

Questa sezione ospita materiale che non rientrava pienamente in nessun'altra sezione.

§8.a Poligoni [2G3]

Presentiamo alcune semplici proprietà geometriche dei poligoni, che possono essere rigorosamente provate sia con metodi analitici (incorporando oggetti geometrici come sottoinsiemi del piano cartesiano), o metodi puramente geometrici (nello spirito di [12]).

Nel seguito useremo il celebre Teorema di Jordan; una semplice dimostrazione si può trovare in [27].

Teorema 8.1. *Sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva semplice chiusa nel piano e $C = \varphi([0,1])$ sia il suo supporto. (Si veda 20.11 per la definizione). Il complementare $\mathbb{R}^2 \setminus C$ è costituito esattamente da due componenti connesse, che sono aperte. Una di questi componenti è limitata (ed è chiamato* "l'interno della curva"*, o anche* "la regione delimitata dalla curva"*) e l'altro è illimitato (l'esterno). La curva C è la frontiera di ognuna delle due componenti.* [2FW]

La dimostrazione del Teorema di Jordan inizia spesso con un semplice Lemma (di nuovo, si veda [27]; o il Teorema 6 in [12]).

Definizione 8.2. *Chiameremo* "curva poligonale" *una curva $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ nel piano, spezzata (cioè, lineare a tratti) e non autointersecantesi (cioè, iniettiva). Analiticamente, vi sono punti $V_0, V_1, \dots V_n$ (chiamati "vertici") nel piano, e vi sono $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = 1$ tali che* [2G6]

$$\varphi(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} V_{i+1} + \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} V_i \quad \text{quando} \quad t_i \le t \le t_{i+1} \, .$$

La curva poligonale *è chiusa se $\varphi(0) = \varphi(1)$. In questo caso richiediamo che φ sia iniettiva quando ristretta a $[0,1)$.*

Lemma 8.3. *Sia $C = \varphi([0,1])$, sia P la regione delimitata dalla curva poligonale chiusa, e sia E l'esterno; ricordiamo che C, P, E è una partizione del piano. Fissiamo $A, B \notin C$ e supponiamo che il segmento AB intersechi C in k punti, nessuno dei quali sia un vertice; allora, se k è dispari A, B sono in regioni diverse, cioè $A \in P \Leftrightarrow B \notin P$; se k è pari, A, B sono nella stessa regione.* [2FX]

Definizione 8.4. *Un* poligono *è la figura piana delimitata da una curva poligonale chiusa.* [†73] [2FN]

Nota 8.5. *Consideriamo una curva poligonale, con n vertici $V_1, \dots V_n$. Quanti lati ha il poligono che essa delimita?* [2CD]

Dipende. Se alcuni vertici in sequenza sono allineati, allora la figura nel piano avrà visivamente meno di n lati e vertici. Per questo motivo, distingueremo il poligono non etichettato *(che è il sottoinseme del piano) dal* poligono etichettato *(in cui teniamo conto anche della posizione dei vertici); il* poligono etichettato *è meno intuitivo, ma la trattazione matematica è più semplice. Si veda la figura 3 a pagina 122.*

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA



Figura 2: Esempi di poligoni con molti lati (pari o dispari) e solo due orecchie. Figura per 8.8

Esercizi

E8.6 Difficoltà:∗. Sia $n \geq 3$ intero; consideriamo un poligono di $n+1$ vertici. Si mostri che può essere tagliato in due poligoni con rispettivamente h, k lati, e $3 \leq h \leq n$, $3 \leq k \leq n$. Per "tagliare" intendiamo, collegare due vertici (non contigui) del poligono con un segmento che passa internamente, e che non tocca altri vertici o lati. L'intersezione dei due poligoni è il segmento BD, e non hanno altri punti in comune. [29Z]

Sugg. esiste almeno un vertice B in cui l'angolo interno β è "convesso" (cioè $0 < \beta \leq \pi$ radianti); siano A, C i vertici contigui; si ragioni sul triangolo ABC.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QT']

E8.7 Dimostrate per induzione che la somma degli angoli interni di un poligono di $n \geq 3$ lati è $(n-2)\pi$. [1XH]

(La dimostrazione è facile se il poligono è convesso; nel caso generale 8.8 può essere utile).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1XM']

E8.8 Un *orecchio* di un poligono è il triangolo ABC formato da tre vertici consecutivi A, B, C del poligono, tali che il segmento AC si trova all'interno del poligono. Ciò implica che il triangolo ABC non contiene alcun punto della curva poligonale al suo interno; e che i due segmenti AB, BC possono essere rimossi dal poligono e sostituiti con AC per creare un nuovo poligono. Due orecchie sono *disgiunte* se le loro parti interne non si intersecano, o in modo equivalente se non hanno un lato in comune. [0JN]

Dimostrate il *teorema delle due orecchie*: ogni poligono (con almeno quattro vertici) ha almeno due orecchie disgiunte. (Vedere [18, 42] per più dettagli).

(Sugg. considerate poligoni etichettati, per evitare le complicazioni di situazioni come quella presentata in figura 3 nella pagina seguente.)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2FV']

E8.9 Difficoltà:∗. Si mostri che ogni poligono può essere *"triangolato"*, cioè decomposto come unione di triangoli che non si sovrappongono. [†74] [1XW]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1XX']

E8.10 Di nuovo, diremo che un vertice B è "convesso" se l'angolo interno β è convesso (cioè $0 < \beta \leq \pi$ radianti). Dimostrate che il poligono è convesso se e solo se tutti i suoi vertici sono convessi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2G5'] [2FP]

[†73] La curva poligonale è parte del poligono. Vi sono anche altre definizioni, si veda ad esempio in [60].

[†74] I triangoli possono sovrapporsi lungo i lati e/o nei vertici.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

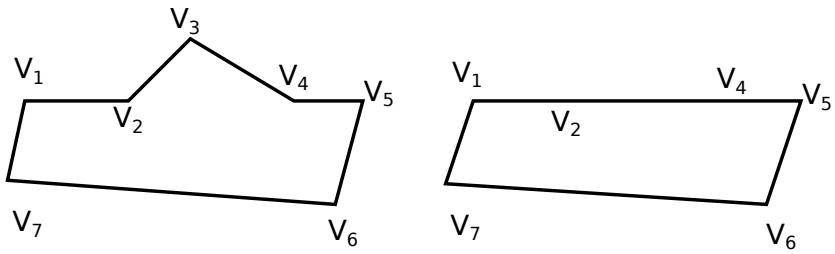


Figura 3: Un poligono per cui la rimozione di un orecchio fa decrescere il numero di lati (non etichettati) da 7 a 4.

§8.b Insieme di Cantor

Sia nel seguito $C \subset \mathbb{R}$ l'insieme ternario di Cantor. Non riportiamo qui la costruzione (che si trova su innumerevoli testi, ad esempio in Sez. 2.44 in [23]; e anche su Wikipedia [53]).

Esercizi

E8.11 *(Replaces 0W4)* Mostrate che C è chiuso, e composto solo di punti di accumulazione; dunque è un *insieme perfetto*. [09S]

E8.12 Sia $I = \{0, 2\}$ e $X = I^{\mathbb{N}}$, si consideri la mappa $F : X \to C$ data da [09T]

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-1} x_n \, .$$

Si mostri che è una bigezione.

Dotiamo ora X della topologia definita in 7.95. [†75]. Si mostri che F è un omeomorfismo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '09V']

Si vedano anche 10.22, 9.151, 9.60.

[†75]Notate che la topologia d'ordine su $I = \{0, 2\}$ coincide con la topologia discreta.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§9 Spazi metrici [OMR]

§9.a Definizioni [2CC]

Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme (non vuoto) con associata una distanza d.

Definizione 9.1. *Una **distanza** è una funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$ che gode delle seguenti proprietà:* [OMS]

- $d(x, x) = 0$*;*
- *(proprietà di separazione) se $d(x, y) = 0$ allora $x = y$;*
- *(simmetria) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;*
- *(diseguaglianza triangolare) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.*

Un esempio è dato da $\mathbb{R}^n$ con la distanza Euclidea $d(x, y) = |x - y|$.

Definizione 9.2. *Dati una successione $(x_n)_n \subseteq X$ e $x \in X$,* [OMT]

- *diremo che "$(x_n)_n$ **converge a** x" se $\lim_n d(x_n, x) = 0$; scriveremo anche $x_n \to_n x$ per indicare che la successione converge a x.*
- *Diremo che "$(x_n)_n$ **è una successione di Cauchy**" se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \, , \ \forall n, m \geq N \ \ d(x_n, x_m) < \varepsilon \ .$$

Esempio 9.3. *Dato un insieme X, possiamo sempre associargli la **distanza discreta*** [2C1]

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

La topologia generata è la topologia discreta *in cui tutti i sottoinsiemi di X sono aperti.*

[Nota. Se non siete familiari con il concetto di spazio metrico, potete assumere che $X = \mathbb{R}^n$ e $d(x, y) = |x - y|$ in tutti gli esercizi.]

Esercizi

E9.4 Data una successione $(x_n)_n \subseteq X$ mostrate che se converge a un punto allora è di Cauchy. [OMV]

E9.5 Data una successione $(x_n)_n \subseteq X$ mostrate che: se converge a x e converge a y, allora $x = y$. [OMW]

Questo risultato è noto come *Teorema dell'unicità del limite*.

E9.6 Generalizziamo la definizione di *spazio metrico* assumendo che $d : X \to [0, \infty]$ (gli altri assiomi sono uguali). Mostrate che la relazione $x \sim y$ definita da [OMX]

$$x \sim y \iff d(x, y) < \infty$$

è una relazione di equivalenza, e che le classi di equivalenza sono aperte, e dunque sono sconnesse una dall'altra.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0MY']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E9.7 Date f, g continue su $\mathbb{R}$, si ponga [OMZ]

$$d(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \, .$$

Si dimostri che d è una distanza su $X = C(\mathbb{R})$, nel senso esteso dell'esercizio 9.6.

Sia $f \sim g \iff d(f,g) < \infty$ come prima, si mostri che la famiglia delle classi di equivalenza $X/\sim$ ha la cardinalità del continuo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ON0']

E9.8 Prerequisiti:9.39.Note:*Vedere anche eserc. 14.49.* Supponiamo che $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ sia monotona debolmente crescente e subadditiva, cioè $\varphi(t) + \varphi(s) \geq \varphi(t+s)$ per ogni $t, s \geq 0$; e supponiamo che $\varphi(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. [ON1]

Allora $\varphi \circ d$ è ancora una distanza. Esempi: $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $\varphi(t) = t/(1+t)$, $\varphi(t) = \arctan(t)$, $\varphi(t) = \min\{t, 1\}$.

Mostrate inoltre che se φ è continua in zero allora la topologia associata è la stessa. [†76]
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ON2']

E9.9 Se $(x_n)_n \subset X$ è una successione e $x \in X$, si mostri che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ se e solo se, per ogni sotto–successione n_k esiste una sotto–sotto–successione n_{k_h} tale che $\lim_{h\to\infty} x_{n_{k_h}} = x$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'ON4'] [ON3]

E9.10 Una successione $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy se e solo se [ON5]

$$\lim_{N\to\infty} \sup\{d(x_n, x_m) : n \geq N, m \geq N\} = 0 \, .$$

E9.11 Una successione $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy se e solo se esiste una successione ε_n con $\varepsilon_n \geq 0$ e $\varepsilon_n \to_n 0$ per cui per ogni n e ogni $m \geq n$ si ha $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon_n$. [ON6]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ON7']

E9.12 Se $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy e esistono x e una sottosuccessione n_m tale che $\lim_{m\to\infty} x_{n_m} = x$ allora $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. [ON8]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ON9']

Questo "lemma" è usato in alcune dimostrazioni importanti, ad esempio per mostrare che uno spazio metrico compatto è anche completo.

E9.13 Sia $\varepsilon_n > 0$ una successione decrescente infinitesima. Se $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy esiste una sottosuccessione n_k tale che [ONC]

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall h \in \mathbb{N},\ h > k \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_h}) \leq \varepsilon_k \, .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OND'] Questa proprietà viene spesso usata ponendo $\varepsilon_n = 2^{-n}$, o altra successione la cui serie converge.

E9.14 Sia $(x_n)_n$ una successione tale che $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$: si provi che è una successione di Cauchy. [ONF]

Confrontate questo esercizio, il precedente 9.13 nel caso in cui $\sum_n \varepsilon_n < \infty$, e l'esercizio 9.12.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E9.15 Se $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy, $(y_n) \subset X$ è un'altra successione, e $d(x_n, y_n) \to_n 0$, allora $(y_n) \subset X$ è una successione di Cauchy. [ONG]

E9.16 Preso (X, d) uno spazio metrico, si mostri che d è continua (come funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$). Si può anzi mostrare che è lipschitziana, associando a $X \times X$ [ONH]

$$\hat{d}(x, y) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2), \text{ per } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X \times X\,.$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ONK']

E9.17 Prerequisiti:5.28, 14.49,9.11.Difficoltà:*.Note:*Esercizio 2, compito 9 Luglio 2011.* [ONM]

Sia $\alpha(x)$ una funzione continua su $\mathbb{R}$, limitata e strettamente positiva. Date f, g continue su $\mathbb{R}$, si ponga

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\min\{\alpha(x), |f(x) - g(x)|\} \right).$$

Si dimostri che d è una distanza su $C(\mathbb{R})$ e che $\left(C(\mathbb{R}), d\right)$ è completo. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'ONP']

E9.18 Note:*Esercizio 2, compito 25 Marzo 2017.* [ONQ]

Si dimostri che le seguenti proprietà sono equivalenti per uno spazio metrico X:

- ogni successione di elementi di X ammette una sottosuccessione di Cauchy;
- il completamento X^* di X è compatto.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ONR']

§9.b Topologia in spazi metrici [2C2]

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 9.19 (palla,disco)**.** *Siano dati $x \in X, r > 0$; indicheremo con $B(x, r)$ la **palla**,* [ONW]

$$B(x, r) \stackrel{def}{=} \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

che è anche indicata con $B_r(x)$; e con

$$D(x, r) \stackrel{def}{=} \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

*il **disco**, che è anche indicato con $\overline{B}_r(x)$.*

Definizione 9.20. *Per gli esercizi seguenti definiamo che* [ONX]

1. *un insieme E è **aperto** se*

$$\forall x_0 \in E, \exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq E \quad . \tag{9.21}$$

Si mostra che $\emptyset, X$ sono aperti; l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto; l'unione di un numero arbitrario di aperti è un aperto. Dunque questi aperti formano una topologia*.*

[†76]Si veda la successiva Sez. §9.b per un riepilogo delle definizioni riguardo alla topologia in spazi metrici: in particolare sarà utile il 9.39.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

2. *La **parte interna** E° di un insieme E è*

$$E^\circ = \left\{x \in E \,:\, \exists r > 0, B_r(x) \subseteq E\right\}; \tag{9.22}$$

si verifica facilmente che $E^\circ \subseteq E$, e che E è aperto se e solo se $E^\circ = E$ (esercizio 9.31).

3. *Un insieme è **chiuso** se il complementare è aperto.*

4. *Un punto $x_0 \in X$ è **aderente** a E se*

$$\forall\, r > 0\,, \quad E \cap B_r(x_0) \neq \varnothing \quad .$$

5. *La **chiusura** $\overline{E}$ di E è l'insieme dei punti aderenti; si verifica facilmente che $E \subseteq \overline{E}$; si mostra che $\overline{E} = E$ se e solo se E è chiuso (esercizio 9.35).*

6. *A si dice **denso in** B se $\overline{A} \supseteq B$, cioè se per ogni $x \in B$ e per ogni $r > 0$ l'intersezione $B_r(x) \cap A$ è non vuota.*

Notate che, avendo la definizione operativa (9.21) di "aperto", allora gli assiomi (nella definizione 7.2) in questo caso diventano teoremi.

Esercizi

E9.23 `Argomenti:palle.` [ONZ]

Dimostrate che

$$B_\rho(x) \subseteq B_r(x_0) \tag{9.24}$$

per ogni $x \in B_\rho(x_0)$ e per ogni $0 < \rho \leq r - d(x, x_0)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0PO']

E9.25 `Argomenti:palle, dischi.` Siano $x_1, x_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$, se $d(x_1, x_2) \geq r_1 + r_2$ allora [OP1]

$$B_{r_1}(x_1) \cap D_{r_2}(x_2) = \varnothing \quad . \tag{9.26}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0P2']

E9.27 `Argomenti:parte interna.` `Prerequisiti:9.23.` Mostrate che $B_r(x)$ è un aperto usando la definizione (9.21). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0P4'] [OP3]

E9.28 Si mostri che uno spazio metrico è T_2 cioè Hausdorff (si veda la definizione in 7.4). [OP5]

E9.29 Se $A = B^c$ allora mostrate che $(\overline{B})^c = A^\circ$ (usando le definizioni di questa sezione). [OP6]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0P7']

E9.30 `Prerequisiti:9.29.` Mostrate che le nozioni di *parte interna* e *chiusura* viste qui sopra sono equivalenti a quelle presentate nella definizione 7.2. [OP8]

E9.31 `Argomenti:parte interna.` Mostrare che E è aperto se e solo se $E^\circ = E$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0PC'] [OPB]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E9.32 `Argomenti:parte interna.` Mostrate che se $A \subseteq B \subseteq X$ e A è aperto allora $A \subseteq B^\circ$ usando la definizioni sopra riportate. [OPD]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0PF']

E9.33 `Argomenti:parte interna.` Mostrate che se $A \subseteq B \subseteq X$ allora $A^\circ \subseteq B^\circ$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0PH'] [OPG]

E9.34 `Argomenti:parte interna.Prerequisiti:9.27,9.32.` [OPJ]

Dato X spazio metrico e $A \subseteq X$, mostrate che

$$A^\circ = (A^\circ)^\circ \ ,$$

usando la definizioni sopra riportate.

Per quanto detto in 9.31, questo equivale a dire che A° è un aperto.

(Per il caso di X spazio topologico, si veda il 7.11)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0PK']

E9.35 `Argomenti:parte interna.` [OPM]

Mostrare che $\overline{E} = E$ se e solo se E è chiuso.

E9.36 `Argomenti:chiusura. Prerequisiti:9.33,9.29.`*(Replaces 0PN)* [OPP]

Mostrate che se $B \subseteq A \subseteq X$ allora $\overline{B} \subseteq \overline{A}$; usando la definizioni sopra riportate, oppure per passaggio al complementare and using 9.33.

E9.37 `Argomenti:chiusura.Prerequisiti:9.29, 9.36.` [OPQ]

Dato X spazio metrico e $A \subseteq X$, mostrate che

$$\overline{A} = \overline{\left(\overline{A}\right)}$$

sia per passaggio al complementare rispetto al 9.34, sia usando la definizione di $\overline{A}$ come "*insieme dei punti aderenti*".

Per quanto detto in 9.35, questo equivale a dire che $\overline{A}$ è un chiuso.

E9.38 Sia $E \subseteq X$, allora E è uno spazio metrico con la distanza ristretta $\tilde{d} = d|_{E\times E}$. [OPR]

Mostrate che $A \subseteq E$ è aperto in $(E, \tilde{d})$ (secondo la definizione all'inizio di questa sezione) se e solo esiste $V \subseteq X$ aperto in (X, d) per cui $V \cap E = A$.

(Il secondo modo di definire "aperto" è usato nella topologia).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2GD']

E9.39 `Prerequisiti:7.83.` Sia X un insieme con due distanze d_1, d_2; siano τ_1, τ_2 rispettivamente le topologie indotte. Si ha che $\tau_1 \subseteq \tau_2$ se e solo se [OPS]

$$\forall x \in X \, \forall r_1 > 0 \, \exists r_2 > 0 \ : \ B^2(x, r_2) \subseteq B^1(x, r_1)$$

dove

$$B^2(x, r_2) = \{y \in X \, : \, d^2(x, y) < r_2\} \quad , \quad B^1(x, r_1) = \{y \in X \, : \, d^1(x, y) < r_1\} \quad .$$

Notiamo che questo esercizio è l'analogo in spazi metrici del principio 7.83 per le basi di topologie.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E9.40 Prerequisiti:7.88, 9.39, 11.8, 11.15,11.16. [OPT]

Presi $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ spazi metrici, sia $X = X_1 \times \cdots \times X_n$.

Sia φ una delle norme definite in eqn. (11.13) in Sez. §11.a. Due possibili esempi sono $\varphi(x) = |x_1| + \cdots + |x_n|$ oppure $\varphi(x) = \max_{i=1\dots n} |x_i|$.

Definiamo infine per $x, y \in X$

$$d(x,y) = \varphi\big(d_1(x_1,y_1), \dots, d_n(x_n,y_n)\big) \quad . \tag{9.41}$$

Si mostri che d è una distanza; si mostri che la topologia in (X,d) coincide con la topologia prodotto (si veda 7.88).

Si noti che questo approccio generalizza il modo con cui viene definita la distanza Euclidea fra punti in $\mathbb{R}^n$ (prendendo $X_i = \mathbb{R}$ e $\varphi(z) = \sqrt{\sum_i |z_i|^2}$). Ne deduciamo che la topologia di $\mathbb{R}^n$ è il prodotto delle topologie di $\mathbb{R}$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0PX']

Si veda anche l'esercizio 9.51, che riformula quanto sopra usando il concetto di *basi di topologie*.

E9.42 Prerequisiti:9.25,9.16. [OPY]

Sia $D(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x,y) \le r\}$ il disco, si mostri che è chiuso.

Sia $S(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x,y) = r\}$ la sfera, si mostri che è chiusa.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0PZ']

E9.43 Prerequisiti:9.44,9.27,9.42, 9.36.Sia $r > 0$. [OQO]

Sia $D(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x,y) \le r\}$ il disco; si mostri che $\overline{B(x,r)} \subseteq D(x,r)$ e che $B(x,r) \subseteq D(x,r)^\circ$.

Sia $S(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x,y) = r\}$ la sfera; si mostri che $\partial B(x,r) \subseteq S(x,r)$.

Si trovino esempi di spazi metrici in cui non valgono le uguaglianze (una, o entrambe).

Si trovi un esempio di spazio metrico in cui vi è un disco che è aperto[†77].

(Si veda anche 9.89 per il caso dello spazio $\mathbb{R}^n$). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0Q1'][UNACCESSIBLE UUID '0Q2']

E9.44 Prerequisiti:7.25.Dato $A \subseteq X$ sottoinsieme di uno spazio metrico, si ha che $x \in \partial A$ se e solo se esistono successioni $(y_n) \subseteq A$ e $(z_n) \subseteq A^c$ tali che $y_n \to_n x$ e $z_n \to_n x$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0Q4'] [OQ3]

E9.45 Prerequisiti:Sezione §7.i. Trovate un esempio di spazio metrico (M,d) che non soddisfi il secondo assioma di numerabilità, cioè tale che non esiste una base numerabile per la topologia associata a (M,d). [OQ5]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Q6']

E9.46 Prerequisiti:Sezione §7.i.Sia (M,d) uno spazio metrico e supponiamo che esista $D \subseteq M$ che sia numerabile e denso. In questo caso si dice che (M,d) è *separabile*. Mostrate che (M,d) soddisfa il secondo assioma di numerabilità. [OQ7]

Il viceversa è vero in qualunque spazio topologico, si veda 7.99.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E9.47 Prerequisiti:9.32,9.36, 7.13, 9.29.Difficoltà:*. [OQ8]

Sia X è uno spazio metrico, e $A \subseteq X$. Vogliamo studiare la operazione "apre-chiude" $\overline{(A^\circ)}$ (che è la chiusura della parte interna di A).

- Mostrate un semplice esempio in cui $\overline{(A^\circ)}$ non è contenuto ne contiene A.
- Scrivete poi una caratterizzazione di $\overline{(A^\circ)}$ usando successioni e palle.
- Usatela per mostrare che l'operazione "apre-chiude" è idempotente, cioè, se $D = \overline{(A^\circ)}$ e poi $E = \overline{(D^\circ)}$ allora $E = D$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Q9'][UNACCESSIBLE UUID '0QB']

E9.48 Prerequisiti:9.69.Mostrate che, per ogni insieme chiuso $C \subseteq X$ esistono numerabili insiemi aperti A_n tali che $\bigcap_n A_n = C$. [OQC]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0QD']

Un insieme ottenuto come intersezione di numerabili aperti è noto come "un insieme G_δ". Il precedente esercizio mostra che in uno spazio metrico ogni chiuso è un G_δ.

Passando al complementare si ottiene questa affermazione. Un insieme ottenuto come unione di numerabili chiusi è noto come "un insieme F_σ". Il precedente esercizio mostra che in uno spazio metrico ogni aperto è un F_σ.

Si veda anche la sezione §13.d.

E9.49 Difficoltà:**.Trovate un esempio di spazio metrico in cui per ogni $x \in X, r > 0$ si ha che $B_r(x)$ è un chiuso, ma la topologia associata non è discreta. [†78] [OQF]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0QG']

Notiamo che un tale spazio deve essere *totalmente disconnesso* come mostrato in 7.64.

§9.b.a Basi di palle

Per affrontare questi esercizi è necessario conoscere i concetti visti nella Sez. §7.h.

Esercizi

E9.50 Prerequisiti:7.85, 7.86.Mostrate che l'intersezione di due palle è un aperto (secondo la definizione 9.20). Si ottiene che la famiglia di tutte le palle soddisfa i requisiti *(a)* e *(b)* in esercizio 7.85; dunque, per quanto mostrato in 7.86, la famiglia delle palle è una base per la topologia che essa genera (che è la topologia associata allo spazio metrico). [OQJ]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0QK']

E9.51 Rivediamo l'esercizio 9.40. [OQM]

Presi $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ spazi metrici, sia $X = X_1 \times X_1 \times \cdots \times X_n$.

Sia d la distanza

$$d(x, y) = \max_{i=1,\dots n} d_i(x_i, y_i) \ .$$

[†77] Vi sono anche spazi in cui ogni palla è chiusa, si veda 9.49.
[†78] Si veda 7.5 per la definizione.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Questa è la stessa d definita come in eqn. (9.41) in 9.40, ponendo $\varphi(x) = \max_{i=1\dots n} |x_i|$. Indichiamo con $B^d(x,r)$ la palla in (X,d) di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$.

Vogliamo mostrare che d induce la topologia prodotto su X, usando i risultati visti in Sez. §7.h.

Presi $t \in X_i, r > 0$ indichiamo con $B^{d_i}(t,r)$ la palla nello spazio metrico (X_i, d_i). Sia $\mathcal{B}_i$ la famiglia di tutte le palle in (X_i, d_i).

Sia $\mathcal{B}$ definito come

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} B^{d_i}(x_i, r_i) \,:\, \forall i, x_i \in X_i, r_i > 0 \right\}$$

Mostrate che ogni palla $B^d(x,r)$ in (X,d) è il prodotto cartesiano delle palle $B^{d_i}(x_i,r)$ in (X_i,d_i). Sia dunque $\mathcal{P}$ la famiglia delle palle $B^d(x,r)$ in (X,d).

Da 9.50 sappiamo che $\mathcal{P}$ è una base per la topologia standard nello spazio metrico (X,d).

Usate 7.83 per mostrare che $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$ generano la stessa topologia τ.

Usate 7.89 per mostrare che τ è la topologia prodotto.

Se ne conclude che la distanza d genera la topologia prodotto.

§9.b.b Punti di accumulazione, punti limite

Ridefiniamo questa nozione (caso speciale di quella vista in 7.19)

Definizione 9.52 (punto di accumulazione)**.** *Dato $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ si dice* punto di accumulazione *per A se, per ogni $r > 0$ si ha che $B(x,r) \cap A \setminus \{x\}$ è non vuoto.* [OQN]

L'insieme dei punti di accumulazione di A si chiama **derivato**, lo indicheremo con $D(A)$.

Esercizi

E9.53 `Argomenti:punto aderente, punto di accumulazione.` [OQP]

Verificate che

- ogni punto di accumulazione è anche punto aderente, in simboli $D(A) \subseteq \overline{A}$;
- se un punto aderente a A non è in A allora è di accumulazione;

così si ottiene che $\overline{A} = A \cup D(A)$.

E9.54 Dato $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ è di accumulazione se e solo se esiste una successione $(x_n) \subseteq A$ che è iniettiva e tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. [OQR]

E9.55 Sia (X,d) spazio metrico, e $x \in X$. Mostrate che $A = \{x\}$ è chiuso; e che A ha parte interna vuota se e solo se x è punto di accumulazione. *Soluzione nascosta:* [OQS]
`[UNACCESSIBLE UUID 'OQT']`

E9.56 Sia $A \subseteq X$ e sia $D(A)$ il *derivato* (cioè l'insieme dei suoi punti di accumulazione). Si mostri che $D(A)$ è chiuso. *Soluzione nascosta:* [OQV]
`[UNACCESSIBLE UUID 'OQW']`

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Aggiungiamo questa definizione (caso particolare di 7.66).

Definizione 9.57 (punto limite)**.** *Data una successione* $(x_n)_n \subseteq X$*, un punto* $x \in X$ *si dice* punto limite *per* $(x_n)_n$ *se esiste una sottosuccessione* n_k *tale che* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. [OQX]

Nella letteratura Inglese questa nozione si traduce *" cluster point"* (oppure *"accumulation point"* il che può creare confusione con la definizione 9.52).

Esercizi

E9.58 Trovate un esempio di spazio metrico (X, d) e di una successione limitata $(x_k)_k \subseteq X$ che ha un unico punto limite x ma che non converge. [OQY]

Si veda anche 9.90.

E9.59 `Prerequisiti:9.5,9.12.` [OQZ]

- Se una successione $(a_k)_k \subseteq X$ converge a x allora ha un unico punto limite, che è x.
- Se una successione di Cauchy $(a_k)_k \subseteq X$ ha un punto limite allora vi è un unico punto limite x e $\lim_k a_k = x$.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID 'OR0']`

E9.60 `Argomenti:insieme perfetto.Prerequisiti:9.53,2.283,7.94.Difficoltà:**.` [2F3]

Supponiamo che (X, d) sia uno spazio metrico completo. Un insieme chiuso $E \subseteq X$ senza punti isolati, cioè costituito da soli punti di accumulazione, è detto **insieme perfetto**.

Sia C l'insieme di Cantor. Sia E perfetto e non vuoto. Dimostrate che esiste una funzione continua $\varphi : C \to E$ che è un omeomorfismo con la sua immagine. Questo implica che $|E| \geq |\mathbb{R}|$.

Dunque, in un certo senso, ogni insieme perfetto non vuoto contiene una copia dell'insieme di Cantor.

*Questo si può mostrare senza usare l'*ipotesi del continuo *2.283.* Cf. *9.129.*

Per via di 7.42, sarà sufficiente mostrare che esiste una $\varphi : C \to E$ *continua e iniettiva.*

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '2F4']`

Altri esercizi su questi argomenti sono 9.84, 9.85, 9.86, 9.90 e 9.96.

§9.c Quozienti [2C3]

Esercizi

E9.61 Supponiamo che d soddisfi tutti i requisiti di distanza salvo che la *"proprietà di separazione"*; consideriamo la relazione $\sim$ su X definita come $x \sim y \iff d(x, y) = 0$; mostrate che è una relazione di equivalenza. Definiamo $Y = X/\sim$; mostrate che la funzione d passa al quoziente, cioè che esiste $\tilde{d} : Y \times Y \to [0, \infty)$ tale che, per ogni scelta di classi $s, t \in Y$ e ogni scelta di $x \in s, y \in t$ si ha $\tilde{d}(s, t) = d(x, y)$. Mostrate infine che $\tilde{d}$ è una distanza su Y. [OR2]

Questo procedura è l'equivalente in spazi metrici del *quoziente di Kolmogoroff*.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E9.62 Sia (X,d) uno spazio metrico e $\sim$ una relazione di equivalenza su X; sia $Y = X/\sim$ lo spazio quoziente. Definiamo la funzione $\delta : Y^2 \to \mathbb{R}$ come [OR3]

$$\delta(x,y) = \inf\{d(s,t) : s \in x, t \in y\} \ . \tag{9.63}$$

È una distanza su Y? Di quali proprietà gode fra quelle indicate in 9.1? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0R4']

E9.64 Sia (X,d) uno spazio metrico dove X è anche un gruppo, sia Θ un sottogruppo. [OR5]

Definiamo che $x \sim y \iff xy^{-1} \in \Theta$. Si verifica facilmente che è una relazione di equivalenza. Sia $Y = X/\sim$ lo spazio quoziente. [†79]

Supponiamo che d sia invariante rispetto alla moltiplicazione a sinistra per elementi di Θ:

$$d(x,y) = d(\theta x, \theta y) \ \ \forall x,y \in X, \forall \theta \in \Theta \ . \tag{9.65}$$

(Questo equivale a dire che, per ogni fissato $\theta \in \Theta$ la mappa $x \mapsto \theta x$ è una isometria). Definiamo la funzione $\delta : Y^2 \to \mathbb{R}$ come in (9.63).

- Mostrate che, prese $s,t \in X$, si ha

$$\delta([s],[t]) = \inf\{d(s,\theta t) : \theta \in \Theta\} \tag{9.66}$$

  dove $[s]$ è la classe di elementi equivalenti a s.
- Mostrate che $\delta \geq 0$, che δ è simmetrica e che δ soddisfa la disuguaglianza triangolare.
- Supponiamo che, per ogni fissato $t \in X$, la mappa $\theta \mapsto \theta t$ sia continua da Θ a X; supponiamo inoltre che Θ sia chiuso: allora δ è una distanza. [†80]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0R6']

§9.d Funzione distanza [2C4]

Definizione 9.67. *Preso uno spazio metrico (M,d), dato $A \subset M$ non-vuoto, si definisce la* ***funzione distanza*** *$d_A : M \to \mathbb{R}$ come* [OR8]

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x,y) \, . \tag{9.68}$$

Esercizi

E9.69 `Argomenti:funzione distanza.` [OR9]

1. Mostrate che d_A è Lipschitziana.
2. Mostrate che $d_A \equiv d_{\overline{A}}$.
3. Mostrate che $\{x, d_A(x) = 0\} = \overline{A}$.
4. Se $M = \mathbb{R}^n$ e A è chiuso non-vuoto, mostrate che l'inf in (9.68) è un minimo.

Si veda anche 14.53 e 14.54. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0RB']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

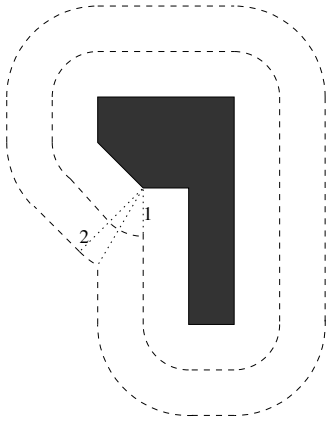


Figura 4: Ingrassato di un insieme; esercizio 9.70

E9.70 `Argomenti:insieme ingrassato.Prerequisiti:9.69.` [0RC]

Consideriamo uno spazio metrico (M,d). Sia $A \subseteq M$ chiuso e non-vuoto, sia $r > 0$ fissato, e sia d_A la funzione distanza definita come in eqn. (9.68). Sia poi $E = \{x, d_A(x) \le r\}$, notate che è chiuso.

1. Mostrate che
$$d_E(x) \ge \max\{0, (d_A(x) - r)\} \ . \tag{9.71}$$
2. Mostrate che in (9.71) si ha uguaglianza se $M = \mathbb{R}^N$.
3. Date un semplice esempio di spazio metrico in cui non si ha uguaglianza in (9.71).
4. Se $M = \mathbb{R}^n$, dato $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso non-vuoto, mostrate che $E = A \oplus D_r$ dove $D_r \stackrel{\text{def}}{=} \{x, |x| \le r\}$ e
$$A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x + y, x \in A, y \in B\}$$
è la *somma di Minkowski* dei due insiemi (si anche veda la sezione §11.f).

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID 'ORD']` L'insieme $\{x, d_A(x) \le r\} = A \oplus D_r$ è alle volte chiamato "*ingrassato*" di A. In figura 4 vediamo un esempio di insieme A ingrassato per $r = 1, 2$; l'insieme A è il poligono nero (che è pieno) mentre le linee tratteggiate nel disegno indicano i contorni degli insiemi ingrassati. [†81] Si vedano anche le proprietà in sezioni §11.f e §11.g.

§9.e Connessione [2C5]

Si vedano le definizioni in Sez. §7.e. Definiamo inoltre questa nozione.

Definizione 9.72. *Uno spazio topologico (X,τ) si dice* "connesso per archi" *se per ogni $x, y \in X$ esiste un arco continuo $\gamma : [a,b] \to X$ con $x = \gamma(a), y = \gamma(b)$.* [0RG]

[†79] Se Θ è un sottogruppo normale allora si scrive anche X/Θ, che è un gruppo.

[†80] Notate che, usando 13.27, in queste ipotesi la mappa di moltiplicazione $(\theta, x) \mapsto \theta x$ è continua da $\Theta \times X$ in X.

[†81] Gli insiemi ingrassati non sono disegnati con il loro contenuto — altrimenti coprirebbero A.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E9.73 Trovate una successione di insiemi chiusi connessi $C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che $C_{n+1} \subseteq C_n$ e l'intersezione $\bigcap_n C_n$ è un insieme non-vuoto e sconnesso. [ORH]

Si può trovare un simile esempio in $\mathbb{R}$?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORJ']

E9.74 Trovate una successione di insiemi chiusi e connessi per archi $C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che $C_{n+1} \subseteq C_n$ e l'intersezione $\bigcap_n C_n$ è non vuoto, connesso, ma non connesso per archi. [ORK]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORM'][UNACCESSIBLE UUID 'ORN']

E9.75 Consideriamo l'esempio di insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ dato da [ORP]

$$E = \{(0,t) : \ -1 \le t \le 1\} \cup \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : \ x \in (0,1]\right\} \quad . \tag{9.76}$$

Mostrare che questo insieme è chiuso, connesso, ma non è connesso per archi.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORQ']

Si veda anche [49].

E9.77 Difficoltà:*. Sia (X,d) uno spazio metrico. Mostrate che $E \subseteq X$ è sconnesso se e solo se *"esistono due aperti disgiunti, ciascuno dei quali interseca E e tali che E sia coperto dalla loro unione"* (si veda la proposizione formalizzata in eqn. (7.56) nell' esercizio 7.55). [ORR]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORS']

E9.78 Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ numerabile; si mostri che $\mathbb{R}^2 \setminus D$ è connesso per archi. [ORT]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'ORV']

E9.79 Si trovi un esempio di uno spazio metrico X che è connesso per archi, in cui esiste un sottoinsieme $A \subseteq X$ aperto che è connesso ma non connesso per archi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'ORZ'] [ORY]

§9.f Topologia nella retta reale [2C6]

Esercizi

E9.80 Mostrate che un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo è convesso, se e solo se è connesso. [OSO]

(Parte della dimostrazione si trova nel Teorema 5.11.3 in [3]).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OS1']

(Notate come in questo caso gli esercizi 2.143 e 7.59 vadano a coincidere).

E9.81 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo l'insieme A dei numeri della forma $\alpha n + m$ con n, m interi. Si mostri che A è denso in $\mathbb{R}$ se e solo se α è irrazionale. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OS3'] [OS2]

E9.82 Dato $I \subseteq \mathbb{Q}$ non-vuoto, mostrate che I è connesso se e solo I contiene un solo punto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OS5'] [OS4]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E9.83 Mostrare che ogni $A \subset \mathbb{R}$ non-vuoto aperto è unione di una famiglia al più numerabile di intervalli aperti disgiunti. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0S7'] [0S6]

E9.84 Trovare un compatto $A \subset \mathbb{R}$ che abbia un numero numerabile di punti di accumulazione. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0S9'] [0S8]

E9.85 Prerequisiti:9.54. Mostrare che l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ definito come [0SB]

$$A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \cup \{1/n + 1/m : n, m \in \mathbb{N}, n \geq 1, m \geq 1\}$$

è compatto; identificare i suoi punti di accumulazione.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0SC']

E9.86 Difficoltà:**. Sia $A \subset \mathbb{R}$; ricordiamo che $D(A)$ è il derivato di A (cioè l'insieme dei punti di accumulazione di A). Descrivere un insieme chiuso A tale che gli insiemi [0SD]

$$A, D(A), D(D(A)), D(D(D(A))) \ldots$$

siano tutti diversi.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0SF']

E9.87 Prerequisiti:9.34, 9.37, 7.13, 9.47.Difficoltà:**. [0SG]

Trovare un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ tale che i seguenti 7 sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ risultino tutti distinti:

$$A,\ \overline{A},\ A^\circ,\ \left(\overline{A}\right)^\circ,\ \overline{(A^\circ)},\ \overline{\left(\left(\overline{A}\right)^\circ\right)},\ \left(\overline{(A^\circ)}\right)^\circ\ .$$

Dimostrare inoltre che non se ne possono creare altri proseguendo nella stessa maniera (anche sostituendo $\mathbb{R}$ con un generico spazio metrico).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0SH']

E9.88 Difficoltà:**.Si provi che non è possibile ottenere $\mathbb{R}$, o un intervallo $D \subseteq \mathbb{R}$, come unione numerabile di intervalli chiusi e limitati, a due a due disgiunti. [0W6]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0W7']

§9.g Topologia nello spazio euclideo [2C7]

Nel seguito consideriamo lo spazio metrico $\mathbb{R}^n$ con la usuale distanza euclidea.

Esercizi

E9.89 Prerequisiti:9.43.Sia $B(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ la palla; sia $D(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leq r\}$ il disco; sia $S(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| = r\}$ la sfera. Si mostri che $\overline{B(x,r)} = D(x,r)$, che $B(x,r) = D(x,r)^\circ$, e che $\partial B(x,r) = S(x,r)$. Si mostri inoltre che $B(x,r)$ non è chiuso e $D(x,r)$ non è aperto. [0SM]

(Questo risultato vale più in generale in ogni spazio normato: si veda 11.7).

E9.90 Prerequisiti:9.59, 9.9. Data una successione $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}^n$, questi fatti sono equivalenti [0SN]

a la successione è limitata e ha un unico punto limite x

b $\lim_k x_k = x$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0SP'] Si veda anche 9.58.

E9.91 Prerequisiti:7.25, 7.26.Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso non-vuoto, esiste $B \subseteq A$ tale che $A = \partial B$. [0SQ]

In quali casi si può trovare B numerabile?

In quali casi si può trovare B chiuso?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0SR'][UNACCESSIBLE UUID '0SS']

Si veda anche 7.99.

E9.92 Prerequisiti:7.29.Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso non-vuoto, esiste $F \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $E = D(F)$. [0SV]

Si può trovare $F \subseteq E$?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0SX'][UNACCESSIBLE UUID '0SY']

E9.93 Quali sono gli insiemi $A \subset \mathbb{R}^n$ che sono sia aperti che chiusi? [0T0]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0T2']

E9.94 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua; si mostri che queste due condizioni sono equivalenti [0T3]

- $\lim_{t\to\infty} |f(t)| = +\infty$ e $\lim_{t\to-\infty} |f(t)| = +\infty$;
- f è **propria**, cioè per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ si ha che la controimmagine $f^{-1}(K)$ è un compatto di $\mathbb{R}$.

E9.95 Prerequisiti:Sezione §7.i.Mostrate che $\mathbb{R}^N$ soddisfa il secondo assioma di numerabilità. [0T4]

E9.96 Prerequisiti:7.98. Note:*esercizio 4 nel compito del 13/1/2011.* [0T5]

Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è composto solo da punti isolati, allora A ha cardinalità numerabile o finita.

Viceversa dunque se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è più che numerabile allora il derivato $D(A)$ è non vuoto.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0T6']

E9.97 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $I \subset A$ soddisfacente: [0T7]

- I è finito,
- $\forall x, y \in I$, $x \neq y$ si ha $x \notin B(y, \varepsilon)$ (cioè $d(x, y) \geq \varepsilon$),
- $$A \subseteq \bigcup_{x\in I} B(x, \varepsilon) \ .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0T8']

E9.98 Difficoltà:*.Qual è la cardinalità della famiglia degli insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$? [0T9]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0TB']

E9.99 Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto tale che ogni funzione continua $f : E \to \mathbb{R}$ ammetta massimo: si mostri che E è compatto. [0TD]

(Si veda 9.119 per la generalizzazione a spazi metrici)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0TF']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§9.h Punti fissi [2C8]

Esercizi

E9.100 Trovate una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che [0TG]

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

ma che non ha punti fissi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '27D']

E9.101 Prerequisiti:9.120. Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, e sia $f : X \to X$ tale che [0TH]

$$\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad .$$

Mostrate che f ha un unico punto fisso $\overline{x}$.

Posto $x_0 \in X$ e definita per ricorrenza $x_{n+1} = f(x_n)$, mostrate che $\lim_n x_n = \overline{x}$.

Questo risultato è talvolta chiamato *Teorema di Edelstein*.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '27C']

§9.i Isometrie [2C9]

Definizione 9.102. *Dati (M_1, d_1) e (M_2, d_2) spazi metrici, una mappa $\varphi : M_1 \to M_2$ è detta una **isometria** se* [0TK]

$$\forall x, y \in M_1, \quad d_1(x, y) = d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \quad . \tag{9.103}$$

Vedremo in Sez. §11.b la stessa definizione nel caso di spazi vettoriali normati. Ovviamente una isometria è Lipschitziana, e dunque continua. Le isometrie godono di alcune proprietà.

Esercizi

E9.104 Argomenti:isometria. Una isometria è sempre iniettiva. [0TM]

E9.105 Se l'isometria φ è surgettiva (e dunque è bigettiva) allora anche la inversa φ^{-1} è una isometria. [0TP]

E9.106 Se (M_1, d_1) è completo allora la sua immagine $\varphi(M_1)$ è un insieme completo in M_2; e dunque è un chiuso in M_2. [0TQ]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0TR'] Conseguentemente se la isometria φ è bigettiva e uno dei due spazi è completo allora anche l'altro è completo.

E9.107 Argomenti:isometria. Difficoltà:*. Siano (X, d) spazio metrico compatto; sia $T : X \to X$ una isometria, allora T è surgettiva. [0TT]

Date un semplice esempio di spazio metrico non compatto e di $T : X \to X$ isometria non surgettiva.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0TV']

E9.108 Argomenti:isometria.Prerequisiti:9.107.Difficoltà:*. [0TW]

Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici di cui X compatto, $T : X \to Y$ e $S : Y \to X$ due *isometrie*. Provare che allora T ed S sono bigettive.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0TY']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E9.109 `Argomenti:isometria.Difficoltà:*.` Trovate un esempio di due spazi metrici (X,d) e (Y,δ) che non sono isometrici ma per cui esistono due isometrie $T : X \to Y$ e $S : Y \to X$. [0TZ]

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '0V1']`

§9.j Compattezza [2CB]

Il teorema di Heine-Borel [41] si estende a questo contesto.

Teorema 9.110. *Dato uno spazio metrico (X,d) e un suo sottoinsieme $C \subseteq X$, le tre seguenti condizioni sono equivalenti.* [0V3]

- *C è* sequenzialmente compatto*: ogni successione $(x_n) \subset C$ possiede una sottosuccessione convergente a un elemento di C.*
- *C è* compatto*: da ogni famiglia di aperti la cui unione copre C si può scegliere un numero finito di aperti la cui unione copre C.*
- *C è completo, ed è* totalmente limitato*: per ogni $\varepsilon > 0$ esistono finiti punti $x_1 ... x_n \in C$ tali che $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.*

(Questo Teorema ha una generalizzazione in spazi topologici, si veda in 7.71).

Esercizi

E9.111 Posto $X = \mathbb{R}^n$ e d la usuale distanza Euclidea, preso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, usate il precedente teorema 9.110 per mostrare (come corollario) l'usuale teorema di Heine-Borel [41]: *C è compatto se e solo se è chiuso e limitato*. [0V4]

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '0V5']`

E9.112 Si mostri che se $K \subset X$ è compatto allora è chiuso. *Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID '0V7']` (Si veda 7.40 per il caso di spazio topologico) [0V6]

E9.113 Siano (X,d_X) e (Y,d_Y) spazi metrici, con (X,d_X) compatto; sia $f : X \to Y$ continua e iniettiva; si mostri che f è un omeomorfismo fra X e la sua immagine $f(X)$. [0V8]

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '0V9']`

(Si veda 7.42 per il caso di spazio topologico).

E9.114 Sia $n \geq 1$ naturale. Siano (X_i,d_i) spazi metrici compatti per $i = 1, \dots n$; siano $y_{i,k} \in X_i$ per $i = 1, \dots n$ e $k \in \mathbb{N}$. Mostrare che esiste una sottosuccessione k_h tale che, per ogni fissato i, y_{i,k_h} converge, cioè esiste il limite $\lim_{h\to\infty} y_{i,k_h}$. [0VB]

E9.115 `Difficoltà:**.` Siano (X_i,d_i) spazi metrici compatti per $i \in \mathbb{N}$, e siano $y_{i,k} \in X_i$ per $i,k \in \mathbb{N}$. Mostrare che esiste una sottosuccessione k_h tale che, per ogni fissato i, y_{i,k_h} converge, cioè esiste il limite $\lim_{h\to\infty} y_{i,k_h}$. [0VC]

E9.116 Sia dato uno spazio metrico (X,d). Come già in 9.19 definiamo il *disco* $D(x,\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X, d(x,y) \leq \varepsilon\}$ (che è chiuso). Diciamo che (X,d) è *localmente compatto* se per ogni $x \in X$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $D(x,\varepsilon)$ è compatto. Considerate questa proposizione. [0VD]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

*«**Proposizione** Uno spazio metrico localmente compatto è completo.*
***Dimostrazione** Sia $(x_n)_n \subset X$ una successione di Cauchy, allora definitivamente i suoi termini distano al più ε, dunque sono contenuti in una piccolo disco compatto, dunque esiste una sottosuccessione che converge, e allora per il risultato 9.12 tutta la successione converge. q.e.d. »*

Se secondo voi la proposizione è vera, riscrivete la dimostrazione in modo rigoroso. Se secondo voi è falsa, trovate un controesempio.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0VF']

E9.117 Sia (X,d) uno spazio metrico, e sia $C \subset X$. Si mostri che C è totalmente limitato se e solo se $\overline{C}$ è totalmente limitato. (Si veda 9.110 per la definizione di *totalmente limitato*). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0VH'] [0VG]

E9.118 Prerequisiti:9.38. Sia (X,d) uno spazio metrico totalmente limitato. Sia $E \subseteq X$, allora E è uno spazio metrico con la distanza ristretta $\tilde{d} = d|_{E\times E}$. Si mostri che $(E,\tilde{d})$ è totalmente limitato. (Si veda 9.110 per la definizione di *totalmente limitato*). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '2GC'] [2GB]

E9.119 Prerequisiti:9.59,9.122.Difficoltà:*. [0VJ]

Sia (X,d) uno spazio metrico tale che ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ ammetta massimo: si mostri che lo spazio è compatto.

(Si veda 9.99 per la formulazione con $X = \mathbb{R}^n$.) *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0VM'][UNACCESSIBLE UUID '0VN']

E9.120 Argomenti:compatti.Prerequisiti:9.112. [0VP]

Sia (X,d) uno spazio metrico, e siano $A_n \subseteq X$ sottoinsiemi compatti non vuoti tali che $A_{n+1} \subseteq A_n$: allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

(Questo risultato si può fare derivare da 7.41; provate però a dare una dimostrazione diretta, usando la caratterizzazione di "compatto" come "compatto per successioni" , cioè il primo punto in 9.110).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0VQ']

E9.121 Sia dato uno spazio metrico (X,d) e un suo sottoinsieme $C \subseteq X$ *totalmente limitato*, come definito in 9.110: mostrate che C è limitato, cioè per ogni $x_0 \in C$ si ha [0VR]

$$\sup_{x\in C} d(x_0,x) < \infty \quad ,$$

o equivalentemente, per ogni $x_0 \in C$ esiste $r > 0$ tale che $C \subseteq B(x_0,r)$.

L'implicazione opposta non vale, come mostrato in 9.123

E9.122 Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $D \subseteq X$, si mostri che sono equivalenti: [0VS]

- D non è totalmente limitato;
- esiste $\varepsilon > 0$ ed esiste una successione $(x_n)_n \subseteq D$ per cui

$$\forall n,m \in \mathbb{N},\ d(x_n,x_m) \geq \varepsilon \quad .$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E9.123 Prerequisiti: 9.122. Sia $X = C^0([0,1])$ lo spazio delle funzioni continue e limitate $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dotato della usuale distanza [OVT]

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \quad .$$

Sappiamo che (X, d_∞) è uno spazio metrico completo. Sia

$$D(0,1) = \{f \in X : d_\infty(0,f) \le 1\} = \{f \in X : \forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \le 1\}$$

il disco di centro 0 (la funzione identicamente zero) e raggio 1. Sappiamo da 9.42 che è chiuso, e dunque è completo. Mostrate che D non è totalmente limitato, trovando una successione $(f_n) \subseteq D$ come spiegato in 9.122.

§9.k Teoremi e categorie di Baire

Vale il seguente *teorema della categoria di Baire* di cui vi sono vari enunciati equivalenti.

Teorema 9.124. *Supponiamo che (X,d) sia completo.* [OVV]

- *Dati numerabili A_n aperti densi in X, si ha che $\bigcap_n A_n$ è denso.*
- *Dati numerabili C_n chiusi con parte interna vuota in X, si ha che $\bigcup_n C_n$ ha parte interna vuota.*

Definizione 9.125. *Un insieme che è contenuto nell'unione di numerabili chiusi con parte interna vuota è detto* di prima categoria in X. [†82] *In caso contrario, è detto* di seconda categoria. [OVW]

Esercizi

E9.126 Uno spazio metrico X completo è di seconda categoria in se stesso. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OVY'] [OVX]

E9.127 Posto $X = \mathbb{R}$, l'insieme degli irrazionali è di seconda categoria in $\mathbb{R}$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OW0'] [OVZ]

E9.128 Si rifletta sulle affermazioni: [OW1]

- Un insieme chiuso C dentro uno spazio metrico completo (X,d) è un completo (se visto come spazio metrico (C,d)).
- L'insieme $C = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ è un chiuso in $\mathbb{R}$, dunque C è completo con la distanza $d(x,y) = |x-y|$.
- C è composto da numerabili punti.
- Un singoletto $\{x\}$ è un chiuso a parte interna vuota.

Perché non vi è contraddizione?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OW2']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E9.129 Argomenti:insieme perfetto.Prerequisiti:9.53,2.283. [OW3]

Supponiamo che (X,d) sia uno spazio metrico completo. Un insieme chiuso senza punti isolati, cioè costituito da soli punti di accumulazione, è detto **insieme perfetto**. Mostrate che un insieme perfetto non-vuoto E contenuto in X deve essere infinito più che numerabile. *(Escogitate una dimostrazione semplice che faccia uso del Teorema di Baire 9.124.)*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '2DZ']

L'insieme di Cantor è un insieme perfetto, si veda 8.11.

§9.l Prodotto di infiniti spazi metrici

Esercizi

E9.130 Prerequisiti:9.8. Sia $\varphi(t) = t/(1+t)$. Siano (X_i, d_i) spazi metrici con $i \in \mathbb{N}$, sia $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, prese $f, g \in X$ definiamo la distanza su X come [OW9]

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\varphi(d_i(f(k), g(k))) .$$

Si dimostri che d è una distanza.

E9.131 Siano $f, f_n \in X$ come prima in 9.130, si mostri che $f_n \to_n f$ secondo questa metrica se e solo se per ogni k si ha $f_n(k) \to_n f(k)$. [OWB]

E9.132 Siano (X_i, d_i) e (X,d) come prima in 9.130. Se tutti gli spazi (X_i, d_i) sono completi, si provi che (X,d) è completo. [OWC]

E9.133 Prerequisiti:9.115,9.131.Difficoltà:*. Siano (X_i, d_i) e (X,d) come prima in 9.130. Se tutti gli spazi (X_i, d_i) sono compatti, si provi che (X,d) è compatto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OWF'] [OWD]

E9.134 Prerequisiti:9.133. Vogliamo definire una distanza per lo spazio delle successioni. Procediamo come in 9.130. Scegliamo $X_i = \mathbb{R}$ per ogni i e decidiamo che d_i sia la distanza Euclidea, poi per $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiamo [OWG]

$$d(f,g) = \sum_{k} 2^{-k}\varphi(|f(k) - g(k)|) .$$

Abbiamo costruito uno spazio metrico delle successioni $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$.

Nello spazio delle successioni $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ definiamo

$$K = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall k, |f(k)| \leq 1\} \quad .$$

Si mostri che K è compatto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OWH']

E9.135 Sia $N(\rho)$ il minimo numero di palle di raggio ρ che sono necessarie per coprire K (dall'esercizio precedente 9.134). Si stimi $N(\rho)$ per $\rho \to 0$. [OWJ]

Si veda anche la Sez. §10

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§9.m Ultrametrica

Definizione 9.136. *Uno* spazio ultrametrico *è una spazio metrico in cui la disuguaglianza triangolare è rafforzata dalla condizione* [OWM]

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\} \ . \tag{9.137}$$

Esercizi

E9.138 Mostrate che (9.137) implica che d soddisfa la diseguaglianza triangolare. [OWN]

E9.139 Notate che se $d(x,y) \neq d(y,z)$ allora $d(x,z) = \max\{d(x,y), d(y,z)\}$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OWQ'] Intuitivamente, tutti i triangoli sono isosceli, e la base è più corta dei lati uguali. [OWP]

E9.140 Si mostri che, date due palle $B(x,r)$ e $B(y,\rho)$ di raggio $0 < r \leq \rho$ che si intersecano, allora $B(x,r) \subseteq B(y,\rho)$. [OWR]

Similmente per i dischi $D(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ e $D(y,r)$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OWS']

E9.141 Si mostri che due palle $B(x,r)$ e $B(y,r)$ di uguale raggio sono disgiunte oppure sono coincidenti; in particolare sono coincidenti se e solo se $y \in B(x,r)$. Similmente per i dischi $D(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ e $D(y,r)$. [OWT]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OWV']

E9.142 Si mostri che ogni palla aperta $B(x,r)$ è anche chiusa. Si mostri che ogni disco chiuso $D(x,r)$ con $r > 0$ è anche aperto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OWX'] Per l'esercizio 7.64, se ne deduce che lo spazio è *totalmente disconnesso*. [OWW]

E9.143 Sia $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una funzione continua in zero, monotona debolmente crescente e con $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$. Mostrate che $\tilde{d} = \varphi \circ d$ è ancora una ultrametrica. Mostrate che gli spazi (X,d) $(X,\tilde{d})$ hanno la stessa topologia. [OWY]

Confrontate con l'esercizio 9.8, notate che non richiediamo che φ sia subadditiva.

§9.m.a Ultrametrica delle successioni

Costruiamo questo esempio di *ultrametrica* sullo spazio delle successioni.

Definizione 9.144. *Sia I un insieme non-vuoto, con almeno due elementi. Sia $X = \{f : \mathbb{N} \to I\} = I^{\mathbb{N}}$ lo spazio delle successioni. Siano $x, y \in X$. Se $x = y$ allora poniamo $d(x,y) = 0$.* [†83] *Se $x \neq y$, posto* [OXO]

$$c(x,y) = \min\{n \geq 0, x(n) \neq y(n)\} \tag{9.145}$$

il primo indice dove le successioni sono diverse; infine definiamo $d(x,y) = 2^{-c(x,y)}$.

Nota 9.146. *Per via dell'esercizio 9.143, potremmo equivalentemente definire $d(x,y) = \varepsilon_{c(x,y)}$ con $\varepsilon_n > 0$ successione decrescente infinitesima.* [OX1]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E9.147 Prerequisiti:9.144. Si mostri che $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(y,z)\}$. [0X2]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0X3']

E9.148 Argomenti:completo. Prerequisiti:9.144. Si mostri che (X,d) è completo. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0X5'] [0X4]

E9.149 Argomenti:compatto. [0X6]

Prerequisiti:9.144.

Si mostri che (X,d) è compatto se e solo se I è un insieme finito.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0X7']

E9.150 Prerequisiti:9.144,8.12. Supponiamo che I sia un gruppo; allora X è un gruppo (è il prodotto cartesiano di gruppi); e la moltiplicazione si effettua "componente per componente". Mostrate che il prodotto in X è un'operazione continua, e così per la mappa di inversione. Dunque (X,d) è un *gruppo topologico*. [0X8]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0X9']

E9.151 Prerequisiti:9.144,8.12. Sia I un insieme di cardinalità 2, allora lo spazio (X,d) è omeomorfo all'insieme di Cantor (con la normale metrica Euclidea $|x-y|$). [0XC]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0XD']

Combinando questo risultato con 9.150 otteniamo che l'insieme di Cantor (con la sua usuale topologia) può essere dotato di una struttura di gruppo abeliano, dove la somma e l'inversa sono funzioni continue; ciò lo rende un gruppo topologico.

Si veda anche 10.24.

§9.n Ultrametrica p-adica [2CG]

Riportiamo dagli appunti [3] la definizione della *distanza p–adica* su $\mathbb{Q}$. Sia p un numero primo fissato.

Definizione 9.152. *Ogni numero razionale $x \neq 0$ si scompone in modo unico come prodotto* [0XF]

$$x = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}\,, \tag{9.153}$$

dove $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ sono numeri primi e gli m_j interi relativi non nulli. Fissato come sopra un numero primo p, si definisce il ***valore assoluto p–adico*** *di $x \in \mathbb{Q}$ come*

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x = 0 \\ p^{-m} & \text{se } p^m \text{ è il fattore con base } p \text{ nella scomposizione } (9.153)\,. \end{cases}$$

Definiamo infine $d(x,y) = |x-y|_p$, che risulterà essere una distanza su $\mathbb{Q}$, chiamata ***distanza p–adica****.*

Aggiungiamo questa definizione, che sarà molto utile nel seguito.

Definizione 9.154. *Per $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ definiamo* [0XG]

$$\varphi_p(n) = \max\{h \in \mathbb{N},\, p^h \text{ divide } n\}\ .$$

Poniamo inoltre $\varphi_p(0) = \infty$. Questa φ_p è nota come valutazione p-adica [67]. .

[†82] È detto a volte anche *insieme magro* (ad esempio in Wikipedia [36]); mentre per alcuni autori un "insieme magro" è un insieme che ha parte interna della chiusura uguale al vuoto.

[†83] Questo può essere anche ottenuto definendo $c(x,x) = \infty$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E9.155 Provate queste relazioni fondamentali. [OXH]

1. $|1|_p = 1$ e più in generale $|n|_p \leq 1$ per ogni intero nonnullo n, con uguaglianza se n non è divisibile per p.
2. Dato n intero nonnullo, si ha che $|n|_p = p^{-\varphi_p(n)}$.
3. Dato n, m interi, si ha che $\varphi_p(n+m) \geq \min\{\varphi_p(n), \varphi_p(m)\}$ con uguaglianza se $\varphi_p(n) \neq \varphi_p(m)$.
4. Dato n, m interi nonnulli, si ha che $\varphi_p(nm) = \varphi_p(n) + \varphi_p(m)$ e dunque $|nm|_p = |n|_p |m|_p$.
5. Dato $x = a/b$ con a, b interi nonnulli si ha che $|x|_p = p^{-\varphi_p(a)+\varphi_p(b)}$. Notiamo che se a, b sono primi tra loro, allora uno dei due termini $\varphi_p(a), \varphi_p(b)$ è zero.
6. Provate che $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ per $x, y \in \mathbb{Q}$.
7. Provate che $|x/y|_p = |x|_p / |y|_p$ per $x, y \in \mathbb{Q}$ non nulli.

E9.156 Verificate che [OXM]

$$|x+y|_p \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\} \tag{9.157}$$

per ogni x, $y \in \mathbb{Q}$. e dunque

$$d_p(x,z) \leq \max\left\{d_p(x,y), d_p(y,z)\right\}, \qquad \forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{Q}\ .$$

cioè questa è una ultrametrica (e dunque una distanza). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OXN'] Le proprietà 6 e (9.157) dicono che la *valutazione p-adica* è un valore assoluto, e anzi è una *Krull valuation*.

E9.158 Si mostri che la mappa di moltiplicazione è continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OXQ'] [UNACCESSIBLE UUID 'OXR']

E9.159 Si trovi un esempio di successione che tende a zero (ma che non assume mai il valore 0). Questo esempio mostra che la topologia associata non è la topologia discreta. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID 'OXV'] [OXT]

E9.160 Difficoltà:*. Si mostri, per ogni $a/b \in \mathbb{Q}$ con a, b coprimi e b non divisibile per p, esiste $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z}$ tale che $|x_n - a/b|_p \to_n 0$. Si noti che la ipotesi è necessaria. [OXW]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OXX'] Si ottiene che $\mathbb{Z}$ è denso nel disco $\{x \in \mathbb{Q}, |x|_p \leq 1\}$.

E9.161 Difficoltà:**. Si mostri che $(\mathbb{Q}, d)$ non è uno spazio metrico completo. [OXY]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OXZ']

E9.162 Si mostri che nessuna distanza p–adica su $\mathbb{Q}$ è bi–Lipschitz equivalente alla distanza euclidea (indotta da $\mathbb{R}$). [OYO]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OY1']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§9.o Circonferenza [2CF]

Definizione 9.163. [0Y3] $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| = 1\}$ *è la* ***circonferenza*** *nel piano.*

È un chiuso in $\mathbb{R}^2$, dunque lo possiamo pensare come uno spazio metrico completo con la distanza Euclidea $d(x,y) = |x-y|_{\mathbb{R}^2}$.

Definizione 9.164. [0Y4] *Denotiamo con $\mathbb{R}/2\pi$ lo spazio quoziente $\mathbb{R}/\sim$ dove $x \sim y \iff (x-y)/(2\pi) \in \mathbb{Z}$ è una relazione di equivalenza che rende equivalenti punti che distano un multiplo intero di 2π. Questo spazio $\mathbb{R}/2\pi$ viene chiamato* ***lo spazio dei numeri reali modulo*** *2π.*

Come usuale dato $t \in \mathbb{R}$ indichiamo con $[t]$ la classe degli elementi in $\mathbb{R}/2\pi$ equivalenti a t.

Esercizi

E9.165 Considerate la mappa [0Y5]

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}/2\pi &\to S^1 \\ [t] &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

mostrate che è ben definita e bigettiva.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Y6']

E9.166 Tramite questa bigezione trasportiamo la distanza Euclidea da S^1 a $\mathbb{R}/2\pi$ definendo [0Y7]

$$d_e([s],[t]) = |\Phi([s]) - \Phi([t])|_{\mathbb{R}^2} \ .$$

Con questa scelta la mappa Φ risulta essere un isometria fra (S^1, d) e $(\mathbb{R}/2\pi, d_e)$ (si riveda la definizione 9.102). Dunque quest'ultimo è uno spazio metrico completo.

Con qualche semplice calcolo si ricava che

$$d_e([s],[t]) = \sqrt{|\cos(t)-\cos(s)|^2 + |\sin(t)-\sin(s)|^2} = \sqrt{2-2\cos(t-s)} \ .$$

Poi definiamo la funzione

$$d_a([s],[t]) = \inf\{|s-t-2\pi k| \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \ ,$$

mostrate che è una distanza su $\mathbb{R}/2\pi$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Y8']

E9.167 Mostrate che $d_a([s],[t])$ è la lunghezza del più corto arco in S^1 che collega $\Phi([s])$ a $\Phi([t])$. [0Y9]

E9.168 Mostrate che le distanze d_a e d_e sono equivalenti, dimostrando che $\frac{2}{\pi} d_a \leq d_e \leq d_a$. [0YB]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0YC']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E9.169 Prerequisiti:9.61. Si può facilmente mostrare che una funzione $f : \mathbb{R}/2\pi \to X$ può essere vista come una funzione periodica $\tilde{f} : \mathbb{R} \to X$ di periodo 2π, e viceversa. [OYD]

Questo può essere facilmente ottenuto dalla relazione $f([t]) = \tilde{f}(t)$ dove t è un generico elemento della sua classe di equivalenza $[t]$. Supponendo che $\tilde{f}$ sia periodica di periodo 2π, la precedente relazione permette di ricavare f da $\tilde{f}$ e viceversa.

Si mostri che f è continua se e solo se $\tilde{f}$ è continua.

E9.170 Prerequisiti:7.32. Sia (X, τ) la *retta compattificata*, lo spazio topologico definito in 7.32; si mostri che è omeomorfa a S^1. [OYF]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§10 Dimensione

[OYH]

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia nel seguito K un sottoinsieme di X, compatto nonvuoto, e sia $N(\rho)$ il minimo numero di palle di raggio ρ che sono necessarie per coprire K. †84

Definizione 10.1. *Se esiste il limite* [OYJ]

$$\lim_{\rho\to 0+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \tag{10.2}$$

diremo che questo limite è la ***dimensione di Minkowski*** $\dim(K)$ *di* K.

Se il limite non esiste, potremo comunque usare il limsup e il liminf per definire la *dimensione superiore e inferiore*.

Si noti che questa definizione dipende *a priori* dalla scelta della distanza, cioè $N = N(\rho, K, d)$ e $\dim = \dim(K, d)$. Si veda in particolare 10.10.

Esercizi

E10.3 Mostrate che $N(\rho)$ è decrescente in ρ. [OYK]

E10.4 `Prerequisiti: 9.114.Difficoltà:*.` Mostrate che $N(\rho)$ è limitato se e solo se K contiene solo un numero finito di punti. *Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID 'OYP']` Dunque se K è infinito si deve avere $\lim_{\rho\to 0+} N(\rho) = \infty$. [OYN]

E10.5 Sia definito $N'(\rho)$ essere il minimo numero di palle di raggio ρ e centrate in K che sono necessarie per coprire K: allora [OYQ]

$$N'(2\rho) \le N(\rho) \le N'(\rho)\,.$$

Dunque la dimensione non cambia se si richiede che le palle siano centrate in punti di K. *Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID 'OYR']`

E10.6 Sia $P(\rho)$ il numero numero massimo di palle di raggio ρ e centrate in K che sono disgiunte. Si mostri che [OYS]

$$N(2\rho) \le P(\rho) \le N(\rho/2)\,.$$

Dunque la dimensione si può calcolare anche come

$$\lim_{\rho\to 0+} \frac{\log P(\rho)}{\log(1/\rho)}\,. \tag{10.7}$$

Una tale costruzione è nota come *ball packing* in Inglese. *Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID 'OYT']`

E10.8 Nell'esercizio 10.6 è importante richiedere che le palle siano centrate in punti di K. Trovate un esempio di spazio metrico (X, d) e di $K \subseteq X$ compatto di dimensione finita, ma tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $\rho > 0$, esistono infinite palle disgiunte ciascuna contenente un solo punto di K. [OYV]

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID 'OYW']`

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E10.9 Mostrare che la dimensione non cambia se si usano i dischi [0YX]

$$D(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y\ ,\ d(x,y) \le r\}$$

invece delle palle $B(x,r)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0YY']

E10.10 Prerequisiti:9.8. Sia $K \subseteq X$ compatto; sia $\alpha > 1$; sia $\tilde{d}(x,y) = \sqrt[\alpha]{d(x,y)}$, sappiamo da 9.8 che è una distanza. Mostrate che [0YZ]

$$\alpha \dim(K,d) = \dim(K,\tilde{d})\ .$$

In particolare $K = [0,1]$ (l'intervallo $K \subseteq X = \mathbb{R}$) con la distanza $\tilde{d}(x,y) = \sqrt[\alpha]{|x-y|}$ ha dimensione α.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Z0']

E10.11 Argomenti:norma.Prerequisiti:11.10. [0Z1]

Sia K un compatto in $\mathbb{R}^n$; indichiamo con $\dim(K,|\cdot|)$ il limite che definisce la dimensione, usando le palle della norma Euclidea. Data una norma ϕ possiamo definire la distanza $d(x,y) = \phi(x-y)$, e con questo calcolare la dimensione $\dim(K,\phi)$. Si mostri che $\dim(K,|\cdot|) = \dim(K,\phi)$, nel senso che, se un limite esiste allora esiste anche l'altro limite, e sono uguali. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '0Z2']

E10.12 Indichiamo un criterio operativo che può essere usato negli esercizi seguenti. [0Z3]

- Se esiste una successione descrescente $\rho_j \to 0$ e h_j interi positivi tale che bastano h_j palle di raggio ρ_j per coprire K, allora

$$\limsup_{\rho\to 0+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \le \limsup_{j\to\infty} \frac{\log h_{j+1}}{\log(1/\rho_j)}\ . \tag{10.13}$$

- Se viceversa esiste una successione descrescente $r_j \to 0$, e $C_n \subseteq K$ famiglie finite di punti che distano almeno r_j fra loro, cioè per cui

$$\forall x,y \in C_n, x \neq y \Rightarrow d(x,y) \ge r_j\ , \tag{10.14}$$

allora

$$\liminf_{\rho\to 0+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \ge \liminf_{j\to\infty} \frac{\log l_j}{\log(1/r_{j+1})}\ . \tag{10.15}$$

dove $l_j = |C_j|$ è la cardinalità di C_j. Si noti che i punti di $x \in C_j$ sono centri di palle $B(x, r_j/2)$ disgiunte, dunque $l_j \le P(r_j/2)$, come definito in 10.6.

In particolare se

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\log h_{j+1}}{\log(1/\rho_j)} = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log l_j}{\log(1/r_{j+1})} = \beta \tag{10.16}$$

allora l'insieme K ha dimensione β.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Z5'][UNACCESSIBLE UUID '0Z6']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E10.17 Prerequisiti: 11.25 10.11 10.12.Difficoltà:∗.Sia $K \subseteq \mathbb{R}^m$ compatto. Consideriamo la famiglia dei cubi chiusi di lato 2^{-n} e centri nei punti della griglia $2^{-n}\mathbb{Z}^m$. La chiamiamo *"n-tassellatura"*. Sia N_n il numero di cubi della *n-tassellatura* che intersecano K. Mostrate che N_n è debolmente crescente. Mostrate che il seguente limite esiste [OZ7]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 N_n}{n} \tag{10.18}$$

se e solo se esiste il limite (10.2) che definisce la dimensione, e se esistono coincidono. Questo approccio al calcolo della dimensione viene chiamato *Box Dimension* in Inglese.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0Z8'][UNACCESSIBLE UUID '0Z9']

Queste quantità hanno una interpretazione nella teoria "rate-distortion". "n" è la posizione dell'ultima cifra significativa (in base 2) nel determinare la posizione di un punto x. "$\log_2 N_n$" è il numero di "bit" necessari per identificare un qualunque $x \in K$ con tale precisione.

E10.19 Sia a_n una successione positiva decrescente infinitesima. Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ dato da [OZB]

$$K = \{0\} \cup \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}\,;$$

notate che è compatto. Studiate la dimensione di K in questi casi:

- $a_n = n^{-\theta}$ con $\theta > 0$;
- $a_n = \theta^{-n}$ con $\theta > 1$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0ZC']

E10.20 Siano $1 \leq d \leq n$ interi. Sia $[0,1]^d$ un cubo di dimensione d, lo vediamo come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ ponendo [OZD]

$$K = [0,1]^d \times \{(0,0\ldots 0)\}$$

cioè

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x_1 \leq 1, \ldots 0 \leq x_d \leq 1, x_{d+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

Si mostri che la dimensione di K è d.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0ZF']

E10.21 Si mostri che la dimensione della (immagine della) curva frattale di Koch è $\log 4/\log 3$. (Si veda ad esempio [54] per la definizione). [OZG]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0ZH']

E10.22 Si mostri che la dimensione dell'insieme di Cantor è $\log(2)/\log(3)$. [OZJ]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '0ZK']

E10.23 Prerequisiti:12.21,11.35.Dentro nello spazio di Banach $X = C^0([0,a])$ dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$ consideriamo [OZM]

$$K = \{f, f(0) = 0, \forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\}$$

dove $L > 0, a > 0$ sono fissati.

Si stimi $N(\rho)$ per $\rho \to 0$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E10.24 Argomenti:ultrametrica.Prerequisiti:9.144. [OZP]

Sia $\lambda > 0$. Definiamo lo spazio ultrametrico delle successioni come in Sez. §9.m.a: sia I finito, di cardinalità p; sia $X = I^{\mathbb{N}}$ lo spazio delle successioni; sia c come in eqn. (9.145); sia $d(x, y) = \lambda^{-c(x,y)}$. Per gli esercizi 9.149 e 9.146 (X, d) è compatto.

Si mostri che la dimensione di (X, d) è $\log p / \log \lambda$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID 'OZQ']

E10.25 Difficoltà:*. Esibite un compatto $K \subset \mathbb{R}$ per cui non esiste il limite (10.2). [OZR]

[†84] Per il teorema di Heine-Borel 9.110 sappiamo che $N(\rho) < \infty$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§11 Spazi normati [OZT]

Sia nel seguito X uno spazio vettoriale basato sul campo reale $\mathbb{R}$.

Definizione 11.1 (Norma)**.** *Una* norma *è un operazione che mappa un vettore $v \in X$ in un numero reale $\|v\|$, che soddisfa* [OZV]

1. $\|v\| \geq 0$ *e* $\|v\| = 0$ *se e solo se* $v = 0$*;*
2. *per ogni $v \in X$ e $t \in \mathbb{R}$ si ha $|t|\,\|v\| = \|tv\|$ (diremo che la norma è* assolutamente omogenea*);*
3. (Disuguaglianza triangolare) *per ogni $v, w \in X$ si ha*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad ;$$

questa dice che un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due.

Nota 11.2. *Molti dei risultati negli esercizi successivi si generalizzano al caso di* "norme asimmetiche"*, in cui la seconda richiesta sia sostituita da questa:* per ogni reale $t \geq 0$ si ha $t\|v\| = \|tv\|$*. (In questo caso diremo che la norma è* positivamente omogenea*).* [OZW]

Esercizi

E11.3 Sia X uno spazio vettoriale e $f : V \to \mathbb{R}$ una funzione che è *positivamente omogenea*, cioè: per ogni $v \in X$ e $t \geq 0$ si ha $tf(v) = f(tv)$. [OZX]

Mostrate che f è convessa se e solo se vale la *disuguaglianza triangolare*: per ogni $v, w \in X$ si ha

$$f(v + w) \leq f(v) + f(w) \quad .$$

In particolare, una norma è sempre una funzione convessa.

E11.4 Notate che se $v, w \in X$ sono linearmente dipendenti e hanno lo stesso verso (cioè si può scrivere $v = \lambda w$ o $w = \lambda v$, per $\lambda \geq 0$), allora si ha [OZY]

$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \quad .$$

In particolare, una norma non è una funzione strettamente convessa, perché

$$\|v/2 + v/2\| = \frac{1}{2}\|v\| + \frac{1}{2}\|v\| \quad .$$

E11.5 Prerequisiti:11.7, 14.57, 11.3.Difficoltà:∗.Diremo che lo spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è *strettamente convesso*[†85] se le seguenti proprietà equivalenti valgono. [OZZ]

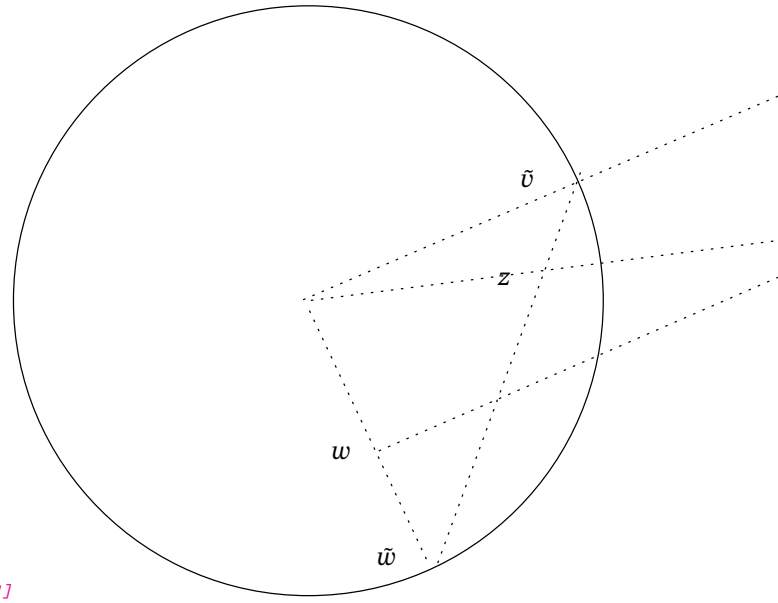
- Il disco $D = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ è strettamente convesso. [†86]
- La sfera $\{x \in X, \|x\| = 1\}$ non contiene segmenti non-banali (cioè, segmento di lunghezza positiva).

[†85] Si veda [33] per ulteriori proprietà.
[†86] La definizione è in 14.57.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- Per $v, w \in D$ con $\|v\| = \|w\| = 1$ e $v \neq w$, per ogni t con $0 < t < 1$ si ha che $\|tv + (1-t)w\| < 1$.
- Per ogni $v, w \in X$ che sono linearmente indipendenti si ha $\|v + w\| < \|v\| + \|w\|$.

Dimostrate che le quattro precedenti clausule sono equivalenti.



Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '102']

E11.6 Sia X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$, mostrate che l'operazione somma $'+' : X \times X \to X$ è continua. [105]

E11.7 Prerequisiti:9.43. [106]

Sia di nuovo X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$. Sia $B(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : \|x-y\| < r\}$ la palla; sia $D(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : \|x-y\| \leq r\}$ il disco; sia $S(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : \|x-y\| = r\}$ la sfera. Si mostri che $\overline{B(x,r)} = D(x,r)$, che $B(x,r) = D(x,r)^\circ$, e che $\partial B(x,r) = \partial D(x,r) = S(x,r)$. Si mostri inoltre che $B(x,r)$ non è chiuso e $D(x,r)$ non è aperto.

E11.8 Prerequisiti:9.39. Sia X uno spazio vettoriale, siano ϕ, ψ due norme su esso. Mostrate che le topologie generate da ϕ e ψ coincidono, se e solo se esistono $0 < a < b$ tali che [107]

$$\forall x, \quad a\psi(x) \leq \phi(x) \leq b\psi(x) \ . \tag{11.9}$$

(Quando la relazione (11.9) sussiste, diremo che le norme sono *"equivalenti"*).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '108']

E11.10 *Vogliamo mostrare che "le norme in $\mathbb{R}^n$ sono tutte equivalenti".* [109]

Sia $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ la norma euclidea. Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ una norma: si può mostrare che ϕ è una funzione convessa 11.3, e dunque che è una funzione continua per 14.33. Usate questo fatto per dimostrare che esistono $0 < a < b$ tali che

$$\forall x, \quad a\|x\| \leq \phi(x) \leq b\|x\| \ . \tag{11.11}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10B']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§11.a Norme nello spazio Euclideo [2CK]

Definizione 11.12. *Dato $p \in [1,\infty]$, si definiscono le norme $\|x\|_p$ su $\mathbb{R}^n$ con* [10C]

$$\|x\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} & p \neq \infty \\ \max_{i=1}^n |x_i| & p = \infty \end{cases} \tag{11.13}$$

(Il fatto che queste siano norme si dimostra con la 11.21).

Esercizi

E11.14 Mostrate che $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. [10D]

E11.15 Prerequisiti:16.65. Dati $t, s \in [1,\infty]$ con $s > t$ e $x \in \mathbb{R}^n$ mostrate che $\|x\|_s \leq \|x\|_t$. Inoltre mostrate che $\|x\|_s < \|x\|_t$ se $n \geq 2$ e $x \neq 0$ e x non è multiplo di uno dei vettori della base canonica $e_1, \dots e_n$. [10F]

Suggerimenti:

1. *usate che $1 + t^p \leq (1+t)^p$ per $p \geq 1$ e $t \geq 0$; o*
2. *usate i moltiplicatori di Lagrange; o*
3. *ricordiamo che $f(a+b) > f(a) + f(b)$ quando $a \geq 0, b > 0$ $f(0) = 0$ e $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa e continua in 0 (si veda l'esercizio 14.49), dunque derivate $\frac{d}{dt}(\log \|x\|_t)$ e ponete $f(z) = z\log(z)$).*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10G']

E11.16 Dati $s, t \in [1,\infty]$ con $s < t$ mostrate che $n^{-1/s}\|x\|_s \leq n^{-1/t}\|x\|_t$ (dove si intende $n^{-1/\infty} = 1$). (Notate che questa è una disuguaglianza fra medie). [10J]
(Sugg. Ponete $\alpha = t/s$ e $y_i = |x_i|^s$, poi usate la convessità di $f(y) = y^\alpha$. Altro suggerimento: usate 11.17.) Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10K']

E11.17 Siano dati $p, q \in [1,\infty]$ tali che $1/p + 1/q = 1$ [†87] e $x, y \in \mathbb{R}^n$; si mostri la **disuguaglianza di Hölder** in questa forma [10M]

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad . \tag{11.18}$$

In quali casi si ha uguaglianza?

Suggerimenti: assumete $x_i, y_i \geq 0$; per i casi con $p, q < \infty$ potete:

- *usare la disuguaglianza di Young (14.50 o 23.16);*
- *usare i moltiplicatori di Lagrange;*
- *partire dal caso $n = 2$ e porre $x_2 = tx_1$ e $y_2 = ay_1$; per i casi $n \geq 3$ usare induzione.*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10N']

E11.19 Prerequisiti:11.17. Si deduca la versione [10P]

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad ; \tag{11.20}$$

dalla (11.18). In quale caso vale l'uguaglianza?

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E11.21 Prerequisiti:11.17. Dato $p \in [1,\infty]$ si mostri la **disuguaglianza di Minkowski** [10Q]

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \quad . \tag{11.22}$$

Se ne deduce che $\|x\|_p$ sono norme.

Per $p \in (1,\infty)$ trovate una semplice condizione (necessaria e sufficiente) che comporti l'uguaglianza; confrontatela con 11.4; deducete che $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$ per $p \in (1,\infty)$ è uno *spazio normato strettamente convesso* (vedere 11.5). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '10R']

E11.23 Prerequisiti:11.3,14.55,11.15. Sia $r > 0$; se $p \in [1,\infty]$ allora la palla $B_r^p = \{\|x\|_p < r\}$ è convessa; inoltre $B_r^p \subseteq B_r^{\tilde p}$ se $\tilde p > p$. Nel caso $n = 2$ del piano, studiare graficamente la forma delle palle al variare di p. Vi sono punti che si trovano sulla frontiera di tutte le palle? *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '10T'] [10S]

E11.24 Se $r > 0$ e $p \in (1,\infty)$ allora la sfera $\{\|x\|_p = r\}$ è una superficie regolare. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '10W'] [10V]

E11.25 Prerequisiti:(11.13). Dotiamo $\mathbb{R}^n$ della norma $\|x\|_\infty$: mostrare che in dimensione 2 il disco $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \le 1\}$ è un quadrato, e in dimensione 3 è un cubo, *etc etc.* [10X]

Ora dotiamo $\mathbb{R}^n$ della norma $\|x\|_1$: mostrare che in dimensione 2 il disco $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 \le 1\}$ è un *rombo* cioè precisamente un quadrato ruotato di 45 gradi; e in dimensione 3 il disco è un'ottaedro.

E11.26 Trovate una norma in $\mathbb{R}^2$ tale che la palla sia un poligono regolare di n lati. [10Y]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '10Z']

§11.b Isometrie [2CH]

Riscriviamo la definizione 9.102 nel caso di spazi normati.

Definizione 11.27. *Se M_1, M_2 sono spazi vettoriali con norme $\|\|_{M_1}$ e rispettivamente $\|\|_{M_2}$, allora φ è un isometria quando* [110]

$$\forall x, y \in M_1, \|x-y\|_{M_1} = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{M_2} \tag{11.28}$$

(riscrivendo la definizione di distanza usando le norme).

La confronteremo con questa definizione.

Definizione 11.29. *Siano B_1, B_2 due spazi vettoriali normati. Una funzione $f : B_1 \to B_2$ è un'**isometria lineare** se è lineare e se* [111]

$$\|z\|_{B_1} = \|f(z)\|_{B_2} \ \forall\, z \in B_1 \quad . \tag{11.30}$$

Se φ è lineare allora la definizione di equazione (11.28) è equivalente alla definizione di *isometria lineare* vista in equazion (11.30) (basta porre $z = x - y$). Questo spiega perché entrambi vengono chiamate "isometrie".

Per il teorema di Mazur–Ulam [58] se M_1, M_2 sono spazi vettoriali (su campo reale) dotati di norma e φ è una isometria surgettiva, allora φ è affine (che vuol dire che $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(0)$ è lineare).

Ci chiediamo ora se vi possono essere isometrie che non sono mappe lineari, o più in generale mappe affini.

[†87] Si intende che se $p = 1$ allora $q = \infty$; e viceversa.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E11.31 Supponiamo che la sfera $\{x \in M_2, \|x\|_{M_2} = 1\}$ non contenga segmenti non-banali: allora ogni funzione che soddisfa (11.28) è necessariamente affine. [112]

(Si veda anche l'esercizio 11.5).

E11.32 La condizione che φ sia surgettiva non si può togliere dal Teorema di Mazur-Ulam. Trovate un esempio. [114]

Sugg. Per via dell'esercizio 11.31, la sfera $\{x \in M_2, \|x\|_{M_2} = 1\}$ dovrà contenere segmenti.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '115']

§11.c Convergenza totale [2CJ]

Definizione 11.33. *Sia nel seguito X uno spazio vettoriale basato sul campo reale $\mathbb{R}$, con norma $\|\cdot\|$. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di X. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$* converge totalmente *quando $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$.* [116]

Esercizi

E11.34 Si mostri che se le serie di $(f_n)_n, (g_n)_n$ convergono totalmente, allora la serie di $(f_n + g_n)_n$ converge totalmente. [117]

E11.35 Argomenti:convergenza totale.Prerequisiti:9.12,9.13,9.14. [118]

Sia V uno spazio vettoriale dotato di una norma $\|x\|$; dunque V è anche uno spazio metrico con la metrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Mostrate che le due asserzioni seguenti sono equivalenti.

- (V, d) è completo.
- Per ogni successione $(v_n)_n \subset V$ tale che $\sum_n \|v_n\| < \infty$, si ha che la serie $\sum_n v_n$ converge.

(La seconda viene a volte chiamata "criterio di convergenza totale")

Uno spazio vettoriale normato $(V, |\cdot\|)$ per cui lo spazio metrico associato (V, d) è completo, è detto **spazio di Banach**.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '119']

§11.d Norme di applicazioni lineari [2CM]

Siano nel seguito $(X, \|\|_X)$ e $(Y, \|\|_Y)$ spazi normati; sia $A : X \to Y$ un'applicazione lineare; definiamo la **norma indotta** come

$$\|A\|_{X,Y} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in X\,,\ \|x\|_X\leq 1} \|Ax\|_Y\,.$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E11.36 Mostrate che $\|A\|_{X,Y} < \infty$ se e solo se A è continua. [11B]

E11.37 Notate che se X ha dimensione finita allora ogni applicazione lineare è continua, e [11C]

$$\|A\|_{X,Y} = \max_{x\in X\,,\ \|x\|_X\le 1} \|Ax\|_Y \ .$$

E11.38 Sia $\mathcal{L}(X,Y)$ lo spazio di tutte le applicazioni lineari continue. Mostrate che $\|\cdot\|_{X,Y}$ è una norma in $\mathcal{L}(X,Y)$. [11D]

E11.39 Sia $(Z,\|\|_Z)$ un ulteriore spazio normato, e $B : Y \to Z$ una applicazione lineare. Definiamo similmente [11F]

$$\|B\|_{Y,Z} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y\in Y\,,\ \|y\|_Y\le 1} \|By\|_Z \quad ;$$

mostrate che

$$\|AB\|_{X,Z} \le \|A\|_{X,Y}\|B\|_{Y,Z} \ .$$

§11.e Norme di matrici [2CN]

Siano $p, q \in [1,\infty]$; usiamo nel seguito le norme $|x|_p$ definite in eqn. (11.13).

Definizione 11.40. *Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matrice; considerandola come una applicazione lineare fra gli spazi normati $(\mathbb{R}^n, ||_p)$ e $(\mathbb{R}^m, ||_q)$, definiamo di nuovo la* norma indotta *come* [11G]

$$\|A\|_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in\mathbb{R}^n\,,\ |x|_p\le 1} |Ax|_q \tag{11.41}$$

(Notate che il massimo è sempre raggiunto in un punto con $|x|_p = 1$).

La norma $\|A\|_{2,2}$ è detta la norma spettrale. .

Definizione 11.42. *Definiamo inoltre le norme* [11H]

$$\|A\|_{F-\tilde p} = \begin{cases} \sqrt[\tilde p]{\sum_{i,j} |A_{i,j}|^{\tilde p}} & \tilde p < \infty \\ \max_{i,j} |A_{i,j}| & \tilde p = \infty \end{cases} \ ,$$

per $\tilde p \in [1,\infty]$. Il caso $\tilde p = 2$ è detto norma di Frobenious.

Esercizi

E11.43 Prerequisiti:11.10. Notate che le norme $\|A\|_{p,q}$ e $\|A\|_{F-\tilde p}$ sono tutte equivalenti. [11J]

E11.44 Prerequisiti:11.39. Consideriamo matrici quadrate, cioè $n = m$. Sappiamo da 11.39 che le norme $\|A\|_{p,q}$ sono submoltiplicative, cioè $\|AB\|_{p,q} \le \|A\|_{p,q}\|A\|_{p,q}$. [11K]

Mostrate che anche la norma di Frobenious $\|A\|_{F-2}$ è submoltiplicativa.

Notate che per una norma submoltiplicativa si ha che $\|A^k\| \le \|A\|^k$ per ogni k naturale.

E11.45 Mostrate che [11M]

$$\|A\|_{1,1} = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}|,$$

$$\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \ .$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E11.46 Se $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ possiamo definire le norme indotte [11N]

$$\|A\|_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in\mathbb{C}^n,\ |x|_p\leq 1} |Ax|_q \ . \tag{11.47}$$

Mostrate che $\|A\|_{p,q} = \|\overline{A}\|_{p,q}$.

E11.48 Mostrate che se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ si ha [11P]

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n,|x|_2\leq 1} |Ax|_2 = \max_{x\in\mathbb{C}^n,|x|_2\leq 1} |Ax|_2 \ .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '11Q']

§11.f Somma di Minkowski [2CP]

Sia nel seguito X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$.

Definizione 11.49. *Sia X uno spazio vettoriale, e siano $A, B \subseteq X$. Definiamo la* ***somma di Minkowski*** *$A \oplus B \subseteq X$ come* [11R]

$$A \oplus B = \{x + y \,:\, x \in A, y \in B\} \ .$$

Nel seguito, dati $A \subseteq X, z \in X$ indicheremo con $A + z = \{b + z \,:\, b \in B\}$ la traslazione di A nella direzione z.

Esercizi

E11.50 Prerequisiti: 11.49. Mostrate che la somma è associativa ed è commutativa; e che la somma ha un unico elemento neutro, che è l'insieme $\{0\}$ costituito dalla sola origine. [11S]

E11.51 Prerequisiti: 11.49. Se A è aperto mostrate che $A \oplus B$ è aperto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '11V'] [11T]

E11.52 Prerequisiti: 11.49. Se A, B sono compatti mostrate che $A \oplus B$ è compatto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '11X'] [11W]

E11.53 Prerequisiti: 11.49. Se A è chiuso e B è compatto, mostrate che $A \oplus B$ è chiuso. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '11Z'] [11Y]

E11.54 Prerequisiti: 11.49. Mostrate un esempio dove A, B sono chiusi ma $A \oplus B$ non è chiuso. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '121'] [120]

E11.55 Prerequisiti: 11.49. Se A, B sono convessi mostrate che $A \oplus B$ è convesso. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '123'] [122]

Si vedano anche gli esercizi 5.29 e 9.70.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§11.g Morfologia matematica [2CQ]

Sia nel seguito X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$.

Definizione 11.56. *Per $A, B \subseteq X$ sottoinsiemi, ricordiamo la definizione della* somma di Minkowski $A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ *vista in 11.49.* [124]

Fissato ora un insieme B, definiamo

- *la **dilatazione** di un insieme $A \subseteq X$ essere $A \oplus B$;*
- *l'**erosione** di un insieme $A \subseteq X$ come*

$$A \ominus B = \{z \in X : (B + z) \subseteq A\} \quad ;$$

- *la **chiusura** $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$;*
- *l'**apertura** $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$.*

Dove, dati $B \subseteq X, z \in X$, abbiamo indicato con $B+z = \{b+z : b \in B\}$ la traslazione di B nella direzione z. Nelle precedenti operazioni B è noto come "elemento strutturale", e nelle applicazioni spesso B è un disco o una palla.

Siano nel seguito $A, B, C \subseteq X, w, z \in X$. Alcuni dei seguenti esercizi sono tratti da [29].

Esercizi

E11.57 Prerequisiti:11.56. [125]

Mostrate le seguenti identità:

$$A \oplus B = \bigcup_{y \in B} (A + y)$$
$$A \ominus B = \bigcap_{y \in B} (A - y)$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '126']

E11.58 Prerequisiti:11.57,11.56. [127]

Sia $\tilde{B} = \{-b : b \in B\}$: mostrate che $(A \oplus B)^c = A^c \ominus \tilde{B}$, dove $A^c = X \setminus A$ è il complementare. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '128']

E11.59 Prerequisiti:11.56,11.57. [129]

Mostrate che le quattro operazioni sono monotone: se $A \subseteq C$ allora $A \oplus B \subseteq C \oplus B$, $A \ominus B \subseteq C \ominus B$, $A \bullet B \subseteq C \bullet B$ e $A \circ B \subseteq C \circ B$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12B']

E11.60 Prerequisiti:11.56,11.51,11.58. Se A è chiuso mostrate che $A \ominus B$ è chiuso. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12D'] [12C]

E11.61 Prerequisiti:11.56. [12F]

Mostrate che la erosione gode della proprietà invariantiva in questo senso:

$$(A + z) \ominus (B + z) = A \ominus B \, .$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E11.62 Prerequisiti:11.56. [12G]

Inoltre, l'erosione soddisfa $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12H']

E11.63 Prerequisiti:11.56. [12J]

Mostrate che la dilatazione gode della proprietà distributiva rispetto all'unione:

$$(A \cup C) \oplus B = (A \oplus B) \cup (C \oplus B).$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12K']

E11.64 Prerequisiti:11.56,11.63,11.58. Mostrate che la erosione gode della proprietà distributiva rispetto all'intersezione: [12M]

$$(A \cap C) \ominus B = (A \ominus B) \cap (C \ominus B).$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12N']

E11.65 Prerequisiti:11.56,11.58. Sia $\tilde{B} = \{-b : b \in B\}$. Mostrate che [12P]

$$(A \bullet B)^c = (A^c \circ \tilde{B}) .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12Q']

E11.66 Prerequisiti:11.56. [12R]

Mostrate che

$$A \subseteq (C \ominus B)$$

se e solo se

$$(A \oplus B) \subseteq C .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12S']

E11.67 Prerequisiti:11.56. [12T]

Ricordiamo che l'operazione $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$ si chiama "chiusura".

- Mostrate che $A \subseteq A \bullet B$.
- Sia $X = \mathbb{R}^n$, $B = B_r = \{\|x\| < r\}$ una palla, trovate un esempio di insieme A aperto non vuoto limitato per cui $A \bullet B = A$.
- Sia $X = \mathbb{R}^n$, $B = B_r$ una palla, trovate un esempio per cui $A \bullet B \neq A$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12V']

E11.68 Prerequisiti:11.56,11.57. [12W]

L'apertura è data anche da $A \circ B = \bigcup_{x \in X, B+x \subseteq A} (B + x)$, il che significa che è il luogo delle traslazioni dell'elemento strutturale B all'interno dell'insieme A. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '12X']

E11.69 Prerequisiti:11.56. Nel seguito $A, B, \hat{B} \subseteq \mathbb{R}^n$. [12Y]

- Trovate un esempio dove $B \overset{\neq}{\subset} \hat{B}$ e $A \circ B \overset{\neq}{\subset} A \circ \hat{B}$.
- Trovate un esempio dove $B \overset{\neq}{\subset} \hat{B}$ e $A \circ \hat{B} \overset{\neq}{\subset} A \circ B$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '12Z']

E11.70 Prerequisiti:11.56,11.68.Se A è convesso e $\hat{B}$ è l' inviluppo convesso (vedere 14.15) di B mostrate che $A \circ B \subseteq A \circ \hat{B}$. Mostrate con un esempio che l'uguaglianza potrebbe non valere. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '131'] [130]

E11.71 Prerequisiti:11.56,11.68.Se A, B sono convessi mostrate che $A \circ B$ è convesso. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '133'] [132]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§12 Semicontinuità, limiti destri e sinistri [137]

§12.a Semi continuità [2CV]

Sia (X,τ) uno spazio topologico. Definiamo "liminf" e "limsup" generalizzando la definizione precedentemente presentata in 5.37 per il caso $X=\mathbb{R}$.

Definizione 12.1. *Sia $E\subseteq X$, $x_0\in X$ punto di accumulazione di E, $f: E\to\mathbb{R}$ funzione. Si definiscono* [2GW]

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{U \text{ intorno di } x_0} \sup_{x\in U\cap E} f(x) \tag{12.2}$$

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{U \text{ intorno di } x_0} \inf_{x\in U\cap E} f(x) \tag{12.3}$$

dove il primo "inf" (risp. il "sup") si esegue rispetto alla famiglia di tutti gli intorni U di x_0 (sempre del tipo "col buco"). [†88]

Definizione 12.4. *Una funzione $f: X\to\mathbb{R}$ si dice* semicontinua inferiormente *(abbreviata* s.c.i.*) se* [138]

$$\forall x_0\in D(X) \quad , \quad \liminf_{x\to x_0} f(x)\geq f(x_0)$$

e viceversa si dice semicontinua superiormente *(abbreviata* s.c.i.*) se*

$$\forall x_0\in D(X) \quad , \quad \limsup_{x\to x_0} f(x)\leq f(x_0)\,.$$

($D(X)$ sono i punti di accumulazione in X).

Si noti che f è *semicontinua inferioriormente* se e solo se $(-f)$ è *semicontinua superiormente*: dunque in molti esercizi successivi vedremo solo i casi *s.c.i.*

Esercizi

E12.5 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita come $f(x)=1$ se $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $f(0)=0$ e e $f(x)=1/q$ se $|x|=p/q$ con p,q numeri interi primi tra loro con $q\geq 1$. Mostrare che f è continua su $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ e discontinua in ogni $t\in\mathbb{Q}$. [139]

Mostrate che la funzione descritta è s.c.s. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '13B']

E12.6 Prerequisiti:12.5. [13C]

Costruire una funzione monotona con la stessa proprietà di quella vista nell'esercizio 12.5.

E12.7 Sia $f: X\to\mathbb{R}$; le seguenti asserzioni sono equivalenti: [13D]

1. f è *semicontinua inferiormente*,
2. per ogni t, si ha che il sottolivello

$$S_t=\{x\in X, f(x)\leq t\}$$

è chiuso,

[†88] Se non si vuole specificare "intorni col buco", si può scrivere $x\in U\cap E, x\neq x_0$ nel secondo termine.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

3. l'epigrafico
$$E = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}, f(x) \leq t\}$$
è chiuso in $X \times \mathbb{R}$.

Si noti che la seconda condizione comporta che f è continua da (X,τ) in $\mathbb{R},\tau_+$ dove $\tau_+ = \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset,\mathbb{R}\}$ è l'insieme delle semirette, che è una topologia (facile verifica).

Si formuli poi l'equivalente teorema per le funzioni *semicontinue superiormente*.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '13F']

E12.8 Se $f,g : X \to \mathbb{R}$ sono semicontinue inferiormente, allora $f+g$ è s.c.i. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '13H'] [13G]

E12.9 Sia I una famiglia di indici; poi, per $n \in I$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ siano funzioni s.c.i., definiamo $f \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n\in I} f_n$ allora f è s.c.i. (a valori $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$). [†89]. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '13K'] [13J]

E12.10 Viceversa, data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i., si mostri che esiste sempre una successione crescente di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tali che $f_n(x) \to_n f(x)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '13N'] [13M]

E12.11 `Argomenti:inf-convoluzione. Difficoltà:*.` Nel caso in cui (X,d) sia uno spazio metrico e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sia s.c.i. limitata dal basso, sia [13P]
$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y\in X}\{f(y) + nd(x,y)\}$$
la *inf-convoluzione*: si mostri che la successione f_n è una successione crescente di funzioni Lipschitziane con $f_n(x) \to_n f(x)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '13Q']

E12.12 Data $f : X \to \mathbb{R}$, si definisce [13R]
$$f^*(x) = f(x) \vee \limsup_{y\to x} f(y) \quad ;$$
si mostri che $f^*(x)$ è la più piccola funzione semi continua superiore che è maggiore o uguale a f in ogni punto.

Similmente si definisce
$$f_*(x) = f(x) \wedge \liminf_{y\to x} f(y)$$
e si ha $-(f^*) = (-f)_*$, e che dunque $f_*(x)$ è la più grande funzione semi continua inferiore che è minore o uguale a f in ogni punto.

Si noti infine che $f^* \geq f_*$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '13S']

E12.13 `Argomenti:oscillazione.` [13T]

Data una qualunque $f : X \to \mathbb{R}$, si definisce la *funzione oscillazione* $\operatorname{osc}(f)$
$$\operatorname{osc}(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f^*(x) - f_*(x)$$

[†89] Si noti che questo vale anche quando $n \in I$ famiglia più che numerabile di indici; e vale in particolare quando le f_n sono continue

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

1. Si noti che $\operatorname{osc}(f) \geq 0$, e che f è continua in x se e solo se $\operatorname{osc}(f)(x) = 0$.
2. Si mostri che $\operatorname{osc}(f)$ è semicontinua superiore.
3. Se (X, d) è uno spazio metrico, si noti che

$$\operatorname{osc}(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup\{|f(y) - f(z)| \,,\; d(x,y) < \varepsilon, d(x,z) < \varepsilon\} \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '13V']

E12.14 Sia (X, τ) uno spazio topologico e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione; sia $\overline{x} \in X$ un punto di accumulazione; sia infine U_n una famiglia di intorni aperti di $\overline{x}$ con $U_n \supseteq U_{n+1}$. Allora esiste una successione $(x_n) \subset X$ con $x_n \in U_n$ e $x_n \neq \overline{x}$ e tale che [13W]

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \liminf_{x \to \overline{x}} f(x) \ .$$

(Si noti che in generale non pretendiamo né ci aspettiamo che $x_n \to \overline{x}$). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '13X']

E12.15 Sia (X, τ) uno spazio topologico e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione; sia $\overline{x} \in X$ un punto di accumulazione; Sia A l'insieme di tutti i limiti $\lim_n f(x_n)$ (quando esistono) per tutte le successioni $(x_n) \subset X$ tali che $x_n \to \overline{x}$; allora [13Y]

$$\liminf_{x \to \overline{x}} f(x) \leq \inf A \ ;$$

inoltre se (X, τ) soddisfa il primo assioma di numerabilità, allora l'uguaglianza vale e $\inf A = \min A$.

E12.16 Sia $f_1 : [0, \infty] \to [0, \infty]$ funzione monotona (debolmente crescente) e continua a destra. Sia poi $f_2 : [0, \infty) \to [0, \infty]$ data da [13Z]

$$f_2(s) = \sup\{t \geq 0 : f_1(t) > s\}$$

(con la convenzione che $\sup \varnothing = 0$) e poi ancora $f_3 : [0, \infty) \to [0, \infty]$ data da

$$f_3(s) = \sup\{t \geq 0 : f_2(t) > s\} \quad :$$

allora $f_1 \equiv f_3$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '140']

§12.b Funzioni regolate [2CT]

Definizione 12.17. [141]

*Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ **regolate** sono le funzioni che ammettono in ogni punto limite destro e limite sinistro.* †90

(Si noti in particolare che ogni funzione monotona è regolata, e ogni funzione continua è regolata.)

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E12.18 Si mostri che una funzione regolata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è limitata. [142]

E12.19 Prerequisiti:12.13. Sia $I = [a,b]$ intervallo chiuso e limitato. Si mostri che [143]

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è regolata se e solo se
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito di punti $P \subset I$ tale che, per ogni $J \subseteq I$, J intervallo aperto che non contiene alcun punto di P, si ha che l'oscillazione di f in J è minore di ε.

E12.20 Sia V l'insieme delle funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ costanti a tratti, che è lo spazio vettoriale generato dalle funzioni caratteristiche $\mathbb{1}_J$ degli intervalli $J \subseteq I$. Si mostri che la chiusura di V secondo la convergenza uniforme coincide con lo spazio delle funzioni regolate. [144]

Dunque lo spazio delle funzioni regolate dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$ è uno spazio di Banach.

Si vedano anche gli esercizi 15.7, 15.8, 15.9 e 17.8.

§12.c Trasformata di sup [2CR]

Definizione 12.21. *Sia $I = \mathbb{R}^+$ oppure $I = \mathbb{R}$ nel seguito, per semplicità.* [2CS]
Sia $\varepsilon > 0$; data $f : I \to \mathbb{R}$ limitata[†91] *, definiamo la* "trasformata sup" *come la funzione $g : I \to \mathbb{R}$ data da*

$$g(x) = \sup_{y \in (x, x+\varepsilon)} f(y) \ . \tag{12.22}$$

Riassumiamo questa trasformazione con la notazione $g = F(\varepsilon, f)$.

Esercizi

E12.23 Prerequisiti:12.21. Mostrate che g è regolata. [145]

E12.24 Prerequisiti:12.21. Mostrate che g è semicontinua inferiore. [146]

E12.25 Prerequisiti:12.21. Mostrate che $f = g$ se e solo se f è monotona debolmente decrescente e continua a destra. [147]

E12.26 Prerequisiti:12.21. Data [148]

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x = 4 \\ 0 & x \neq 4 \end{cases}$$

trovate f tale che $g = F(1, f)$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '149']

E12.27 Prerequisiti:12.21. Mostrate che se f è continua allora g è continua. [14B]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '14C']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E12.28 Prerequisiti: 12.21, 11.35. Sia $C_b = C_b(I)$ lo spazio delle funzioni $f : I :\to \mathbb{R}$) continue e limitate. Questo è uno spazio di Banach (uno spazio normato completo) con la norma $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$. [14D]

Consideriamo la mappa $F : [0,\infty) \times C_b \to C_b$ che trasforma $g = F(\varepsilon, f)$, come definito nella eqn. (12.22).

Mostrate che F è continua.

E12.29 Prerequisiti: 12.21. Come cambiano i precedenti esercizi se si definisce invece [14F]

$$g(x) = \sup_{y\in[x,x+\varepsilon]} f(y) \ ? \tag{12.30}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '14G']

[†90] Negli estremi ovviamente si richiede uno solo dei due limiti.

[†91] L'ipotesi "limitata" è di comodo, i risultati successivi valgono anche senza questa ipotesi, con semplici modifiche.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§13 Continuità [14J]

§13.a Funzioni continue [2DP]

Definizione 13.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione; sia $x \in A$; f è detta **continua in** x se* [2DN]

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in A,\ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

*f è detta **continua** se è continua in ogni punto.*

L'insieme di tutte le funzioni continue $f : A \to \mathbb{R}$ è denotato con $C(A)$; è uno spazio vettoriale.

Ulteriori informazioni si possono trovare in Cap. 3 in [5] o Cap. 4 of [23].

Esercizi

E13.2 Sia $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si mostri che è limitata dall'alto [†92] se e solo se $\limsup_{x \to 0+} f(x) < +\infty$. [14K]

E13.3 `Prerequisiti:9.96.` Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si mostri che l'insieme dei punti di discontinuità eliminabile (cioè i punti z per cui si ha $\lim_{x \to z} f(x) \neq f(z)$, cf. [61]) è al più numerabile. [14M]

E13.4 `Prerequisiti:9.96.` Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si mostri che l'insieme di punti di discontinuità del secondo tipo è al più numerabile (cioè i punti z dove esistono i limiti laterali ma $\lim_{x \to z+} f(x) \neq \lim_{x \to z-} f(x)$, cf. [61]). [14N]

E13.5 `Prerequisiti:5.8.` Fissato $\alpha > 1$ definiamo, per $x \in \mathbb{R}$, α^x come in 5.8. Mostrate che è una funzione continua e che è un omeomorfismo fra $\mathbb{R}$ e $(0, \infty)$. L'inversa di $y = \alpha^x$ è la funzione **logaritmo** $x = \log_\alpha y$. [21N]

E13.6 `Prerequisiti:9.83.Difficoltà:*.` [14P]

Sia $C \subset \mathbb{R}$ chiuso e sia $f : C \to \mathbb{R}$ continua; mostrate che esiste sempre $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua che estende f, cioè $g_{|C} = f$.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '14Q']`

E13.7 `Difficoltà:**.` Trovate una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che non è monotona in nessun intervallo (aperto nonvuoto). [14R]

E13.8 `Prerequisiti:integrale di Riemann.` [14T]

Data $f = f(x, y) : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua e posto

$$g(x) = \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y \quad ,$$

mostrare che g è continua.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '14V']`

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E13.9 Data $f = f(x,y) : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e posto [14W]

$$g(x) = \max_{y \in [0,1]} f(x,y)$$

mostrare che g è continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '14X']

E13.10 Siano x_n, y_n successioni reali strettamente positive con limite zero; esiste una funzione continua e monotona $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tale che $f(0) = 0$ e $\forall x > 0, f(x) > 0$, e tale che $\forall n, f(x_n) < y_n$ (da cui $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$). [14Y]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '14Z']

E13.11 Sia data una funzione $g : [0,\infty) \to [0,\infty]$ tale che $g(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0+} g(x) = 0$; allora esiste una funzione continua e monotona $f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ tale che $f(0) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ e $f \geq g$. [150]

E13.12 Dimostrare che se una funzione monotona è definita su un sottoinsieme denso di un intervallo aperto I, e ha immagine densa in un altro intervallo aperto J, allora si prolunga a una funzione continua monotona tra i due intervalli I, J aperti. [151]

(Cosa succede se I è chiuso ma J è aperto?)

E13.13 Prerequisiti:categorie di Baire Sec. §9.k.Difficoltà:*. [152]

Si mostri che non esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua sui razionali e discontinua sugli irrazionali. *(Sugg. Si mostri che gli irrazionali $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non sono un F_σ in $\mathbb{R}$, usando il teorema di Baire.)*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '153']

§13.b Funzioni uniformemente continue [2DQ]

Definizione 13.14. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione; f è detta **uniformemente continua** se* [155]

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in A,\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

*Più in generale, dati (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici, data una funzione $f : X_1 \to X_2$, f è detta **uniformemente continua** se*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in X_1,\ d_1(x,y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \ .$$

Si vede facilmente che una funzione *uniformemente continua* è continua in ogni punto.

Esercizi

E13.15 Prerequisiti:13.14. Sia $f : X_1 \to X_2$ con (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici. [156]

Una funzione $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty]$ monotona (debolmente) crescente, con $\omega(0) = 0$ e $\lim_{t\to 0+} \omega(t) = 0$, tale che

$$\forall x, y \in X_1,\ \ d_2(f(x), f(y)) \leq \omega(d_1(x,y)) \ , \tag{13.16}$$

[†92] cioè esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in (0,1]$ si ha $f(x) < c$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

è detta **modulo di continuità** per la funzione f. (Notate che f può avere molti moduli di continuità).

Per esempio se la funzione f è Lipschitziana cioè esiste $L > 0$ tale che

$$\forall x, y \in X_1, \quad d_2(f(x), f(y)) \leq L\, d_1(x, y)$$

allora f soddisfa la eqz. (13.16) ponendo $\omega(t) = Lt$.

Vedremo ora che l'esistenza di un modulo di continuità è equivalente alla uniforme continuità di f.

- Se f è uniformemente continua, mostrate che la funzione

$$\omega_f(t) = \sup\{d_2(f(x), f(y)) \ : \ x, y \in X_1, d_1(x, y) \leq t\} \tag{13.17}$$

  è il più piccolo modulo di continuità.[†93]
- Notate che il modulo definito in (13.17) potrebbe non essere continuo, e potrebbe essere infinito per t grande — trovate esempi a riguardo.
- Mostrate inoltre che se f è uniformemente continua si può trovare un modulo che è continuo dove è finito.
- Viceversa è facile vericare che se f ha un modulo di continuità, allora è uniformemente continua.

Se non conoscete la teoria degli spazi metrici, potete dimostrare i precedenti risultati nel caso in cui $f : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$. (Si veda anche l'esercizio 13.25, che mostra che in questo caso il modulo ω definito in (13.17) è continuo ed è finito).

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '157'][UNACCESSIBLE UUID '158'] [UNACCESSIBLE UUID '159']`

E13.18 Sia (X, d) spazio metrico, sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente continue, si mostri che $\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale. [15C]

Questo vale più in generale se $f : X \to X_2$ dove X_2 è uno spazio vettoriale normato (a cui associamo la distanza derivata dalla norma).

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '15D']`

E13.19 `Difficoltà:*`. Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici, con (X_2, d_2) completo. Sia $A \subset X_1$ e $f : A \to X_2$ una funzione uniformemente continua. Si mostri che esiste una funzione uniformemente continua $g : \overline{A} \to X_2$ che estende f; inoltre l'estensione g è unica. [15F]

Si noti che se ω è un modulo di continuità per f allora è anche un modulo di continuità per g. (Si assuma che ω sia continuo, o almeno che sia semicontinuo superiore).
Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '15G'][UNACCESSIBLE UUID '15H']`

E13.20 `Prerequisiti:13.19`. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si mostri che f è uniformemente continua se e solo esiste una funzione continua $g : \overline{A} \to \mathbb{R}$ che estende f; inoltre l'estensione g è unica. [15J]

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '15K']`

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E13.21 Sia $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si mostri che è uniformemente continua se e solo se esiste finito il limite $\lim_{x\to 0+} f(x)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15N'] [15M]

E13.22 Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che esista finito il limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Si mostri che è uniformemente continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15Q'] [15P]

E13.23 Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, si mostri che queste due asserzioni sono equivalenti. [15R]

- Esiste $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua e tale che esiste finito il limite $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$.
- f è uniformemente continua.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '15S']

E13.24 Si trovi un esempio di $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua e limitata, ma non uniformemente continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15V'] [15T]

E13.25 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Sia il modulo di continuità ω, definito tramite la eqn. (13.17) come nell'esercizio 13.15. Si mostri che ω è subadditiva cioè [15W]

$$\omega(t) + \omega(s) \geq \omega(t+s) \quad .$$

Sapendo che $\lim_{t\to 0+} \omega(t) = 0$ se ne conclude che ω è continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '15X']

E13.26 Prerequisiti:13.25. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua; si mostri che [15Z]

$$\limsup_{x\to\pm\infty} |f(x)|/x < \infty$$

o equivalentemente che esiste una costante C tale che $|f(x)| \leq C(1+|x|)$ per ogni x. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '160']

E13.27 Prerequisiti:9.40. Siano (X_1,d_1), (X_2,d_2) e (Y,δ) tre spazi metrici; consideriamo il prodotto $X = X_1 \times X_2$ dotato della distanza $d(x,y) = d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$. [†94] Sia $f : X \to Y$ una funzione con le seguenti proprietà: [161]

- Per ogni fissato $x_1 \in X_1$ la funzione $x_2 \mapsto f(x_1,x_2)$ è continua (come funzione da X_2 a Y);
- esiste un modulo di continuità ω tale che

$$\forall x_1,\tilde{x}_1 \in X_2 \ , \ \forall x_2 \in X_2 \ , \delta\big(f(x_1,x_2), f(\tilde{x}_1,x_2)\big) \leq \omega\big(d_1(x_1,\tilde{x}_1)\big)$$

(potremmo definire questa proprietà dicendo che la funzione $x_1 \mapsto f(x_1,x_2)$ è uniformemente continua, con costanti indipendenti dalla scelta di x_2).

Si mostri allora che f è continua.

Si veda anche il punto 3 dell'esercizio 17.8.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§13.c Funzioni Lipschitziane & Hölderiane [2DR]

Definizione 13.28. *Sia $A \subset \mathbb{R}$. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice* ***Lipschitziana*** *se esiste $L > 0$ tale che $\forall x, y \in A$,* [162]

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \ .$$

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice ***Hölderiana*** *se esistono $L > 0$ e $\alpha \in (0, 1]$ tale che $\forall x, y \in A$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^{\alpha} \ .$$

*La costante α è detta l'*ordine.

Come nel caso della "uniforme continuità", questa nozione si estende alle mappe fra spazi metrici.

Esercizi

E13.29 Prerequisiti:13.15. Mostrate che le funzioni Lipschitziane, e le Hölderiane, sono uniformemente continue; che cosa si può dire del loro modulo di continuità? [163]

E13.30 Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Si mostri che f' è limitata su I se e solo se f è Lipschitziana. [164]

E13.31 Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ tale che esiste $\alpha > 1$ per cui $\forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha}$ (cioè f è Hölderiana di ordine $\alpha > 1$): si mostri che f è costante. [165]

E13.32 Sia data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e una decomposizione di $[a, b]$ in intervallini $I_1 = [a, t_1], I_2 = [t_1, t_2], \ldots, I_n = [t_{n-1}, b]$ tale che la restrizione di f su ciascun I_k è Lipschitziana di costante C. Si mostri che f è Lipschitziana di costante C. [166]

Similmente con le funzioni Hölderiane.

E13.33 Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Hölderiana con esponente $\alpha \leq 1$. Si mostri che f è Hölderiana con esponente β per ogni $\beta < \alpha$. [167]

Si noti che questo non è tecnicamente vero per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

E13.34 Si costruisca $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua ma non Hölderiana. *Soluzione nascosta:* [169]
[UNACCESSIBLE UUID '16B'][UNACCESSIBLE UUID '16C']

E13.35 Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineare è Lipschitziana. [16D]

E13.36 Per ognuna delle seguenti funzioni, dire se è continua, uniformemente continua, Hölderiana (e con quale esponente), o Lipschitziana. [16F]

- $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$.
- $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.
- $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)/x$
- $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^{\beta}$ con $\beta > 0$.
- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^{\beta})$ con $\beta > 0$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '16H']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E13.37 Dato $L \in (0,1)$ se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa [16J]

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

allora esiste un unico "punto fisso" cioè un punto x per cui $f(x) = x$.

E13.38 Trovate una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che [16K]

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ma per cui non esiste un "punto fisso", cioè un punto x per cui $f(x) = x$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '16M']

§13.d Funzioni discontinue [2DS]

Sia nel seguito (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 13.39. *Un insieme E si dice un F_σ se è unione numerabile di chiusi. (Si riveda l'esercizio 9.48).* [2CX]

Esercizi

E13.40 Notate che ogni insieme aperto $A \subset X$ nonvuoto è un F_σ. *(Sugg usate 9.69).* [16N]
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '16P']

E13.41 Prerequisiti:12.13,12.7. Data una generica $f : X \to \mathbb{R}$, si mostri che l'insieme E dei punti dove f è discontinua è un F_σ. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '16R'] [16Q]

E13.42 Prerequisiti:13.39.Difficoltà:*. [16S]

Supponiamo che (X, d) ammetta un sottoinsieme D che è denso ma ha parte interna vuota. [†95]

Dato un $E \subset X$ che è un F_σ, si costruisca una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ per cui E è l'insieme dei punti di discontinuità.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '16T']

[†93] Notate che la famiglia su cui si calcola l'estremo superiore contiene sempre i casi $x = y$, dunque $\omega(t) \geq 0$.

[†94] Sappiamo da 11.10 e 9.40 che vi sono diverse possibili scelte di distanze, che però sono fra loro equivalenti.

[†95] Cioè, sia D che il complementare $X \setminus D$ sono densi. $X = \mathbb{R}$ soddisfa tale requisito, prendendo ad esempio $D = \mathbb{Q}$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§14 Funzioni e insiemi convessi [16V]

Presenteremo ora alcuni risultati riguardo alla convessità. Per semplicità useremo $\mathbb{R}^n$ come spazio ambiente, ma quasi tutti i risultati valgono in un qualunque spazio vettoriale.

§14.a Insiemi convessi [2F0]

Definizione 14.1. *Dati $x_1, \dots x_k \in \mathbb{R}^n$, dati $t_1, \dots t_k \geq 0$ con $t_1 + \cdots + t_k = 1$, la somma* [16W]

$$x_1 t_1 + \cdots + x_k t_k$$

è una combinazione convessa *dei punti $x_1, \dots x_k$.*

Nota 14.2. *Se $k = 2$ allora la combinazione convessa si scrive usualmente come $(tx + (1-t)y)$ con $t \in [0,1]$; l'insieme di tutti questi punti è il segmento che collega x a y.* [23P]

Definizione 14.3. *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme; si dice* convesso *se* [16X]

$$\forall t \in [0,1], \ \ \forall x, y \in C, \ \ (tx + (1-t)y) \in C$$

cioè se il segmento che collega ogni $x, y \in C$ è tutto compreso in C.

(Notiamo che $\emptyset$ è un convesso, e che ogni sottospazio vettoriale o affine di $\mathbb{R}^n$ è convesso).

Gli insiemi convessi godono di tantissime proprietà interessanti, questa che segue è solo una piccola lista.

Topologia

Esercizi

E14.4 Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme; mostrate che è *convesso* se e solo se contiene ogni *combinazione convessa* dei suoi punti, cioè: per ogni $k \geq 1$, per ogni scelta di $x_1, \dots x_k \in C$, per ogni scelta $t_1, \dots t_k \geq 0$ con $t_1 + \cdots + t_k = 1$, si ha [16Y]

$$x_1 t_1 + \cdots + x_k t_k \in C \quad .$$

E14.5 `Argomenti:simplesso.` [16Z]

Dati $x_0, \dots x_k \in \mathbb{R}^n$, sia

$$\left\{ \sum_{i=0}^{k} x_i t_i \ : \ \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \forall i, t_i \geq 0 \right\} \tag{14.6}$$

l'insieme di tutte le possibili combinazioni, provare che questo insieme è convesso.

Quando i vettori $x_1 - x_0, x_2 - x_0 \dots x_k - x_0$ sono linearmente indipendenti, l'insieme sopra definito è un *simplesso* di dimensione k.

Si mostri che se $n = k$ allora il simplesso ha parte interna non vuota e uguale a

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} x_i t_i \ : \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \forall i, t_i > 0 \right\} \tag{14.7}$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E14.8 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso contenente almeno due punti, sia V il più piccolo spazio affine che contiene A (si mostri che questo concetto è ben definito); e, visto A come sottoinsieme di V, si mostri che A ha parte interna non vuota. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '171'] [170]

E14.9 Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, $x \in A^\circ$ e $y \in A$ allora il segmento che li collega è contenuto in A°, salvo eventualmente per l'estremo y, cioè $\forall t \in (0,1), tx+(1-t)y \in A^\circ$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '173'] [172]

E14.10 Prerequisiti:14.9,9.23. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, $x \in A^\circ$ e $z \in \partial A$ allora il segmento che li collega è contenuto in A°, salvo eventualmente per l'estremo z (cioè $\forall t \in (0,1), tx + (1-t)z \in A^\circ$). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '175'] [174]

E14.11 Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso, si mostri che, sia la sua apertura, quanto la sua chiusura, sono ancora convessi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '177'] [176]

E14.12 Prerequisiti:9.47,14.10. Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso con parte interna nonvuota, si mostri che $\overline{A} = \overline{(A^\circ)}$ (la chiusura della parte interna di A). Trovate poi un semplice esempio di A per cui $\overline{A} \neq \overline{(A^\circ)}$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '179'] [178]

E14.13 Prerequisiti:7.13.Difficoltà:*. [17B]

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso, si mostri che $A^\circ = \left(\overline{A}\right)^\circ$ (la parte interna della chiusura di A).

Usando 14.18 si mostra facilmente che $A^\circ \supseteq \left(\overline{A}\right)^\circ$; solo che questo risultato fa comodo in una delle possibili dimostrazioni di 14.18 (!); una dimostrazione alternativa usa i simplessi come intorni, cf *14.5. Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '17C']

E14.14 Siano $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi convessi, per $i \in I$: dimostrate che [059]

$$\bigcap_{i \in I} C_i$$

è convesso.

Definizione 14.15. *Sia dunque $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto,* ***l'inviluppo convesso*** *di A l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono A. Per via di 14.14, $co(A)$ è il più piccolo insieme convesso contenente A.* [2G4]

Si vedano anche gli esercizi 11.55, 11.70 e 11.71.

§14.a.a Proiezione, separazione

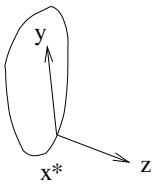
Esercizi

E14.16 Argomenti:proiezione.Difficoltà:*. Note:*Questo è il noto "teorema della proiezione", che vale per A convesso chiuso in uno spazio di Hilbert; se $A \subset \mathbb{R}^n$ allora la dimostrazione è più semplice, e è un utile esercizio.*. [17D]

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso convesso nonvuoto e $z \in \mathbb{R}^n$, si mostri che esiste un unico punto di minimo x^* per il problema

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

$$\min_{x\in A} \|z-x\| \ .$$



Si mostri che x^* è il minimo se e solo se

$$\forall y \in A, \langle z-x^*, y-x^*\rangle \le 0 \ .$$

x^* è chiamato "la proiezione di z su A".

(Notate che quest'ultima condizione dice semplicemente che l'angolo deve essere ottuso).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17G']

E14.17 Argomenti:separazione. Prerequisiti:14.16. [17H]

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso convesso non-vuoto e $z \notin A$, sia x^* definito come nell'esercizio precedente 14.16; definite $\delta = \|z-x^*\|$, $v = (z-x^*)/\delta$ e $a = \langle v, x^*\rangle$. Si dimostri che v, a e $v, a+\delta$ definiscono due iperpiani paralleli che separano fortemente z da A, nel senso che $\langle z, v\rangle = a+\delta$ ma $\forall x \in A, \langle x, v\rangle \le a$.

E14.18 Argomenti:separazione. Difficoltà:*. [17J]

Questo risultato vale in contesti molto generali, ed è una conseguenza del "teorema di Hahn–Banach" (che fa uso del Lemma di Zorn); se $A \subset \mathbb{R}^n$ si può però dimostrare in modo elementare, vi invito a provarci.

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso nonvuoto e $z \notin A$, si mostri che esiste un iperpiano P che separa z da A, nel senso che $z \in P$ mentre A è contenuto in uno dei due semispazi chiusi che hanno P come bordo. Equivalentemente, in forma analitica, esistono $a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ tali che $\langle z, v\rangle = a$ ma $\forall x \in A, \langle x, v\rangle < a$; e

$$P = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle y, v\rangle = a\} \ .$$

L'iperpiano P così definito è detto *iperpiano di supporto* di z per A.

Vi sono (almeno) due dimostrazioni possibili. Una possibile dimostrazione si fa per induzione su n; potete assumere senza perdita di generalità che $z = e_1 = (1, 0 \dots 0), 0 \in A, a = 1$; tenete presente che l'intersezione di un convesso aperto con $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ è un convesso aperto in $\mathbb{R}^{n-1}$; questa dimostrazione è complessa ma non usa nessun prerequisito. Una seconda dimostrazione usa 14.11 e 14.17 se $z \notin \partial A$; se $z \in \partial A$ usa anche 14.12 per trovare $(z_n) \subset (A^c)^\circ$ con $z_n \to z$.
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17K']

E14.19 Prerequisiti:14.18, 11.51. Se A, B sono convessi disgiunti, con A aperto, mostrate che esiste un iperpiano che separa A e B, cioè esistono $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ e $c \in \mathbb{R}$ tale che [17M]

$$\forall x \in A, \langle x, v\rangle < c \text{ ma } \forall y \in B, \langle y, v\rangle \ge c \ ; \tag{14.20}$$

mostrate inoltre che se anche B è aperto, allora si può avere separazione stretta (cioè disuguaglianza stretta nell'ultimo termine in (14.20)).

(Suggerimento: dati $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ convessi nonvuoti, si mostri che

$$A - B \stackrel{def}{=} \{x-y, x \in A, y \in B\}$$

è convesso; si mostri che se A è aperto allora $A-B$ è aperto, come in 11.51.)
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17N']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E14.21 Trovate un esempio di $A, B \subset \mathbb{R}^2$ convessi aperti con $\overline{A}, \overline{B}$ disgiunti, e tali che vi è un unico iperpiano che li separa (cioè una "unica" scelta di v, c che soddisfa (14.20); "unica", a meno di moltiplicare v, c per una stessa costante positiva). [17P]
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17Q']

E14.22 Prerequisiti:14.18. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, $x \in A^\circ$ e $y \in \partial A$, allora la retta che li collega, proseguendo oltre y, rimane fuori da $\overline{A}$ (cioè $\forall t > 1, ty + (1-t)x \notin \overline{A}$). [17R]
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17S']

E14.23 Argomenti:separazione,supporto. Prerequisiti: 14.8,14.18, 14.13. [17T]

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso nonvuoto e $z \in \partial A$, si dimostri che esistono $v \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$ tali che $\langle z, v\rangle = a$ e $\forall x \in A, \langle x, v\rangle \leq a$. L'iperpiano così definito è detto *iperpiano di supporto* di z per A. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '17V']

E14.24 Difficoltà:*. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ convesso limitato aperto nonvuoto, mostrate che ∂A è sostegno di un arco semplice chiuso (e anche Lipschitz). [17W]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '17X']

§14.b Funzione convessa

Definizione 14.25. *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione. f si dice* convessa *se* [17Y]

$$\forall t \in [0,1],\ \ \forall x, y \in C,\ \ f\big(tx + (1-t)y\big) \leq tf(x) + (1-t)f(y)\ .$$

f si dice strettamente convessa *se inoltre*

$$\forall t \in (0,1),\ \ \forall x, y \in C, x \neq y,\ \ f\big(tx + (1-t)y\big) < tf(x) + (1-t)f(y)\ .$$

Definizione 14.26. *f si dice (strettamente) concava se $-f$ è (strettamente) convessa.* [17Z]

Le funzioni convesse godono di tantissime proprietà interessanti, questa che segue è solo una piccola lista.

...definizioni equivalenti

Esercizi

E14.27 Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso. Sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa; siano $x_1, \dots, x_n \in C$ e $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ tali che $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Si mostri che [180]

$$\sum_{i=1}^n t_i x_i \in C$$

e

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)\ .$$

E14.28 Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso. Sia $f : C \to \mathbb{R}$, si mostri che è convessa, se e solo se l'epigrafico [181]

$$\{(x,y) \mid x \in C\ ,\ f(x) \leq y\}$$

è un sottoinsieme convesso di $C \times \mathbb{R}$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Proprietà

Questa che segue è una lista di proprietà per funzioni convesse $f : C \to \mathbb{R}$ con $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Ovviamente queste proprietà valgono anche quando $n = 1$; ma quando $n = 1$ le dimostrazioni sono in genere più facili, si veda la sezione successiva.

Esercizi

E14.29 Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dato $l \in \mathbb{R}$, si definisca *l'insieme di sottolivello* come [182]

$$L_l = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq l\} \quad .$$

Mostrate che L_l è un insieme convesso (possibilmente vuoto). Deducete che i punti di minimo di f sono un insieme convesso (possibilmente vuoto). Mostrate che se f è strettamente convessa vi può essere al più un punto di minimo.

E14.30 Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso; siano $f_i : C \to \mathbb{R}$ convesse, dove $i \in I$ (una famiglia non vuota, e arbitraria, di indici), e definiamo $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$, dove supponiamo (per semplicità) che $f(x) < \infty$ per ogni i: si mostri che f è convessa. [183]

E14.31 `Prerequisiti:`14.28,14.23`.Difficoltà:*.` Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso, sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, sia fissato $z \in C^\circ$: si mostri che esiste $v \in \mathbb{R}^n$ tale che [184]

$$\forall x \in C, f(x) \geq f(z) + \langle v, x - z \rangle \quad . \tag{14.32}$$

Il piano così definito è detto *piano di supporto* per f in z. `Note:`*È preferibile non assumere che f sia continua nel dimostrare questo risultato, in quanto questo risultato si usa in genere per dimostrare che f è continua!*.*Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID '185']`

E14.33 `Prerequisiti:`11.12,11.10,14.31`.Difficoltà:*.` [186]

Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso aperto, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, si mostri che f è continua.

`Note:`*Nel caso di dimensione $n = 1$, la dimostrazione è molto più facile, si veda 14.41.*

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '187']`

E14.34 `Argomenti:sottodifferenziale.Prerequisiti:`14.31`.Difficoltà:*.` [188]

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso aperto, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa; dato $z \in C$, si definisce il *sottodifferenziale* $\partial f(z)$ come l'insieme dei v per cui la relazione (14.32) vale (cioè, $\partial f(z)$ contiene i vettori v usati per definire i piani di supporto a f in z).

$\partial f(z)$ gode di interessanti proprietà.

- $\partial f(z)$ è localmente limitato: se $z \in C$ e $r > 0$ è tale che $B(z, 2r) \subset C$ allora esiste $L > 0$ tale che $\forall y \in B(z, r)$, $\forall v \in \partial f(x)$ si ha $|v| \leq L$. In particolare, per ogni $z \in C$ si ha che $\partial f(z)$ è un insieme limitato.
- Mostrate che ∂f è *continua superiormente* in questo senso: se $z \in C$ e $(z_n)_n \subset C$ e $v_n \in \partial f(z_n)$ e se $z_n \to_n z$ e $v_n \to_n v$ allora $v \in \partial f(z)$. In particolare, per ogni $z \in C$, $\partial f(z)$ è un insieme chiuso.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '189']`

E14.35 `Argomenti:minimi. Prerequisiti:`14.34`.` Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Mostrate che $z \in C^\circ$ è un minimo se e solo se $0 \in \partial f(z)$. [18B]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E14.36 Prerequisiti:14.31,14.34.Note:*Un viceversa del 14.30.* [18C]

Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso aperto; sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa; esistono successioni $(a_h)_h \subseteq \mathbb{R}, (v_h)_h \in \mathbb{R}^n$ per $h \in \mathbb{N}$, tali che $f(x) = \sup_{h\in\mathbb{N}}(a_h + v_h \cdot x)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '18D']

§14.c Caso reale

Sia $I \subset \mathbb{R}$, allora I è convesso se e solo è un intervallo (si veda 9.80). Nel seguito considereremo $f : I \to \mathbb{R}$ dove $I = (a, b)$ è un intervallo aperto.

Esercizi

E14.37 Si mostri che $f(x)$ è convessa se e solo se la mappa $R(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ è monotona debolmente crescente in x. [†96] Inoltre f è strettamente convessa se e solo se R è strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '18G'] [18F]

E14.38 Si mostri che per una funzione convessa $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ vi sono solo tre possibilità: [18H]

- f è strettamente crescente
- f è strettamente decrescente
- vi sono due valori $l_- \leq l_+$ tale che f è strettamente crescente in $[l_+, b)$, f è strettamente decrescente in $(a, l_-]$, e l'intervallo $[l_-, l_+]$ sono tutti i punti di minimo di f;

se inoltre f è strettamente convessa allora vi è al più un solo punto di minimo.

E14.39 Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ convessa. Si mostri che per ogni intervallo chiuso $I \subset (a, b)$ esiste una costante C tale che $f|_I$ risulta Lipschitziana con costante C. Si mostri un esempio di funzione continua e convessa definita su un intervallo chiuso che non è Lipschitziana. [18J]

E14.40 Si mostri che una funzione continua $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è convessa se e soltanto se per ogni $u, v \in (a, b)$ si ha [18K]

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{f(u)+f(v)}{2} \quad .$$

§14.c.a Convessità e derivate

Esercizi

E14.41 Prerequisiti:14.37.Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ convessa. [18M]

1. Si mostri che in ogni punto esistono la derivata destra $d^+(x)$ e sinistra $d^-(x)$ (In particolare f è continua).
2. Si mostri che $d^-(x) \leq d^+(x)$,
3. mentre per $x < y$ si ha $d^+(x) \leq R(x, y) \leq d^-(y)$.
4. Si deduca che $d^+(x)$ e $d^-(x)$ sono monotone debolmente crescenti.

[†96] Si noti che $R(x, y)$ è simmetrica.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

5. Si mostri che $d^+(x)$ è continua a destra, mentre $d^-(x)$ è continua a sinistra.
6. Inoltre si mostri che $\lim_{s\to x-} d^+(s) = d^-(x)$, mentre $\lim_{s\to x+} d^-(s) = d^+(x)$. In particolare d^+ è continua in x se e solo se d^- è continua in x se e solo se $d^-(x) = d^+(x)$.
   Dunque d^+, d^- sono, per così dire, la stessa funzione monotona, solo che nei punti di discontinuità d^+ assume il valore dei limiti destri mentre d^- il valore dei limiti sinistri.
7. Usate il precedente per mostrare che f è derivabile in x se e solo se d^+ è continua in x, se e solo se d^- è continua in x.
8. Si mostri dunque che f è derivabile salvo che in un numero al più numerabile di punti.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '18N']

E14.42 Prerequisiti:14.37. Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora f è convessa se e solo se f' è debolmente crescente. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '18Q'] [18P]

E14.43 Prerequisiti:14.37,14.42. Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora f è strettamente convessa se e solo se f' è strettamente crescente. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '18S'] [18R]

E14.44 Prerequisiti:14.37, 14.42. Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile due volte, allora f è convessa se e solo se $f'' \geq 0$ in ogni punto. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '18V'] [18T]

E14.45 Prerequisiti:14.44. [18W]

Sia $J \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto non vuoto, e $f : J \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e convessa. Si mostri che i seguenti fatti sono equivalenti:

1. f è strettamente convessa,
2. l'insieme $\{x \in J : f''(x) = 0\}$ ha parte interna vuota,
3. f' è monotona strettamente crescente.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '18X']

Si veda anche l' esercizio 15.13 per il rapporto fra integrale e convessità.

§14.c.b Funzioni convesse a valori estesi

Consideriamo funzioni convesse che possono anche assumere valore $+\infty$. Sia I un intervallo.

Esercizi

E14.46 Sia $f : I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convessa, si mostri che $J = \{x \in I : f(x) < \infty\}$ è un intervallo. [18Y]

E14.47 Note:*un altro viceversa del 14.30.* [18Z]

Fissato $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e data $f : I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convessa e semicontinua inferiore, esistono successioni $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) = \sup_n (a_n + b_n x)$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '190']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§14.d Ulteriori proprietà e esercizi

Esercizi

E14.48 Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso, $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e monotona debolmente crescente: si provi che $f \circ g$ è convessa. [191]

E14.49 Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ concava, tale che $f(0) = 0$ e f continua in zero. [192]

- Si provi che f è *subadditiva*, cioè

$$f(t) + f(s) \geq f(t + s)$$

per ogni $t, s \geq 0$. Se inoltre f è strettamente concava e $t > 0$ allora

$$f(t) + f(s) > f(t + s)\,.$$

- Si provi che se $\forall x$, $f(x) \geq 0$ allora f è debolmente crescente.
- Il viceversa? Trovate un esempio di $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ con $f(0) = 0$, continua, monotona crescente e subadditiva, ma non concava.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '193']

E14.50 Si mostri la disuguaglianza di Young: dati $a, b > 0$, $p, q > 1$ tali che $1/p + 1/q = 1$ allora [194]

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{14.51}$$

con uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$; usando la concavità del logaritmo.

Si veda anche 23.16. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '195']

E14.52 Sia $\alpha \in (0, 1)$, si mostri che x^α è α-Hölderiana (possibilmente usando i risultati precedenti). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '197'] [196]

Si veda anche l'esercizio 15.29.

§14.d.a Funzione distanza

Esercizi

E14.53 Argomenti:funzione distanza, insiemi convessi. Prerequisiti:9.69,14.55. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso nonvuoto, sia d_A la *funzione distanza* definita nell'esercizio 9.69, cioè $d_A(x) = \inf_{y \in A} |x - y|$. Si mostri che A è un'insieme convesso se e solo se d_A è una funzione convessa. [198]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '199']

E14.54 Argomenti:funzione distanza, insiemi convessi. Prerequisiti:9.69,14.16. [19B]

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso chiuso, si definisce la *funzione distanza* $d_A(x)$ come sopra in 9.69; sia $z \notin A$ e x^* la proiezione di z su A (cioè il punto di minima distanza nella definizione di $d_A(z)$); posto $v = (z - x^*)/|z - x^*|$ si mostri che $v \in \partial f(z)$; dove ∂f è il *sottodifferenziale* definito in 14.34.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§14.d.b Funzioni e insiemi strettamente convessi

Esercizi

E14.55 Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso, $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $r \in \mathbb{R}$: allora $\{x \in C, f(x) < r\}$ e $\{x \in C, f(x) \leq r\}$ sono insiemi convessi (eventualmente vuoti). [19C]

Nota 14.56. *È vero anche il viceversa: dato $A \subset \mathbb{R}^n$ un convesso chiuso, esiste sempre una funzione convessa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $A = \{x : f(x) \leq 0\}$: ad esempio si può usare $f = d_A$, come visto in14.54 nella sezione precedente.* [23N]

Ci si chiede ora, cosa accade se f è strettamente convessa?

Definizione 14.57. *Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso chiuso è detto **strettamente convesso** se, per ogni $x, y \in A$ con $x \neq y$ e ogni $t \in (0,1)$ si ha* [19D]

$$(tx + (1-t)y) \in A^\circ \quad .$$

(Notate che un insieme strettamente convesso necessariamente ha parte interna non vuota).

Nota 14.58. *Dagli esercizi 14.9 e 14.10 segue che se $x \in A^\circ$ o $y \in A^\circ$ allora $(tx + (1-t)y) \in A^\circ$: dunque la definizione è "interessante" quando $x, y \in \partial A$.* [19F]

Esercizi

E14.59 `Prerequisiti:14.33`. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa e $r \in \mathbb{R}$ allora $A = \{x, f(x) \leq r\}$ è un insieme chiuso e strettamente convesso (eventualmente vuoto). *Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID '19H']` [19G]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§15 Integrale di Riemann [19K]

La teoria necessaria per lo svolgimento dei successivi esercizi si può trovare nel Cap. 1 in [5] o Cap. 6 in [23].

Esercizi

E15.1 Sia p un polinomio (con coefficienti complessi); sia $\theta \in \mathbb{C}, \theta \neq 0$. Definiamo $f(x) = -\int_0^x e^{-\theta t} p(t)\, \mathbb{d}t$. Si mostri che $f(x) = e^{-\theta x} q(x) - q(0)$ dove q è un polinomio che ha lo stesso grado di p. Si determini la mappa lineare (cioè la matrice) che trasforma i coefficienti di p nei coefficienti di q; e la sua inversa. [19M]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '19N'][UNACCESSIBLE UUID '19P']

E15.2 Note:*Simile al punto 8 dall'esercizio 17.8.*Supponiamo che $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ siano Riemann integrabili, e sia inoltre $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. [19Q]

Trovate un esempio in cui $f_n \to_n f$ puntualmente, f è limitata, ma f non è Riemann integrabile.

Mostrate che, se la convergenza è uniforme, allora f è Riemann integrabile e

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathbb{d}x = \int_a^b f \, \mathbb{d}x \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '19R']

E15.3 Prerequisiti:15.2, 17.4. [19S]

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo con estremi a, b; siano $f, f_n : I \to \mathbb{R}$ continue non negative tali che $f_n(x) \nearrow_n f$ puntualmente (cioè per ogni x e n si ha $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ e $\lim_n f_n(x) = f(x)$); si mostri allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \, \mathbb{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathbb{d}x \ .$$

(Nota se l'intervallo è aperto o semiaperto o illimitato allora gli integrali di Riemann si intendono in senso generalizzato; in questo caso il membro destro può anche valere $+\infty$). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '19T']

Il precedente risultato prende il nome di *Teorema di Convergenza Monotona* e vale in ipotesi molto generali; nel caso di integrali di Riemann si può però vedere come conseguenza dei risultati 15.2 e 17.4.

E15.4 Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mostrate che $g \circ f$ è Riemann integrabile. [19V]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '19W']

E15.5 Dire quali di queste funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sono Riemann integrabili: [19Y]

1. la funzione caratteristica dell'insieme di Cantor.
2. $f(0) = 0$, $f(x) = \sin(1/x)$
3. $f(0) = 0$ e
$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2 + |\sin(1/x)|}$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

4. $f(x) = 0$ se x è irrazionale, $f(x) = \cos(1/m)$ se $x = n/m$ con n, m primi fra loro.
5. $f(x) = 0$ se x è irrazionale, $f(x) = \sin(1/m)$ se $x = n/m$ con n, m primi fra loro.

E15.6 `Prerequisiti:teorema fondamentale del calcolo integrale.` [1B0]

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, mostrate che

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathbb{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,\mathbb{d}s \quad .$$

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1B2']` Notate che per questo risultato non è necessario ipotizzare che g sia monotona.

E15.7 `Prerequisiti:funzioni regolate Sez. §12.b.` [1B3]

Si mostri che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ regolata è Riemann integrabile.

E15.8 `Prerequisiti:funzioni regolate Sez. §12.b.` [1B4]

Si trovi una funzione Riemann integrabile $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che non è regolata.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1B5']`

E15.9 `Difficoltà:*.` Vi può essere una funzione Riemann integrabile $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che non è regolata (cioè, non ammette limiti destri e sinistri) in nessun punto? *Soluzione nascosta:* `[UNACCESSIBLE UUID '1B7']` [1B6]

E15.10 Se $f, g : [A, B] \to \mathbb{R}$ sono Riemann integrabili, allora $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ è Riemann integrabile. [1B8]

E15.11 Si trovi una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiore, limitata, ma non Riemann integrabile. [1B9]

E15.12 Definiamo la funzione Beta come [1BC]

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\,.$$

1. Mostrate che l'integrale esiste (finito) se e solo se $x, y > 0$.
2. Notate che $B(x, y) = B(y, x)$
3. Mettete in relazione $B(n, m)$ con $B(n-1, m+1)$. Calcolate dunque il valore di $B(n, m)$ per n, m naturali positivi.
4. Usate il risultato ottenuto per calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t)^9 \cos(t)^7\,dt \quad .$$

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1BD']`

E15.13 `Prerequisiti:funzioni convesse.` Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, e $x_0 \in I$. Si dimostri che questi due fatti sono equivalenti: [1BF]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

1. $F : I \to \mathbb{R}$ è convessa.
2. Esiste $f : I \to \mathbb{R}$ monotona (debolmente) crescente, e tale che $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathbb{d}s$,

e si verifichi che si può scegliere f essere la derivata destra (o sinistra) di F.

E15.14 Si esibisca una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabile tale che la derivata della funzione $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ non è f. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1BH'] [1BG]

E15.15 Si calcolino esplicitamente [†97] formule primitive per [1BJ]

$$\frac{1}{\sin(x)^2} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad \frac{1}{2+\sin(x)} \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1BK']

E15.16 Definiamo la funzione Gamma $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ come [1BM]

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathbb{d}t \; .$$

- Mostrate che $\Gamma(x)$ è ben definita per $x > 0$ reale.
- Mostrate che $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e deducete che $\Gamma(n+1) = n!$ per $n \in \mathbb{N}$.
- Mostrate che $\Gamma(x)$ è analitica.
  (Potete dare per buono che le derivate di Γ sono $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\log t)^n t^{x-1} e^{-t}\,\mathbb{d}t$; si ottengono per derivazione sotto segno di integrale.)

E15.17 Calcolate [1BN]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}$$

vedendolo come una somma approssimante di un integrale di Riemann.

E15.18 Prerequisiti:16.46.Sia $a \in \mathbb{R}$, sia I intervallo aperto con $a \in I$, sia $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ continua. [1BP]

Definiamo ricorsivamente $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ per $n \geq 1$ tramite $\varphi_n(x) = \int_a^x \varphi_{n-1}(t)\,\mathbb{d}t$; si mostri che

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n \varphi_0(t)\,\mathbb{d}t \tag{15.19}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1BQ']

E15.20 Prerequisiti:15.18.Note:*Si veda anche in Apostol [4].* [1BR]

Sia $a \in \mathbb{R}$, sia I intervallo aperto con $a \in I$; supponendo che $f : I \to \mathbb{R}$ sia di classe C^{n+1}, mostrate la **formula di Taylor con resto integrale**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathbb{d}t \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1BS']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E15.21 Prerequisiti:14.37, 15.13. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $g : I \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato e contenuto in I. Presi $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, sia [1BT]

$$R(x,y) = \frac{1}{y-x}\int_x^y g(s)\,\mathbb{d}s$$

(con la usuale convenzione che $\int_x^y g(s)\,\mathbb{d}s = -\int_y^x g(s)\,\mathbb{d}s$, in modo che $R(x,y) = R(y,x)$). Se g è monotona, si mostri che $R(x,y)$ è monotona in ciascuna variabile. Se g è continua e $R(x,y)$ è monotona in ciascuna variabile, si mostri che g è monotona.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1BV']

E15.22 Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che [1BW]

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathbb{d}x = 0$$

per ogni $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua: mostrate allora che $f \equiv 0$.

E15.23 Torniamo all'esercizio 6.54: eseguendo formalmente il prodotto di Cauchy della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ con se stessa, si ottiene la serie $\sum_n (-1)^n c_n$ con $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$; mostrate che $c_n \to \pi$. [1BX]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1BY']

E15.24 Difficoltà:*. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata, mostrate che [1BZ]

$$\lim_{y\to 0+} \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x^2+y^2}\,\mathbb{d}x = f(0)$$

(Sugg. si cominci dal caso f costante.)

E15.25 Siano $n, m \geq 1$ interi, e definiamo [1C0]

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^n (\log x)^m\,\mathbb{d}x \quad :$$

ponete in relazione $I_{n,m}$ con $I_{n,m-1}$; usate la relazione per calcolare esplicitamente

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n\,\mathbb{d}x\,.$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1C1']

E15.26 Prerequisiti:15.25.Difficoltà:**. Mostrate le identità [1C2]

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \qquad (=\sim 1.291285997\ldots) \tag{15.27}$$

$$\int_0^1 x^{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-n} \qquad (=\sim 0.783430510712\ldots) \tag{15.28}$$

(Sugg.: usate lo sviluppo in serie di potenze di e^z e ponete $z = x\log(x)$; usate l'esercizio 15.25 precedente.)

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E15.29 Difficoltà:*. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa: mostrate che [1C3]

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x))\,\mathbb{d}x\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(x))\,\mathbb{d}x \quad . \tag{15.30}$$

Questo risultato è noto come **diseguaglianza di Jensen**.

E15.31 Difficoltà:*. Supponiamo che $f : (0,1) \to (0,\infty)$ sia continua e decrescente e $\int_0^1 f(t)\,\mathbb{d}t < \infty$ allora $\lim_{r\to 0} rf(r) = 0$. [1C4]

E15.32 Difficoltà:*. Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Siano $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Si ha che [2GT]

$$\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\cdots\int_0^{a_n} \cos(x_1 + x_2 + \cdots x_n)\,\mathbb{d}x_1\,\mathbb{d}x_2\cdots\mathbb{d}x_n = \\ = 2^n \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{2}\right)\prod_{i=1}^n \sin\left(\frac{a_i}{2}\right)$$

$$\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\cdots\int_0^{a_n} \sin(x_1 + x_2 + \cdots x_n)\,\mathbb{d}x_1\,\mathbb{d}x_2\cdots\mathbb{d}x_n = \\ = 2^n \sin\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{2}\right)\prod_{i=1}^n \sin\left(\frac{a_i}{2}\right)$$

Altri esercizi riguardo all'integrazione secondo Riemann si trovano in 13.8, 16.45, 17.8 (parte 8).

[†97] Tratto dal libro di Giaquinta e Modica [9], pag. 162 e seguenti.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§16 Funzioni derivabili [1C5]

Definizione 16.1. *Sia nel seguito $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto.* [2D0]

Dicendo che $f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile *intenderemo* derivabile in ogni punto.

*Ricordiamo che, dato $k \geq 1$ intero, f **è di classe** C^k se f è derivabile k-volte e la derivata $f^{(k)}$ è continua; e f **è di classe** C^∞ se f è derivabile infinite volte. (Alle volte scriveremo $f \in C^k$ per indicare che f è di classe C^k, e $f \in C^\infty$ se è di classe C^∞).*

Per poter risolvere i seguenti esercizi potrebbe essere necessario conoscere alcuni risultati fondamentali in Analisi e Calcolo Differenziale, che si possono per esempio trovare in [23, 5]; specificatamente:

- il teorema di Lagrange [†98] : Teorema 5.10 in [23], o [65].
- la regola di De l'Hôpital, e i suoi corollari: Teorema 5.13 in [23], Sez. 7.12 in [5] o [25, 64];
- il Teorema di Taylor, e le diverse forme dei resti: Teorema 5.15 in [23], Cap. 7 in [5] o [66].

Esercizi

E16.2 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile, e $x, y \in I$ con $x < y$. Mostrare che se $f'(x) \cdot f'(y) < 0$ allora esiste $\xi \in I$ con $x < \xi < y$ tale che $f'(\xi) = 0$. *Soluzione nascosta:* [1C6] `[UNACCESSIBLE UUID '1C7']`

E16.3 `Prerequisiti:16.2.Note:`*Proprietà di Darboux.* [1C8]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile; vogliamo mostrare che per ogni intervallo $I \subset A$ l'immagine $f'(I)$ è un intervallo.

Mostrate dunque questo risultato. Per ogni $x, y \in I$ con $x < y$, poniamo $a = f'(x), b = f'(y)$; assumiamo per semplicità che $a < b$; sia poi c con $a < c < b$: allora esiste $\xi \in I$ con $x < \xi < y$ tale che $f'(\xi) = c$.

(Mostrate infine che questa proprietà effettivamente implica che l'immagine $f'(I)$ di un intervallo I è un intervallo).

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1C9']`

E16.4 `Prerequisiti:16.3.` [1CB]

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$: mostrate allora che $f'(t)$ ha sempre lo stesso segno.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1CC']`

E16.5 `Prerequisiti:16.3.Difficoltà:*.` [1CD]

Si trovi una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata che mappa intervalli in intervalli, ma per cui non esiste $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto e con $f = g'$.

(Notate che f non può essere continua, per via del Teorema Fondamentale del Calcolo).

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1CF']`

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E16.6 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile , con $f' = f$: si mostri in maniera elementare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = \lambda e^x$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1CH'] [1CG]

E16.7 Si trovi una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile la cui derivata sia limitata ma non sia continua. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1CK'] [1CJ]

E16.8 Si trovi una $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile [†99] la cui derivata sia illimitata. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1CN'] [1CM]

E16.9 Difficoltà:*. Si trovi una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che l'immagine di $[0, 1]$ secondo f' è $f'([0, 1]) = (-1, 1)$. [1CP]

Prima di cercare l'esempio, fate questa riflessione. Ricordiamo la proprietà di Darboux 16.3: l'immagine di un intervallo I secondo f' è un intervallo $f'(I)$; questa non dice però che l'immagine di $f'([0, 1])$ debba essere un intervallo chiuso e limitato. Se però si sapesse inoltre che f' è continua, cosa potreste dire di $f'([0, 1])$? Cosa ne deducete a priori dunque sull'esempio cercato?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1CQ']

E16.10 Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile: mostrare che f' è continua se e solo se per ogni x [1CV]

$$f'(x) = \lim_{(s,t)\to(x,x),s\neq t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1CW']

E16.11 Sia f derivabile in (a, b) sia $x_0 \in (a, b)$ e $x_0 < \alpha_n < \beta_n, \beta_n \to x_0$ per $n \to \infty$. Si mostri che se la successione $\frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}$ è limitata allora [1CX]

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \to_n f'(x_0)$$

Si mostri con un esempio che tale conclusione è falsa se la condizione data non è verificata.

E16.12 Si supponga che una data funzione $f : (a, b) \to R$ sia derivabile in ogni punto di (a, b) tranne che in x_0, e che esista finito il limite $\lim_{t\to x_0} f(t)$. Si mostri che f è derivabile anche in x_0 e che $f(x_0) = \lim_{t\to x_0} f(t)$. [1CZ]

E16.13 Prerequisiti:9.96. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in ogni punto. Si mostri che $\max\{f, g\}$ è derivabile salvo su un insieme al più numerabile. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1D2'][UNACCESSIBLE UUID '1D3'] [1D1]

E16.14 Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che se $f(t) = 0$ allora $f'(t) = 0$. Mostrare che la funzione $g(t) = |f(t)|$ è derivabile. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1D6'] [1D4]

E16.15 Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ un polinomio con tutte radici reali e coefficienti tutti non nulli. Si mostri che il numero di radici positive (contate [1D7]

[†98] Anche noto come *Teorema del valor medio* o *Teorema dell'incremento finito*.

[†99] Si intende: la derivata $f'(x)$ esiste ed è finita per ogni $x \in [-1, 1]$; agli estremi $x = -1, 1$ si calcolano solo le derivate destra e rispettivamente sinistra.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

con molteplicità) è uguale al numero di cambiamenti di segno nella successione dei coefficienti di p. *(Sugg. si ragioni per induzione su n, utilizzando il fatto che tra due radici consecutive di p esiste una radice di p'.)* Questo risultato è noto come *Criterio di Cartesio*.

E16.16 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile, e $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Mostrare che se $f'(a) = f'(b)$ allora esiste ξ con $a < \xi < b$ tale che [1D9]

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} \ .$$

§16.a Derivate successive [2D1]

Esercizi

E16.17 Sia I un intervallo aperto e $x_0 \in I$, sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I e tale che esista la derivata seconda f'' in x_0: allora si mostri che esiste il limite [1DD]

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)}{t^2}$$

e che coincide con $f''(x_0)$.

Si trovi poi un semplice esempio di f derivabile in $(-1, 1)$ e tale che non esista la derivata seconda f'' in $x_0 = 0$, ma esista il precedente limite.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DF']

E16.18 5 Sia $n \geq 1$ intero. Sia I un intervallo aperto e $x_0 0 I$, siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili $n-1$ volte nell'intervallo e la cui derivata $(n-1)$-esima è derivabile in x_0. [1DG]

Si mostri allora che il prodotto fg è derivabile $n-1$ volte nell'intervallo e la sua derivata $(n-1)$-esima è derivabile in x_0. Si scriva una formula esplicita per la derivata n-esima $(fg)^{(n)}$ in x_0 del prodotto delle due funzioni, (formula che impieghi le derivate della sola f e della sola g).

(Se non la trovate, guardate in Wikipedia la Regola di Leibniz [63]) .

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DH']

E16.19 Difficoltà:*. Sia $n \geq 1$ intero. Siano I, J intervalli aperti con $x_0 \in I, y_0 \in J$. Siano poi date $g : I \to \mathbb{R}$ e $f : J \to \mathbb{R}$ tali che $g(I) \subseteq J$, f, g sono derivabili $n-1$ volte nei rispettivi intervalli, la loro derivata $(n-1)$-esima è derivabile in x_0 (risp. y_0) e infine $g(x_0) = y_0$. [1DJ]

Si mostri che la funzione composta $f \circ g$ è è derivabile $n-1$ volte nell'intervallo e la sua derivata $(n-1)$-esima è derivabile in x_0.

Si scriva una formula esplicita per la derivata n-esima $(f \circ g)^{(n)}$ in x_0 della composizione delle due funzioni, (formula che impieghi le derivate della sola f e della sola g).



(Se non la trovate, leggete la pagina wikipedia (in Inglese) [56]; oppure, vedete questa presentazione: https://drive.google.com/drive/folders/1746bdJ89ZywciaEqvIMlGZ7kKHWVekhb *).*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DK']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E16.20 Prerequisiti:16.19,2.326.Si mostri che la funzione [1DM]

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases} \tag{16.21}$$

è di classe C^∞, e per $x > 0$ si ha

$$\varphi^{(n)}(x) = e^{-1/x} \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} \frac{n!}{m!} \frac{(-1)^{m+n}}{x^{m+n}} \quad ,$$
$$\binom{n-1}{m-1} = \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} \quad .$$

mentre $\varphi^{(n)}(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}, x \le 0$.

Procedete similmente per

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{16.22}$$

anche in questo caso $\psi \in C^\infty$ e $\psi^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; ma in questo caso $\psi(x) = 0 \iff x = 0$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1DN'][UNACCESSIBLE UUID '1DP'] [UNACCESSIBLE UUID '1DQ']

E16.23 Sia dato N intero positivo. Si trovi un esempio di funzione C^∞ con $\varphi(x) = 0$ per $x < 0$ mentre $\varphi^{(n)}(x) > 0$ per $0 \le n \le N$ e $x > 0$. [1DR]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DS'] Notiamo però che non si può richiedere che tutte le derivate siano positive, a causa dell'esercizio 19.2.

E16.24 Cosa si può mettere al posto di "???" in modo che la funzione [1DT]

$$g(x) = \begin{cases} ??? & \text{se } 0 < x < 1\,, \\ 1 & \text{se } x \ge 1\,, \\ 0 & \text{se } x \le 0\,. \end{cases}$$

sia di classe C^∞?

Più in generale, come si possono raccordare due funzioni C^∞ in modo da ottenere una funzione C^∞? Date $f_0, f_1 \in C^\infty$ mostrate [†100] che esiste una funzione $f \in C^\infty$ che soddisfa

$$f(x) = f_0(x) \quad \text{se } x \le 0 \quad ,$$
$$f(x) = f_1(x) \quad \text{se } x \ge 1 \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DV']

E16.25 Difficoltà:*.Siano $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0, f_1 \in C^\infty$ con $f_0', f_1' > 0$ e $f_1(1) > f_0(0)$: allora si può interpolare con una funzione $f \in C^\infty$ che soddisfi [1DW]

$$f(x) = f_0(x) \text{ se } x \le 0$$
$$f(x) = f_1(x) \text{ se } x \ge 1$$

in modo che l'interpolante abbia $f' > 0$.

Cosa succede se $f_1(1) = f_0(0)$?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1DX']

[†100] Possibilmente con una semplice costruzione basata sull'esempio 16.20.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E16.26 Prerequisiti:16.20. Si trovi un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C^\infty$ e tale, che posto $A = \{x : f(x) = 0\}$ il luogo di zeri, si abbia che 0 è l'unico punto di accumulazione di A, cioè $D(A) = \{0\}$. Si confronti questo esempio con la Prop. 6.8.4 negli appunti [3]; e con l'esempio 19.7. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1F0'] [1DZ]

E16.27 Difficoltà:*.Note:*Lemma di Hadamard.* [1F1]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ e tale che $f(0) = 0$. Sia, per $x \neq 0$, $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)/x$. Si mostri che g si prolunga, assegnando un opportuno valore a $g(0)$, e che la funzione prolungata è C^∞. Che rapporto c'è fra $g^{(n)}(0)$ e $f^{(n+1)}(0)$?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1F2']

E16.28 Prerequisiti:16.27.Difficoltà:*.Sia $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una funzione di classe C^∞ tale che $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \neq 0$, e $f''(0) \neq 0$: si mostri che [1F4]

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{f(x)} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è di classe C^∞. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1F5']

E16.29 Difficoltà:* . Dati $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ e dati numeri reali $a_{i,h}$ (con $i, h = 0, \ldots n$) si mostri che esiste un polinomio $p(x)$ tale che $p^{(i)}(x_h) = a_{i,h}$. [1F7]

Questa consideriazione è alla base della teoria dell'interpolazione secondo Hermite, si veda [57].

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1F8']

E16.30 Prerequisiti:funzioni convesse.Note:*Esercizio 1 del compito Marzo 2010.* [1F9]

Consideriamo le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, tali che per ogni fissato $n \geq 0$, $f^{(n)}(x)$ abbia segno costante (e cioè non si annulli mai) [†101]. Associamo a ogni tale funzione la sequenza dei segni che vengono assunti da $f, f', f'' \ldots$.

Quali sono le possibili sequenze di segni, e quali invece sono le sequenze impossibili?

(Per es. presa $f(x) = e^x$, a questa si associa la sequenza $+ + + + + \ldots$, che è dunque una sequenza possibile.)

Si veda anche l'esercizio 19.2.

Si vedano anche gli esercizi 14.44 e 14.45 sul rapporto fra convessità e proprietà delle derivate.

§16.b Sviluppo di Taylor [2D2]

Definizione 16.31 (Simboli di Landau)**.** *Sia $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e I un intorno di a. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$. Diremo che "$f(x) = o(g(x))$ per x tendente ad a" se* [†102] [1FB]

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, x \in I \wedge\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad .$$

Questa notazione si legge come "f è o piccolo di g".

[†101] Si intende che $f^{(0)} = f$.

[†102] Considerate che $J = \{x \in I :\ |x - a| < \delta\}$ è un intorno di a.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Se $g(x) \neq 0$ per $x \neq a$, allora equivalentemente si può scrivere

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad .$$

Diremo che "$f(x) = O(g(x))$ per x tendente ad a*" se se esistono una costante $c > 0$ e un intorno J di a per cui $\forall x \in J, |f(x)| \leq c|g(x)|$.*
Di nuovo, se $g(x) \neq 0$ per $x \neq a$, allora equivalentemente si può scrivere

$$\limsup_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty \quad ,$$

Questa notazione si legge come "f è O grande di g".
Per maggiori informazioni, e altre notazioni, si veda [52].
Questa notazione è usualmente accreditata a Landau.

Nel seguito per semplicità consideriamo solo il caso in cui $\lim_{x\to a} g(x) = 0$; inoltre negli sviluppo di Taylor si ha sempre che $g(x) = (x-a)^n$ con $n \geq 1$ intero. [†103]

Nota 16.32. *Attenzione! I simboli "o piccolo" e "O grande" sono usati in modo diverso da altri simboli della Matematica. Infatti essi possono rappresentare funzioni diverse, anche nello stesso contesto! Ad esempio se scriviamo* [1FC]

$$\sin(x) = x + o(x) \quad , \quad \cos(x) = 1 + o(x)$$

i due simboli "$o(x)$" a destra e a sinistra rappresentano funzioni diverse. Particolare cura dunque va messa nel mostrare le proprietà usate nel calcolo. Quando sono presenti molti tali simboli, è preferibile sostituirli con altri simboli di funzioni, come si vede negli esempi successivi.

Vediamo due esempi. Sia $a = 0$ per semplicità.

Esempio 16.33. *Enunciamo in maniera informale questa proprietà.* [1FD]

$$\text{Se } n \geq m \geq 1 \text{ allora } o(x^n) + o(x^m) = o(x^m).$$

Per dimostrarla la convertiamo in un enunciato preciso. Innanzitutto la riscriviamo così.

$$\text{Se } f(x) = o(x^n) \text{ e } g(x) = o(x^m) \text{ allora } f(x) + g(x) = o(x^m).$$

Dunque la dimostriamo. Come ipotesi abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} f(x)x^{-n} = 0 \; e \quad \lim_{x\to 0} g(x)x^{-m} = 0$$

allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x^m} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^m} + \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^m} = \lim_{x\to 0} x^{n-m}\frac{f(x)}{x^n} + 0 = 0.$$

Esempio 16.34. *Enunciamo in maniera informale questa seconda proprietà* [1FF]

[†103] Alcuni tesi usano anche la notazione $o(1)$ per indicare una quantità infinitesima per $x \to a$, ma questo può generare confusione .

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

$$\text{Se } n \geq 1 \text{ allora } o\Big(x^n + o(x^n)\Big) = o(x^n).$$

La riscriviamo così.

$$\text{Se } f(x) = o(x^n) \text{ e } g(x) = o(x^n + f(x)) \text{ allora } g(x) = o(x^n).$$

Notiamo che, per $x \neq 0$ piccolo, $x^n + f(x)$ è non nullo, in quanto esiste un intorno in cui $|f(x)| \leq |x^n/2|$. Come ipotesi abbiamo che $\lim_{x\to 0} f(x)x^{-n} = 0$ e $\lim_{x\to 0} g(x)/(x^n + f(x)) = 0$ allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n + f(x)} \frac{x^n + f(x)}{x^n}$$

ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n + f(x)} = 0$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n + f(x)}{x^n} = 1 \quad .$$

Esercizi

E16.35 Sia $a = 0$ per semplicità. Riscrivete le successive relazioni e dimostratele. [1FG]

- Se $n \geq m \geq 1$ allora

  $$O(x^n)+O(x^m) = O(x^m), \quad o(x^n)+O(x^m) = O(x^m), \quad x^n+O(x^m) = O(x^m) \quad .$$

- Se $n > m \geq 1$ allora

  $$O(x^n) + o(x^m) = o(x^m), \quad x^n + o(x^m) = o(x^m).$$

- Per $n, m \geq 1$

  $$\begin{aligned} x^n O(x^m) &= O(x^{n+m}) \\ x^n o(x^m) &= o(x^{n+m}) \\ O(x^n)O(x^m) &= O(x^{n+m}) \\ o(x^n)O(x^m) &= o(x^{n+m}) \end{aligned}$$

- $$\int_0^y O(x^n)\,\mathbb{d}x = O(y^{n+1}) \qquad \int_0^y o(x^n)\,\mathbb{d}x = o(y^{n+1}) \quad .$$

E16.36 Si scriva il polinomio di Taylor di $f(x)$ intorno a $x_0 = 0$, sfruttando "*il calcolo di Landau degli $o(x^n)$*" visto sopra. [1FJ]

$f(x)$	=	$p(x) + o(x^4)$
$(\cos(x))^2$	=	$+o(x^4)$
$(\cos(x))^3$	=	$+o(x^4)$
$\cos(x)e^x$	=	$+o(x^4)$
$\cos(\sin(x))$	=	$+o(x^4)$
$\sin(\cos(x))$	=	$+o(x^4)$
$\log(\log(e + x))$	=	$+o(x^3)$
$(1 + x)^{1/x}$	=	$+o(x^3)$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

(Per sviluppare gli ultimi due sarà necessaria un po' di fantasia; per ridurre i conti, si sviluppino gli ultimi due solo fino a $o(x^3)$).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FK']

E16.37 Si trovi un' approssimazione razionale di $\cos(1)$ con errore minore di $1/(10!) \sim 2.10^{-7}$ *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1FN'] [1FM]

E16.38 Si scriva lo sviluppo di Taylor di $(1+x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. *(Se ne deduca una generalizzazione del simbolo binomiale $\binom{\alpha}{k}$).* La serie di Taylor costruita con questi coefficienti è a volte detta *serie binomiale*, e converge per $|x| < 1$. [1FP]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FQ']

E16.39 Prerequisiti:15.20.Note:*Da un idea nel libro di Apostol [4], Capitolo 7.3.*Scrivere lo sviluppo di Taylor (intorno a $x_0 = 0$) per $-\log(1-x)$ integrando [1FR]

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{(1-x)} \tag{16.40}$$

e confrontare il "resto"

$$\int_0^x \frac{t^n}{(1-t)}\,\mathbb{d}t \tag{16.41}$$

così ottenuto con il "resto integrale" di $f(x) = -\log(1-x)$ (come presentato in esercizio 15.20).

Procedere similmente per $\arctan(x)$ integrando

$$1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} - (-1)^n x^{2n+2}/(1+x^2) \quad . \tag{16.42}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FS']

E16.43 Prerequisiti:15.20,16.39.Difficoltà:.Valutare per quali $r > 0$ si ha che il resto di Taylor di $f(x) = -\log(1-x)$ è infinitesimo in n, uniformemente per $|x| < r$; questo, usando il resto visto in (16.41), usando il resto integrale oppure usando il resto di Lagrange. [1FT]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FV']

Si veda anche l'esercizio 15.20.

§16.c Derivate parziali e totali, differenziali [2D3]

Esercizi

E16.44 Verificate che le seguenti derivate parziali esistono e calcolatele: [1FX]

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(4xy + 3x^2y - zy^2\Big)\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\Big(4xy + 3x^2y - zy^2\Big)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{ze^{x+|y|}}{1+x^2|y|}\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{ze^{x+|y|}}{1+x^2|y|}$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1FY']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E16.45 Prerequisiti: integrale di Riemann, 15.2. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto con $0 \in I$. [1FZ]
Data $f = f(x,y) : I \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e tale che anche $\frac{\partial}{\partial x} f$ esiste ed è continua, posto

$$g(x) = \int_0^1 f(x,y)\,\mathbb{d}y \quad ,$$

mostrate che g è di classe C^1, e che

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathbb{d}y \, .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1G0'][UNACCESSIBLE UUID '1G1']

E16.46 Prerequisiti: integrale di Riemann, 13.9, 13.8, 16.45. Sia [1G2]

$$h(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,z)\,\mathbb{d}z$$

dove a, b, f sono funzioni di classe C^1: mostrate che h è di classe C^1 e calcolate la derivata.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1G3']

E16.47 Le seguenti funzioni sono differenziabili in $(0,0)$? [1G4]

$$f_1(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } x > 0 \\ x + ye^{-x^2} & \text{se } x \le 0 \end{cases}, \qquad f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$f_3(x,y) = (\arctan(y+1))^{x+1}, \qquad f_4(x,y) = \max\{x^2, y^2\} \ .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1G5']

E16.48 Prerequisiti: 2.326. Sia $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Ricordiamo che, per il Teorema di Schwarz, invertendo le operazioni di derivazione parziale di f, il risultato non cambia. Sia $N(n,k)$ il numero di derivate parziali (potenzialmente diverse) di ordine n: mostrate che $N(n,k) = \binom{n+k-1}{k-1}$ (che è un polinomio a coefficienti interi nella variabile n, di ordine $k-1$). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1G7'] [1G6]

E16.49 Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, sia $\overline{x} \in W$. Sia poi $\psi : W \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Sia $\nabla\psi(\overline{x})$ il vettore riga di coordinate $\frac{\partial}{\partial x_k}\psi(\overline{x})$ (che è il gradiente di ψ, caso particolare della "matrice Jacobiana"); lo abbreviamo a $D = \nabla\psi(\overline{x})$ per semplicità; sia H la matrice Hessiana di componenti $H_{h,k} = \frac{\partial^2}{\partial x_k x_h}\psi(\overline{x})$; si mostri la validità della formula di Taylor al secondo ordine [1G8]

$$\psi(\overline{x} + v) = \psi(\overline{x}) + Dv + \frac{1}{2} v^t H v + o(|v|^2)$$

(notate che il prodotto Dv è una matrice 1×1 che identifichiamo con un numero reale, e similmente per $v^t H v$).

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E16.50 Prerequisiti:16.49. Siano $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti non vuoti, e sia $G : V \to W$ di classe C^2. Sia $\overline{y} \in V$ e $\overline{x} = G(\overline{y}) \in W$. Sia poi $\psi : W \to \mathbb{R}$ di classe C^2; posto $\tilde{\psi} = \psi \circ G$, confrontare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di ψ e di $\tilde{\psi}$ (centrati rispettivamente in $\overline{x}$ e $\overline{y}$). Supponendo inoltre che G sia un diffeomorfismo, verificare che [1GB]

- $\overline{x}$ è un punto stazionario per ψ se e solo se $\overline{y}$ è punto stazionario anche per $\tilde{\psi}$,
- e in questo caso gli Hessiani di ψ e di $\tilde{\psi}$ sono simili (cioè le matrici sono uguali a meno di cambio di coordinate).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GC']

§16.d Teorema di funzione implicita [2D4]

Useremo il Teorema di Funzione Implicita, nella versione a più variabili (Teorema 7.7.4 in [3]). Lo riportiamo qui per comodità, con alcune piccole modifiche nelle notazioni.

Teorema 16.51 (Teorema delle funzioni implicite in $\mathbb{R}^n$)**.** [1GD] *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, con A aperto, e sia $\overline{x} = (\overline{x}', \overline{x}_n) \in A$ tale che $\partial_{x_n} f$ esiste in un intorno di $\overline{x}$, è continua in $\overline{x}$ e $\partial_{x_n} f(\overline{x}) \neq 0$. Poniamo $\overline{a} = f(\overline{x})$.*

Esiste allora un intorno "cilindrico" U di $\overline{x}$

$$U = U' \times J$$

dove

$$U' = B(\overline{x}', \alpha)$$

è la palla aperta in $\mathbb{R}^{n-1}$ centrata in $\overline{x}'$ di raggio $\alpha > 0$, e

$$J = (\overline{x}_n - \beta, \overline{x}_n + \beta)$$

con $\beta > 0$. Per questo intorno si ha che $U \cap f^{-1}(\{\overline{a}\})$ coincide con il grafico $x_n = g(x')$, con $g : U' \to J$ continua.

Questo significa che, per ogni $x = (x', x_n) \in U$, si ha $f(x) = \overline{a}$ se e solo se $x_n = g(x')$.

Inoltre, se f è di classe C^k su A per qualche $k \in \mathbb{N}^*$, allora g è di classe C^k su U' e vale

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x') = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x', g(x'))}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x', g(x'))} \qquad \forall x' \in U', \forall i, 1 \leq i \leq n-1 \quad . \tag{16.52}$$

Esercizi

E16.53 Consideriamo la seguente funzione di 2 variabili di classe C^∞ [1GF]

$$f(x, y) = x^3 + y^4 - 1 \quad .$$

Verificate che $\{f = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ non sia vuoto; indi, per ogni punto del piano dove questa si annulla discutete se si può applicare il teorema di

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

funzione implicita, e dunque se l'insieme $\{f = 0\}$ è localmente grafico di funzione C^∞. Studiate inoltre l'insieme $\{f = 0\}$: è compatto? Quante componenti connesse vi sono?

(Tenere presente quanto mostrato in 16.63).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GG']

E16.54 Ripetete lo studio dell'esercizio 16.53 precedente per la funzione [1GJ]

$$f(x,y) = \sin(x+y) + x^2 \quad .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GK'][UNACCESSIBLE UUID '1GN']

E16.55 Note:*Esercizio 2, Compito scritto del 30 Giugno 2017.*Ripetete lo studio dell'esercizio precedente per la funzione [1GP]

$$f(x,y) = 1 + 4x + e^x y + y^4 \quad .$$

Mostrare che il luogo di zeri non è compatto.

E16.56 Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ differenziabili, e tali che in $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$ si ha che $\nabla f(p_0), \nabla g(p_0)$ sono linearmente indipendenti e che $f(p_0) = g(p_0) = 0$: mostrare che l'insieme $E = \{f = 0, g = 0\}$ è una curva in un intorno di p_0. [1GQ]

(Sugg. considerate che il prodotto vettore $w = \nabla f(p_0) \times \nabla g(p_0)$ è nonnullo se e solo se i vettori sono linearmente indipendenti — infatti è formato dai determinanti dei minori della matrice Jacobiana; assumendo senza perdita di generalità che $w_3 \neq 0$, mostrate che E è localmente il grafico di una funzione $(x,y) = \gamma(z)$.)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GR']

E16.57 Note:*Compito scritto 4 Luglio 2018.*La figura 5 mostra l'insieme $E = \{(x,y) : ye^x + xe^y = 1\}$. [1GS]

Si dimostrino rigorosamente le seguenti proprietà:

(i) in ogni punto $(x_0, y_0) \in E$ sono soddisfatte le ipotesi del Teorema della funzione implicita;

(ii) $E \cap \{(x,y) : x > 0\}$ coincide con il grafico, nella forma $y = f(x)$, di un'unica funzione f definita su $(0, +\infty)$;

(iii) E è connesso;

(iv) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(v) Mostrate (almeno intuitivamente) che esiste $x_0 > 0$ con la proprietà che f è decrescente per $0 < x < x_0$, crescente per $x > x_0$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GV']

E16.58 Sia E l'insieme di rette orizzontali [1GW]

$$E = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, 1/n) : x \in \mathbb{R}\} \quad .$$

Trovate una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$ di classe C^1 tale che $E = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

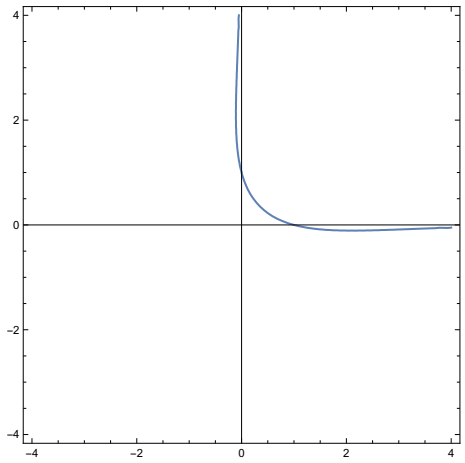


Figura 5: Figura per esercizio 16.57.

Dimostrate che necessariamente $\partial_y f(0,0) = 0$.

Sia ora $(\overline{x}, \overline{y}) = (0,0)$. Notate che esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(0) = 0$ e $f(x, g(x)) = 0$! Difatti la funzione $g \equiv 0$ è l'unica funzione con tali caratteristiche. Dunque una parte della tesi nel teorema di funzione implicita è soddisfatta.

Spiegate dunque precisamente perché la tesi del teorema di funzione implicita non è soddisfatta.

§16.d.a Estensioni

Vediamo ora alcune varianti del teorema "standard".

Esercizi

E16.59 Prerequisiti: 13.28. [1GX]

Lavoriamo nelle ipotesi del teorema 16.51. Mostrate che se $f(\cdot, y)$ è Lipschitziana di costante L per ogni fissato y cioè

$$|f(x_1', y) - f(x_2', y)| \leq L|x_1' - x_2'| \quad \forall x_1', x_2 \in U', y \in J$$

(e $L > 0$ non dipende da x_1', x_2', y) allora g è Lipschitziana di costante L'. Che rapporto vi è fra le costanti L e L'?

Similmente se f è Hölderiana.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1GY']

E16.60 Nelle stesse ipotesi del precedente teorema 16.51, mostrate che esistono $\varepsilon > 0$ e una funzione continua $\tilde{g} : V \to \mathbb{R}$ dove $I = (\overline{a} - \varepsilon, \overline{a} + \varepsilon)$ e $V = U' \times I$ è aperto in $\mathbb{R}^n$, tali che [1GZ]

$$\forall (x', a) \in V \quad , \quad (x', \tilde{g}(x', a)) \in U \quad \text{e} \quad f\big(x', \tilde{g}(x', a)\big) = a \quad . \tag{16.61}$$

Viceversa se $x \in U$ e $a = f(x)$ e $a \in I$ allora $x_n = \tilde{g}(x', a)$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Notate che la precedente relazione significa che, per ogni fissato $x' \in U'$, la funzione $\tilde{g}(x', \cdot)$ è l'inversa della funzione $f(x', \cdot)$ (quando definite su opportuni intervalli aperti).

Dunque si ha anche che la funzione $\tilde{g}$ è sempre differenziabile rispetto ad a, e la derivata parziale è

$$\frac{\partial}{\partial a}\tilde{g}(x', a) = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_n} f(x', \tilde{g}(x', a))} \quad .$$

Le altre derivate invece (ovviamente) sono come nel teorema 16.51.

La regolarità di $\tilde{g}$ è la stessa di g: se f è Lipschitziana allora $\tilde{g}$ è Lipschitziana; se $f \in C^k(U)$ allora $\tilde{g} \in C^k(V)$.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1H0']`

E16.62 Nelle stesse ipotesi dell'esercizio 16.60, assumiamo inoltre che $f \in C^1(A)$. `[1H1]`

- Decomponiamo $y = (y', y_n), \in \mathbb{R}^n$ come già fatto per x. Definiamo la funzione $G : V \to \mathbb{R}^n$ come $G(y) = (y', \tilde{g}(y))$. Sia $W = G(V)$ l'immagine di V, mostrate che $W \subseteq U$ e che W è aperto.
- Mostrate che è $G : V \to W$ è un diffeomorfismo; e che la sua inversa è la mappa $F(x) = (x', f(x))$.
- Poniamo $\tilde{f} = f \circ G$. Mostrate che $\tilde{f}(x) = x_n$.

(Questo esercizio sarà usato, insieme al 16.50, per affrontare i problemi vincolati in sezione §16.e). Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1H2']`

E16.63 `Prerequisiti: 7.61, 7.62, 9.96, 9.97, 16.24, 16.51, 20.7 e 20.14.` `[1H3]`
`Difficoltà:**.`

Per questo esercizio sono necessarie definizioni e risultati presentati nel capitolo §20.

Sia $r \geq 1$ intero, o $r = \infty$. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^r, e tale che $\nabla F \neq 0$ in ogni punto in cui $F = 0$.

Sappiamo da che 7.61 che $\{F = 0\}$ è l'unione disgiunta di componenti connesse, da 7.62 che ogni componente connessa è un chiuso.

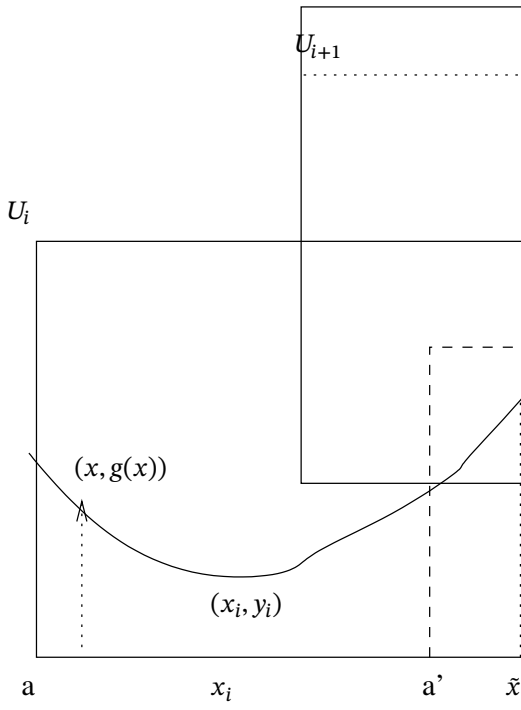
Mostrate che, per ogni componente connessa K, vi è un aperto $A \supseteq K$ tale che $K = A \cap \{F = 0\}$, e che dunque vi è un numero al più numerabile di componenti connesse.

Mostrate che ogni componente connessa è il sostegno di una curva semplice immersa e di classe C^r, di uno dei seguenti due tipi:

- la curva è chiusa, oppure
- la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ non è chiusa e è illimitata (cioè $\lim_{t \to \pm\infty} |\gamma(t)| = \infty$).

Il primo caso si verifica se e solo se la componente connessa è un compatto.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA



Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1H4'][UNACCESSIBLE UUID '1H5']

§16.e Problemi vincolati [2D5]

Definizione 16.64. *Sia ora $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f, \varphi : A \to \mathbb{R}$ funzioni reali di classe C^1 su A. Fissato $a \in \mathbb{R}$ definiamo poi l'insieme di livello* [1F6]

$$E_a = \{x \in A : \varphi(x) = a\}$$

assumiamo che E_a sia non vuoto, e che $\nabla\varphi(x) \neq 0$ per ogni $x \in E_a$.

*Chiamiamo **punto di minimo locale di f vincolato a** E_a un punto di E_a che sia di minimo locale per $f|_{E_a}$; e similmente per i massimi.*

Per risolvere i seguenti esercizi potrà essere utile applicare i risultati visti in 16.49, 16.50, 16.62.

Esercizi

E16.65 Prerequisiti:16.64,16.62. Siano f, φ di classe C^1 nell' aperto A, e sia $\overline{x}$ un punto di minimo locale per f vincolato ad E_a (dunque $\varphi(x) = a$). Mostrate che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(\overline{x}) + \lambda\nabla\varphi(\overline{x}) = 0$; questo λ è detto **il moltiplicatore di Lagrange**. [1H8]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1H9']

E16.66 Prerequisiti:16.64,16.50,16.65. Siano f, φ di classe C^2 nell' aperto A, e sia $\overline{x}$ un punto di minimo vincolato per f vincolata ad E_a; sia λ il moltiplicatore di Lagrange; definiamo $h = f(x) + \lambda\varphi(x)$, allora [1HB]

$$\forall v, v \cdot \nabla\varphi(x) = 0 \Longrightarrow v \cdot Hv \geq 0$$

dove H è la matrice Hessiana di h.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HC']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E16.67 Nelle stesse ipotesi, vediamo un "vice versa". Siano $f, \varphi : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2 nell' aperto A, e siano $\overline{x} \in E_a$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(\overline{x}) + \lambda \nabla \varphi(\overline{x}) = 0$; si abbia [1HD]

$$\forall v, v \cdot \nabla \varphi(x) = 0 \Longrightarrow v \cdot Hv > 0$$

dove

$$h(x) = f(x) + \lambda \varphi(x)$$

e H è la matrice Hessiana di h in $\overline{x}$. Si mostri allora che $\overline{x}$ è un punto di minimo locale vincolato per f rispetto a E_a.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HF']

§16.e.a Vincoli con diseguaglianze

Consideriamo ora un diverso tipo di vincolo.

Definizione 16.68. *Sia* [2BH]

$$F_a = \{x \in A : \varphi(x) \leq a\} \quad ;$$

assumiamo sempre che F_a sia non vuoto e che $\nabla \varphi(x) \neq 0$ per ogni $x \in E_a$.

*Chiamiamo **punto di minimo locale di f vincolato a F_a** un punto di F_a che sia di minimo locale per $f|_{F_a}$; e similmente per i massimi.*

Esercizi

E16.69 Prerequisiti: 16.68, 16.64. Mostrate che $\partial F_a = E_a$ e che F_a coincide con la chiusura della sua parte interna. *(Le operazioni di chiusura e frontiera vanno eseguite all'interno di A, visto come spazio topologico!)* [1HG]

E16.70 Prerequisiti: 16.68. Mostrate che condizione necessaria perché $x \in A$ sia minimo locale di f vincolata a F_a è che, [1HH]

- o $\varphi(x) < a$ e $\nabla f(x) = 0$,
- oppure $\varphi(x) = a$ e $\nabla f(x) + \lambda \nabla \varphi(x) = 0$ con $\lambda \geq 0$.

Queste sono le condizioni di **Karush–Kuhn–Tucker**.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HJ']

E16.71 Prerequisiti: 16.68. Nel caso $n = 1$, supponiamo che A sia un intervallo aperto, mostrate che se $\varphi(x) = a$ e $f'(x)\varphi'(x) < 0$ allora il punto x è punto di minimo locale per f vincolata a F_a. [1HK]

E16.72 Prerequisiti: 16.68. Trovate un semplice esempio nel caso $n = 2$ in cui il punto x non è di minimo locale per f vincolata a F_a, ma $\varphi(x) = a$ e $\nabla f(x) + \lambda \nabla \varphi(x) = 0$ con $\lambda > 0$. [1HM]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HN']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§17 Limiti di funzioni

[1HQ]

Definizione 17.1. *Si consideri un insieme A, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e una successione di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}$. Diremo che f_n converge a f puntualmente se* [2DT]

$$\forall x \in A\,,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad .$$

Diremo che f_n converge a f uniformemente se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A\,,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad .$$

Ulteriori informazioni si possono trovare nel Cap. 6 di [3], Cap. 11 di [5] o Cap. 7 di [23].

Definizione 17.2. *Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni $f : X_1 \to X_2$, diremo che è una **famiglia equicontinua** se vale una di queste proprietà equivalenti.* [1HR]

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathcal{F}$

$$\forall x, y \in X_1,\ d_1(x,y) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \quad .$$

- *Esiste $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty]$ una fissata funzione monotona debolmente crescente per cui $\lim_{t\to 0+} \omega(t) = \omega(0) = 0$ (che è detta* "modulo di continuità" [†104]*) per cui*

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall x, y \in X_1,\ d_2(f(x), f(y)) \leq \omega\big(d_1(x,y)\big) \quad . \tag{17.3}$$

- *Esiste $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty]$ una fissata funzione continua con $\omega(0) = 0$ che soddisfa* (17.3)*.*

(Per l'equivalenza fra le ultime due può essere utile 13.11.)

Esercizi

E17.4 Note:*Questo risultato è noto come "lemma del Dini".* [1HS]

Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $I \subset X$ un compatto e siano $f, f_n : I \to \mathbb{R}$ continue e tali che $f_n(x) \searrow_n f(x)$ puntualmente (cioè per ogni $x \in I$ e n si ha $f(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ e $\lim_n f_n(x) = f(x)$). Si mostri allora che $f_n \to f$ uniformemente.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HT']

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HV']

Negli esercizi successivi vedremo che se anche una sola delle ipotesi viene a mancare, allora esistono controesempi.

E17.5 Trovate un esempio di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e limitate e tali che $f_n(x) \searrow_n 0$ puntualmente, ma non $f_n \to 0$ uniformemente. [1HW]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HX']

E17.6 Trovate un esempio di $f_n : [0,1] \to [0,1]$ continue e limitate e tali che $f_n(x) \to_n 0$ puntualmente ma non $f_n \to 0$ uniformemente. [1HY]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1HZ']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E17.7 Trovate un esempio di funzioni $f_n : [0,1] \to [0,1]$ continue e limitate e tali che $f_n(x) \searrow_n f(x)$ puntualmente a $f : [0,1] \to [0,1]$ (cioè per ogni x e n si ha $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq 1$ e $\lim_n f_n(x) = f(x)$) ma f non è continua e non si ha convergenza $f_n \to f$ uniforme. [1J1]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J2']

E17.8 Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Quali di queste classi $\mathcal{F}$ di funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ sono chiuse per convergenza uniforme? Quali sono chiuse per convergenza puntuale? [1J3]

1. Le funzioni continue e monotone (debolmente) crescenti su $I = [0,1]$.
   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J4']
2. Le funzioni convesse su $I = [0,1]$.
   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J5']
3. Data $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una fissata funzione continua con $\omega(0) = 0$ (che è detta *"modulo di continuità"*), sia
   $$\mathcal{F} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ \forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq \omega(|x-y|)\}$$
   (questa è detta *una famiglia di funzioni equicontinue*, come spiegato nella definizione 17.2.)
   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J6']
4. Dato $N \geq 0$ fissato, la famiglia di tutti i polinomi di grado minore o uguale a N, visti come funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J7']
5. Le funzioni regolate su $I = [0,1]$. [†105]
   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1J9']
6. Le funzioni uniformemente continue e limitate su $I = \mathbb{R}$.
   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JB']
7. Le funzioni Hoelderiane su $I = [0,1]$, cioè
   $$\left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists b > 0, \exists \alpha \in (0,1] \ \forall x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq b|x-y|^\alpha \right\}$$
   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JC'][UNACCESSIBLE UUID '1JD']
8. Le funzioni Riemann integrabili su $I = [0,1]$.
   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JF']

E17.9 Ci chiediamo se le classi precedenti $\mathcal{F}$ godono di una *"proprietà di rigidità"*, cioè se da una convergenza più "debole" nella classe segue una convergenza più "forte". Dimostrate le seguenti proposizioni. [1JG]

1. Siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ continue e monotone (debolmente) crescenti, definite su un intervallo $I = [a,b]$ chiuso e limitato. Se vi è un insieme denso J in I e con $a, b \in J$, per cui $\forall x \in J, f_n(x) \to_n f(x)$, allora $f_n \to_n f$ uniformemente.
   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JH']

[†104] Riguardo alla nozione di "modulo di continuità" si veda anche 13.15.

[†105] Le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ *regolate* sono le funzioni che ammettono in ogni punto limite destro e limite sinistro finiti. Si veda la Sezione §12.b.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto. Siano $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ convesse su A. Se vi è un insieme J denso in A tale che $\forall x \in J$, $f_n(x) \to_n f(x)$, allora per ogni $[a,b] \subset A$ si ha che $f_n \to_n f$ uniformemente su $[a,b]$.

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JJ']

3. Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ una successione equicontinua di funzioni [†106] definite su un intervallo $I = [a,b]$ chiuso e limitato, e sia ω il loro modulo di continuità.
   Se vi è un insieme J denso in $[a,b]$ tale che $\forall x \in J$, $f_n(x) \to_n f(x)$, allora, f si estende da J a I in modo da essere continua (con modulo ω), e $f_n \to_n f$ uniformemente su $[a,b]$.

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JK']

4. Siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ polinomi di grado minore o uguale a N, visti come funzioni definite su un intervallo $I = [a,b]$ chiuso e limitato; siano fissati $N+1$ punti distinti $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N \le b$; supponiamo che , per ogni x_i, $f_n(x_i) \to_n f(x_i)$: allora f_n convergono a f uniformemente, e così ogni loro derivata $D^k f_n \to_n D^k f$ uniformemente.

   Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JM']

Si cerchino inoltre controesempi per simili proposizioni quando applicate alle altre classi di funzioni viste nell'esercizio precedente.

E17.10 Prerequisiti:17.2, 17.8 punto 6.Difficoltà:*. [1JN]

Se $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ sono uniformemente continue su un insieme $I \subset \mathbb{R}$, e $f_n \to_n f$ uniformemente su I, allora f è uniformemente continua, e la famiglia $(f_n)_n$ è equicontinua.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JP']

E17.11 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e siano $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le traslate di f, definite (per $t \in \mathbb{R}$) da $g_t(x) = f(x-t)$. Si mostri che g_t tende puntualmente a f per $t \to 0$ se e solo se f è continua; e che g_t tende uniformemente a f per $t \to 0$ se e solo se f è uniformemente continua. [1JQ]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JR']

E17.12 Sia $I \subset \mathbb{R}$ un aperto, sia $\hat{x}$ un punto di accumulazione per I [†107] , sia $f_m : I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni limitate che convergono uniformemente a $f : I \to \mathbb{R}$ quando $m \to \infty$. Supponiamo che per ogni m esista $\lim_{x\to\hat{x}} f_m(x)$ allora [1JS]

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{x\to\hat{x}} f_m(x) = \lim_{x\to\hat{x}} \lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

nel senso che se uno dei due limiti esiste allora esiste anche l'altro, e sono uguali. (Il precedente risultato vale anche per limiti destri o limiti sinistri).

Mostrate con un semplice esempio che se il limite non è uniforme allora la precedente uguaglianza non vale.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JT'] (Si veda anche l'esercizio 6.8).

E17.13 Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo compatto, siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ continue. Mostrate che i due seguenti fatti sono equivalenti. [1JV]

[†106] La definizione è in 17.2

[†107] Includendo anche il caso in cui I è superiormente illimitato e $\hat{x} = +\infty$, oppure il caso in cui I è inferiormente illimitato e $\hat{x} = -\infty$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

a. Per ogni $x \in X$ e per ogni successione $(x_n)_n \subset I$ per cui $x_n \to_n x$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$;

b. $f_n \to_n f$ uniformemente su I.

Trovate indi un esempio dove $I = [0,1)$, il primo punto vale, ma f_n non tende uniformemente a f.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1JW']

§17.a Sul Teorema di Ascoli–Arzelà

Vediamo ora alcuni esercizi che ricostruiscono il famoso Teorema di Ascoli–Arzelà.

Esercizi

E17.14 Prerequisiti:17.8 punto 6,17.10. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme. Sia X l'insieme delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ limitate e uniformemente continue. Dotiamo X della distanza $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$. Mostrate che lo spazio metrico (X, d_∞) è completo. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1JY'] In particolare, X è un sottospazio vettoriale chiuso nello spazio $C_b(I)$ delle funzioni continue e limitate. [1JX]

E17.15 Prerequisiti:17.2,17.8.6,17.10.Difficoltà:**. [1KO]

Sia (X, d_∞) come nell'esercizio 17.14 precedente. Sia ora $\mathcal{F} \subseteq X$ una famiglia di funzioni, supponiamo che $\mathcal{F}$ sia totalmente limitata (come definito in 9.110): mostrate allora che la famiglia $\mathcal{F}$ è equicontinua.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1K1']

E17.16 Prerequisiti:17.2,9.115, 17.9.3.Difficoltà:*. [1K2]

Sia ora invece $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue, e supponiamo che la successione (f_n) sia equicontinua e limitata (cioè $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$). Si mostri che esiste una sottosuccessione f_{n_k} che converge uniformemente.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1K3']

E17.17 Prerequisiti:17.2,9.110,9.121,17.16,17.15.Difficoltà:**.Note:*Una versione del teorema di Ascoli–Arzelà.* [1K4]

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Sia $C(I)$ l'insieme delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Dotiamo $C(I)$ della distanza $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$. Sappiamo che lo spazio metrico $(C(I), d_\infty)$ è completo.

Sia $\mathcal{F} \subseteq C(I)$: le seguenti sono equivalenti.

1. $\mathcal{F}$ è compatto
2. $\mathcal{F}$ è chiusa, è equicontinua e limitata (cioè $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_\infty < \infty$).

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§18 Serie di potenze [1K6]

La teoria necessaria per lo svolgimento dei successivi esercizi si può trovare nel Cap. 6 di [3], Sez. 11.6 in [5] o Cap. 8 di [23].

Esercizi

E18.1 Una serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ha raggio di convergenza positivo se e solo se se esiste $\ell > 0$ per cui $|a_k| \leq \ell^k$ per ogni $k \geq 1$. [1K7]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1K8']

E18.2 Siano c_k numeri complessi, e $a_k = |c_k|$; si noti che le serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ hanno lo stesso raggio di convergenza R. [1K9]

Posta, per $t > 0$ reale $\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, si noti che questa formula definisce una funzione monotona $\tilde{f} : [0, \infty) \to [0, \infty]$; si mostri che il raggio di convergenza R coincide con l'estremo superiore dei $t \geq 0$ per cui $\tilde{f}(t) < \infty$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1KB'] *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1KC']

E18.3 Prerequisiti:6.70. Data $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ con $a_k \geq 0$ e con il raggio di convergenza $r > 0$, dimostrate che $\lim_{t \to r-} f(t) = f(r)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1KF'] [1KD]

E18.4 Trovate due esempi di serie $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ con $a_k > 0$ e con raggio di convergenza r positivo e finito, per cui [1KG]

- $f(r) < \infty$
- $f(r) = \infty$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1KH']

E18.5 [1KJ]

Trovate un esempio di serie $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ con $a_k \in \mathbb{R}$ e con raggio di convergenza r positivo e finito, per cui esiste finito il limite $\lim_{t \to r-} f(t)$, ma la serie non converge in $t = r$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1KK']

Notate che (per il Lemma di Abel) se la serie converge in $t = r$ allora esiste il limite $\lim_{t \to r-} f(t) = f(r)$.

E18.6 Siano $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Supponendo che $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ con raggio di convergenza r positivo e $t \in (-r, r)$, si determinino i coefficienti a_k in modo da soddisfare le seguenti equazioni differenziali. [1KM]

1. $f'(t) = f(t)$ e $f(0) = b$,
2. $f'(t) = t^2 f(t)$ e $f(0) = b$,
3. $f''(t) = t^2 f(t)$ e $f(0) = b, f'(0) = 0$,
4. $t f''(t) + f'(t) + t f(t) = 0$ e $f(0) = b, f'(0) = 0$,
5. $t^2 f''(t) + t f'(t) + (t^2 - m^2) f(t) = 0$ $m \geq 2$ intero, $f(0) = f'(0) = \ldots f^{(m-1)} = 0$, e $f^{(m)} = b$.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

(Le ultime due sono dette *Equazioni di Bessel*). *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1KP'][UNACCESSIBLE UUID '27G']

Si vedano anche gli esercizi 19.3, 23.20, 23.22 e 23.19.

§18.a Somma e prodotto, composizione e inversa [2D6]

Esercizi

E18.7 Prerequisiti:18.2. Consideriamo le serie di potenze [1KQ]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ \ g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \ ,$$

con raggio di convergenza non nullo, rispettivamente r_f e r_g.

Si mostri che la funzione prodotto $h(x) = f(x)g(x)$ si può esprimere in serie di potenze

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

dove

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \ ;$$

con raggio di convergenza $r_h \geq \min\{r_f, r_g\}$. (Si noti la somiglianza con il prodotto di Cauchy, discusso in sezione §6.c.c)

Può succedere che $r_h > \min\{r_f, r_g\}$?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1KR']

E18.8 Prerequisiti:18.1.Difficoltà:*. Sia $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ con $b_0 = g(0) \neq 0$: si esprima formalmente la funzione reciproca $f(x) = 1/g(x)$ come serie di potenze e si calcolino i coefficenti a partire dai coefficienti b_m; se il raggio di convergenza di g è non nullo si mostri che il raggio di convergenza di f è non nullo e che $f(x) = 1/g(x)$ laddove le due serie $f(x), g(x)$ convergono. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1KT'] [1KS]

E18.9 Prerequisiti:18.2,16.19.Difficoltà:*. [1KV]

Consideriamo le serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ \ g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \ ,$$

con raggio di convergenza non nullo, rispettivamente r_f e r_g. Supponiamo che $g(0) = 0 = b_0$. Siano $I_f, I_g \subset \mathbb{C}$ dischi centrati in zero con raggi minori rispettivamente di r_f e r_g: le precedente serie dunque definiscono funzioni $f : I_f \to \mathbb{C}$ e $g : I_g \to \mathbb{C}$. A meno di rimpicciolire I_g, assumiamo che $g(I_g) \subset I_f$.

Si mostri che la funzione composta $h = f \circ g : I_g \to \mathbb{C}$ si può esprimere come serie di potenze $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ (con raggio di convergenza almeno r_g); si mostri come i coefficienti c_k possono essere calcolati dai coefficienti a_k, b_k. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1KW'][UNACCESSIBLE UUID '1KX'] [UNACCESSIBLE UUID '1KY']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E18.10 Difficoltà:*. Sia $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ con raggio di convergenza non nullo r_g. [1KZ]
Sia $I_g \subset \mathbb{C}$ un disco centrato in zero di raggio minore di r_g; abbiamo dunque definito una funzione $g : I_g \to \mathbb{C}$. assumiamo $g(0) = 0$ e $g'(0) \neq 0$; Assumendo che l'inversa $f(y) = g^{-1}(y)$ si possa esprimere in serie di Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calcolate i coefficienti della serie di f partendo da quelli di g.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1M0']

E18.11 Prerequisiti:18.10.Difficoltà:**. [1M1]

Definendo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dove i coefficienti a_n sono stati ricavati nel precedente esercizio 18.10, si provi a mostrare che il raggio di convergenza f è positivo. †108

§18.b Exp,sen,cos [2D7]

Esercizi

E18.12 Prerequisiti:18.2,18.7, 5.7, 5.8.È uso definire [1M3]

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

per $z \in \mathbb{C}$. Vogliamo riflettere su questa definizione.

- Innanzitutto, per ogni $z \in \mathbb{C}$, possiamo effettivamente definire

  $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

  (si noti infatti che il raggio di convergenza è infinito — come si verifica facilmente usando il criterio della radice 6.22).
- Notiamo che $f(0) = 1$; definiamo $e = f(1)$ che è il *numero di Nepero*†109
- Si mostri che $f(z + w) = f(z)f(w)$ per $z, w \in \mathbb{C}$.
- Si verifica facilmente che $f(x)$ è monotona crescente per $x \in (0, \infty)$; usando la relazione precedente, si ottiene che è monotona crescente per $x \in \mathbb{R}$.
- Si mostri poi che, per $n, m > 0$ interi, $f(n/m) = e^{n/m}$ (per la definizione di $e^{n/m}$ si riveda 5.7).
- Si deduca che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ (per la definizione di e^x si riveda 5.8)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1M4']

E18.13 Prerequisiti:6.70. [1M5]

Dato $z \in \mathbb{C}$, mostrate che

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N = e^z \tag{18.14}$$

e che il limite è uniforme sui compatti. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1M6']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E18.15 Se $z = x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, possiamo allora calcolare l'esponenziale complesso come prodotto $e^z = e^x e^{iy}$. Si usino gli sviluppi in serie di potenze per mostrare la *identità di Eulero* $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. [1M7]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1M8']

E18.16 Viceversa si noti allora che $\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$, $\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{i2}$. [1M9]

E18.17 Si usi la precedente formula per verificare le note identità [1MB]

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MC']

E18.18 Definiamo le funzioni *coseno iperbolico* [†110] [1MD]

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

e *seno iperbolico*

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

- Si verifichi che
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$
(che giustifica il nome di "iperbolico").
- Si verifichino gli sviluppi in serie
$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$
$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$
- Si verifichi che
$$\cosh' = \sinh \ , \ \sinh' = \cosh$$
- Si verifichino le formule
$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \cosh y \sinh x$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x \, .$$

§18.c Esponenziale di matrici [2D8]

Definizione 18.19. *Definiamo l'esponenziale di matrici come* [1MF]

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

dove si intende che $A^0 = \mathbb{1}$*, la matrice identità.*

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Esercizi

E18.20 Prerequisiti:Sezione . §11.d,11.35, 11.43, 11.39, 18.13. [1MG]

Dotiamo lo spazio delle matrici $\mathbb{C}^{n\times n}$ di una delle norme viste in Sezione §11.e.

- Mostrate che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ converge.
- Mostrate che
$$\exp(A) = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{I} + A/N\right)^N \tag{18.21}$$
dove $\mathbb{I}$ è la matrice identità in $\mathbb{R}^{n\times n}$; e che la convergenza è uniforme in ogni intorno compatto di A. *(Sugg. fate buon uso del simile risultato 18.13.)*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MH']

E18.22 Se A è invertibile allora [1MJ]

$$A\exp(B)A^{-1} = \exp(ABA^{-1}) \quad .$$

E18.23 La derivata di [1MK]

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$$

è $A\exp(tA)$. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1MM']

E18.24 Se A, B commutano, allora [1MN]

$$A\exp(B) = \exp(B)A \quad , \quad \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \, .$$

In particolare $\exp(A)$ è sempre invertibile e la sua inversa è $\exp(-A)$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MP']

E18.25 Siano [1MQ]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad :$$

calcolate

$$\exp(A)\exp(B) \quad , \quad \exp(B)\exp(A) \quad , \quad \exp(A+B) \quad ;$$

otterrete che sono tutti diversi fra loro. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1MR']

E18.26 Se A, B commutano allora la derivata direzionale di exp nel punto A in direzione B è $B\exp(A)$, cioè [1MS]

$$\frac{d}{dt}\exp(A+tB)|_{t=0} = B\exp(A) \, .$$

E18.27 Difficoltà:*. Mostrate che [1MT]

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A)) \quad .$$

Sugg. usate la formula di Jacobi 23.14 per calcolare la derivata di $\det(\exp(tA))$*; usate il risultato precedente 18.23 — vedere anche 22.38. Un'altra dimostrazione si può ottenere passando alla forma di Jordan (usando 18.22).*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MV']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E18.28 Difficoltà:*.Nel caso generale (quando non sappiamo se A, B commutano) procediamo come segue. Definiamo $[A, B] = AB - BA$. [1MW]

- Posto $B_0 = B$ e $B_{n+1} = [A, B_n]$ si ha

$$\begin{aligned} B_n &= A^n B - nA^{n-1}BA + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}BA^2 + \cdots + (-1)^n BA^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} A^{n-k} B A^k \ ; \end{aligned}$$

- definiamo ora $Z = Z(A, B)$

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \ , \tag{18.29}$$

(notate che Z è lineare in B): si mostra che la serie precedente converge e che

$$\exp(A) B \exp(-A) = Z \ ; \tag{18.30}$$

- da questa infine si dimostra che

$$\exp(A)\exp(B)\exp(-A) = \exp(Z) \ .$$

(Queste formule si possono vedere come conseguenze della formula di Baker–Campbell–Hausdorff [51]). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MX']

E18.31 Prerequisiti:18.20.In generale (anche quando A, B non commutano) [1MY]

$$\exp(A + B) = \lim_{N \to \infty} \Big(\exp(A/N) \exp(B/N) \Big)^N$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1MZ']

E18.32 Prerequisiti:22.37.Difficoltà:**.Nel caso generale (anche quando non sappiamo se A, B commutano), possiamo esprimere $\exp(A + sB)$ usando una espressione in serie di potenze. Definiamo [1NO]

$$C(t) = \exp(-tA) B \exp(tA)$$

e (ricorsivamente) $Q_0 = \mathbb{I}$ (la matrice identità) e poi

$$Q_{n+1}(t) = \int_0^t C(\tau) Q_n(\tau) \, \mathbb{d}\tau$$

allora si ha

$$\exp(-A)\exp(A + sB) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n Q_n(1) \ ; \tag{18.33}$$

questa serie converge per ogni s.

[†108] La dimostrazione si può trovare in Proposizione 9.1 a pg 26 nel libro di Henri Cartan [8].
[†109] Conosciuta come *Euler's number* o *Napier's constant* in Inglese.
[†110] Si veda la pagina di Wikipedia "Derivazione delle funzioni iperboliche" [46] che spiega in quale senso y è un "angolo".

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Se ne ricava in particolare che la derivata direzionale di exp nel punto A in direzione B è

$$\frac{d}{ds}\exp(A+sB)|_{s=0} = \exp(A)Q_1(1) = \int_0^1 \exp((1-\tau)A)B\exp(\tau A)\,\mathbb{d}\tau \ .$$

(Sugg. usate l'esercizio 22.37 con $Y(t,s) = \exp(-tA)\exp(t(A+sB))$ *e poi ponete* $t = 1$. *)*

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1N1']

E18.34 Prerequisiti:18.28.Difficoltà:*. [1N2]

Dimostrate la relazione

$$\frac{d}{dt}\exp(A+tB)|_{t=0} = \int_0^1 \exp(sA)B\exp((1-s)A)\,\mathbb{d}s \ .$$

usando le relazioni (18.29) e (18.30) di esercizio 18.28.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§19 Funzioni analitiche [1N4]

La teoria necessaria per lo svolgimento dei successivi esercizi si può trovare nel Cap. 6 di [3] o Cap. 8 di [23].

Esercizi

E19.1 Prerequisiti:16.20. [1N5]

Si verifichi che la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(vista anche in 16.20) non è analitica.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1N6']

E19.2 Note:*Esercizio 2 del compito Marzo 2010.* [1N7]

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto non vuoto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $\forall x \in I, \forall k \geq 0$, si ha $f^{(k)}(x) \geq 0$: si mostri che f è analitica.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1N9'] Si veda anche l'esercizio 16.30.

E19.3 Prerequisiti:18.7. [1NC]

Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si mostri che è analitica su tutto $\mathbb{R}$, ma il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di Taylor centrato in x_0 è $\sqrt{1+x_0^2}$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1ND'][UNACCESSIBLE UUID '1NF']

Studiate similmente anche $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ oppure $f(x) = e^{1/(x^2+1)}$.

E19.4 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞; sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia [1NG]

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

la serie di Taylor; supponiamo che g abbia raggio di convergenza $R > 0$: dunque $g : J \to \mathbb{R}$ è un funzione ben definita, dove $J = (x_0 - R, x_0 + R)$. Può succedere che $f(x) \neq g(x)$ per un punto $x \in J$?

E se f è analitica? [†111]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1NH']

E19.5 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto non vuoto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Sia [1NJ]

$$b_n = \sup_{x \in I} |f^{(n)}(x)| = \|f^{(n)}\|_\infty \quad ;$$

se

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{b_n} < \infty$$

[†111] Per "analitica" intendiamo: fissato x_0 esiste una serie $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ con raggio di convergenza non nullo tale che $f = h$ in un intorno aperto di x_0 (intorno contenuto nel disco di convergenza) .

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

allora f è analitica.

Mostrate con un semplice esempio che la richiesta non è necessaria.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1NK'][UNACCESSIBLE UUID '1NM']

E19.6 Note:*Esercizio 1 Compito 30 Giugno 2017.* [1NN]

Sia f una funzione continua sull'intervallo $[0,1]$. Si dimostri che la funzione

$$F(t) = \int_0^1 f(x)e^{tx}\,\mathbb{d}x$$

è analitica su $\mathbb{R}$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1NP']

E19.7 Sia $I = (0,1)$, si trovi un esempio di una funzione analitica $f : I \to \mathbb{R}$ non identicamente zero, ma tale che $A = \{x \in I : f(x) = 0\}$ abbia un punto di accumulazione in $\mathbb{R}$. Si confronti questo esempio con la Prop. 6.8.4 negli appunti [3]; e con l'esempio 16.26. [1NQ]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1NR']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§20 Curve [1NT]

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 20.1. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.* [1NV]

- *Una funzione continua $\gamma : I \to X$ è detta **curva parametrica**, o più semplicemente nel seguito* curva.
- *Se γ è iniettiva si dice che la curva è **semplice**.*
- *Se γ è un omeomorfismo con la sua immagine, si dice che la curva è **inclusa**, o anche **embedded**.*
- *Se $X = \mathbb{R}^n$ e γ è di classe C^1 e $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, allora γ è detta una **curva immersa** o **curva regolare**.* [†112]

*Chiameremo **sostegno** o **supporto** l'immagine $\gamma(I)$ di una curva.*

Si usa anche il termine arco *come sinonimo di* curva*;* [†113] *questo termine viene prevalentemente usato quando la curva non è (necessariamente) chiusa.*

Rimandiamo lo studio delle curve chiuse alla prossima sezione.

Riportiamo due nozioni di equivalenza di curve. La prima era presente in una versione preliminare delle note [3].

Definizione 20.2. *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli. Siano $\gamma : I \to X$ e $\delta : J \to X$ due curve. Si pone $\gamma \sim \delta$ se esiste un omeomorfismo* [†114] *crescente $\varphi : I \to J$ tale che $\gamma = \delta \circ \varphi$.* [1NW]

La seconda è la definizione 7.5.4 dal capitolo 7 sezione 5 dagli appunti [3].

Definizione 20.3. *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli. Siano $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\delta : J \to \mathbb{R}^n$ due curve regolari. Si pone $\gamma \approx \delta$ se esiste un diffeomorfismo* [†115] *$\varphi : I \to J$ monotono crescente, tale che $\gamma = \delta \circ \varphi$.* [1NX]

Esercizi

E20.4 `Prerequisiti:20.2,20.3.` [1J8]

Mostrare che la relazione $\gamma \sim \delta$ è una relazione di equivalenza.

Mostrare che la relazione $\gamma \approx \delta$ è una relazione di equivalenza.

E20.5 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Mostrate che f è continua se e solo se, per ogni curva $\gamma : [0, 1] \to A$ si ha che $f \circ \gamma$ è continua. *Soluzione nascosta:* [1NY]
`[UNACCESSIBLE UUID '1NZ']`

E20.6 Supponiamo che I sia un intervallo chiuso e limitato; usate l'esercizio 9.113 per mostrare che un arco $\gamma : I \to X$ semplice è un omeomorfismo con la sua immagine, e dunque la curva è "embedded". [1PO]

Il risultato è ancora vero se I non è chiuso? E se I non è limitato?

E20.7 `Prerequisiti:20.6.Difficoltà:*.` [1P1]

[†112] Negli appunti [3] si usa *curva regolare* e così anche in alcuni testi come [1].
[†113] Notare che però in [23] "*arc*" è una curva iniettiva.
[†114] vedere 7.73.
[†115] Un diffeomorfismo è una funzione bigettiva $\varphi : I \to J$ di classe C^1, la cui inversa è di classe C^1; in particolare φ' non è mai nulla, e (quando dominio e codominio sono intervalli) ha sempre lo stesso segno.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Presa una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ definiamo nel seguito $\hat{I} = \{t \in \mathbb{R} : -t \in I\}$ e $\hat{\gamma} : \hat{I} \to \mathbb{R}^n$ tramite $\hat{\gamma}(t) = \gamma(-t)$.

Vogliamo mostrare che, in certe ipotesi, due curve hanno lo stesso sostegno se e solo se sono equivalenti.

- Siano $\gamma, \delta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ curve semplici, ma non chiuse, e con lo stesso sostegno. Mostrate che se $\gamma(0) = \delta(t)$ allora $t = 0$ oppure $t = 1$. Nel caso $\gamma(0) = \delta(0)$, mostrate che $\gamma \sim \delta$. Se invece $\gamma(0) = \delta(1)$ allora $\hat{\gamma} \sim \delta$.
- Siano $\gamma, \delta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ curve semplici e immerse, ma non chiuse, e con lo stesso sostegno, e sia $\gamma(0) = \delta(0)$: mostrate che $\gamma \approx \delta$. Se invece $\gamma(0) = \delta(1)$ allora $\hat{\gamma} \approx \delta$.

(Per il caso di curve chiuse si veda 20.20)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1P2']

E20.8 Mostrate che $[0,1]$ e $[0,1]^2$ non sono omeomorfi. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1P4'] [1P3]

E20.9 Prerequisiti:9.113, 20.8.Mostrate che non si può trovare una curva $c : [0,1] \to [0,1]^2$ continua e bigettiva; dunque una curve $c : [0,1] \to [0,1]^2$ che è continua e surgettiva, non può essere iniettiva: come ad esempio la curva di Peano o la curva di Hilbert. [1P5]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1P6']

E20.10 Note:*Bella formula tratta da [68].* [1P7]

Sia $S = S(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ la sfera unitaria $S = \{x : |x| = 1\}$. Sia $v, w \in S$ con $v \neq w$ e $v \neq -w$; sia $T = \arccos(v \cdot w)$ in modo che $T \in (0, \pi)$; quindi la geodetica (cioè la curva di lunghezza minima parametrizzata dall'arco) $\gamma(t) : [0,T] \to S$ che connette v a w all'interno S è

$$\gamma(t) = \frac{\sin(T-t)}{\sin(T)} v + \frac{\sin(t)}{\sin(T)} w \quad ,$$

e la sua lunghezza è T.
(Si può presumere che, quando $v \cdot w = 0$ cioé $T = \pi/2$, allora la geodetica è $\gamma(t) = v\cos(t) + w\sin(t)$). Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1P8']

§20.a Curve chiuse

Aggiungiamo altre definizioni a quelle già viste in 20.1.

Definizione 20.11. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Sia $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Sia $\gamma : I \to X$ una curva parametrica.* [1PB]

- *Se $\gamma(a) = \gamma(b)$ si dice che la curva è **chiusa**;*
- *inoltre si dice che la curva è **semplice e chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e γ è iniettiva quando ristretta a $[a,b)$.* [†116]
- *Se $X = \mathbb{R}^n$ e γ è di classe C^1 e è chiusa, si assume ulteriormente che $\gamma'(a) = \gamma'(b)$.*

[†116] Cioè, non si richiede la iniettività negli estremi.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

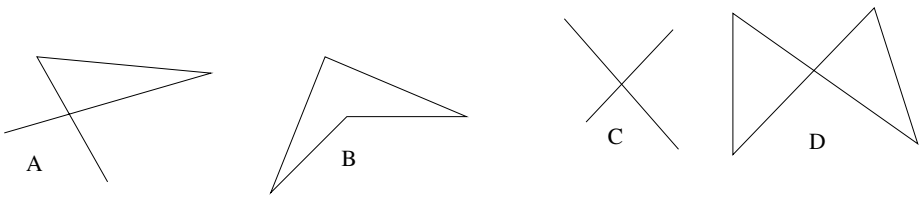


Figura 6: Insiemi dell'esercizio 20.12

Esercizi

E20.12 Consideriamo i sottoinsiemi del piano delle seguenti figure 6: quali possono essere sostegno di una curva semplice? oppure di una curva chiusa semplice? oppure unione di sostegni di due curve semplici (possibilmente chiusi)? *(Dimostrate le vostre affermazioni.)* [1PC]

E20.13 Sia $\gamma : [0,1] \to X$ una curva chiusa, mostrate che ammette un' estensione $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to X$ continua e periodica di periodo 1. [1PF]

E20.14 Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ una curva chiusa di classe C^1, mostrate che ammette un' estensione $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ periodica di periodo 1 e di classe C^1. [1PG]

E20.15 Useremo le definizioni e i risultati della Sezione §9.o, in particolare 9.169. [1PH]

Data $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to X$ continua e periodica di periodo 1, possiamo definire la mappa $\hat{\gamma} : S^1 \to X$ tramite la relazione

$$\hat{\gamma}\Big((\cos(t), \sin(t))\Big) = \tilde{\gamma}(t) \ .$$

Mostrate che questa è una buona definizione, e che $\hat{\gamma}$ è continua.

Usate l'esercizio 9.113 per mostrare che ogni arco semplice chiuso, se visto equivalentemente come mappa $\hat{\gamma} : S^1 \to X$, è un omeomorfismo con la sua immagine.

Nel seguito useremo mappe periodiche per rappresentare le curve chiuse.

Esercizi

E20.16 Adattate la nozione di equivalenza 20.2 al caso di archi semplici e chiusi, vedendoli però come mappe $\gamma : \mathbb{R} \to X$ continue e periodiche di periodo 1; quali ipotesi richiediamo alle mappe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? [1PK]

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1PM']`

E20.17 `Prerequisiti:20.2,20.13.` Siano γ, δ curve chiuse, ma viste come mappe definite su $\mathbb{R}$ e continue e periodiche di periodo 1. [1PN]

Vediamo una nuova relazione: si ha $\gamma \sim_f \delta$ sse esiste un omeomorfismo crescente $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per cui $\gamma = \delta \circ \varphi$

Mostrate che questa è una relazione di equivalenza.

Confrontatela con la relazione $\sim$.

Soluzione nascosta: `[UNACCESSIBLE UUID '1PP']`

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E20.18 Prerequisiti:20.3,20.14. Siano γ, δ curve chiuse e immerse, ma viste come mappe definite su $\mathbb{R}$ e C^1 e periodiche di periodo 1. [1PQ]

Vediamo una nuova relazione: si ha $\gamma \approx_f \delta$ sse esiste un diffeomorfismo crescente $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per cui $\gamma = \delta \circ \varphi$

Mostrate che questa è una relazione di equivalenza.

Confrontatela con la relazione $\approx$.

E20.19 Prerequisiti:20.3,20.14,20.18. Date un semplice esempio di curve chiuse immerse per cui si ha $\gamma \approx_f \delta$ ma non $\gamma \approx \delta$. [1PR]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1PS']

E20.20 Prerequisiti:20.6.Difficoltà:*. [1PT]

Siano $\gamma, \delta : S^1 \to \mathbb{R}^n$ curve chiuse semplici e immerse e con lo stesso sostegno; poniamo $\hat{\gamma}(t) = \gamma(-t)$: mostrate che o $\gamma \approx_f \delta$ oppure $\hat{\gamma} \approx_f \delta$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1PV']

Altri esercizi riguardo alle curve sono 10.21, 14.24, 16.63 e 23.4; si veda inoltre la Sezione §22.d.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§21 Superfici [1PZ]

Esercizi

E21.1 Prerequisiti: 16.51. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1; sia $\overline{x} \in A$ tale che $f(\overline{x}) = 0$, e $\nabla f(\overline{x}) \neq 0$: per il teorema di funzione implicita 16.51 l'insieme $E = \{f = 0\}$ è un grafico in un intorno di $\overline{x}$, e il piano tangente a questo grafico è l'insieme degli x per cui [1Q0]

$$\langle x - \overline{x}, \nabla f(\overline{x}) \rangle = 0 \ .$$

Confrontate questo risultato col Lemma 7.7.1 negli appunti [3]: "il gradiente è ortogonale agli insiemi di livello" . Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q1']

E21.2 Dato $m > 0$, mostrate che la relazione $xyz = m^3$ definisce una superficie in $\mathbb{R}^3$. Provate che i piani tangenti alla superficie nei punti del primo ottante $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$ formano con i piani coordinati di $\mathbb{R}^3$ un tetraedro di volume costante. [1Q2]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q3']

E21.3 Sia $a > 0$. Mostrare che la relazione $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ definisce una superficie regolare dentro il primo ottante $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Provare che i piani tangenti alla superficie tagliano i tre assi coordinati in tre punti, la somma delle cui distanze dall'origine è costante. [1Q4]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q5']

E21.4 Siano $a > 0, b > 0, c > 0$. Si determini un piano tangente all'ellissoide [1Q8]

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

in un punto con $x, y, z > 0$, in modo che il tetraedro delimitato da questo piano e dai piani coordinati abbia volume minimo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1Q9']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§22 Equazioni differenziali [1QB]

Per poter risolvere i seguenti esercizi sarà necessario conoscere alcuni risultati fondamentali, quali: il Teorema di esistenza e unicità locale [†117],il Lemma di Gronwall; e in generale i metodi per analizzare, risolvere e/o studiare qualitativamente le Equazioni Differenziali. Questi si possono per esempio trovare in [26, 21, 20, 3].

Esercizi

E22.1 Per ogni punto (x, y) del piano con $x, y > 0$ passa un'unica ellissi $4x^2 + y^2 = a$ (con $a > 0$). Descrivete la famiglia di curve che in ogni punto sono ortogonali all'ellisse passante per quel punto. Si veda la figura 7. [1QC]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QF']

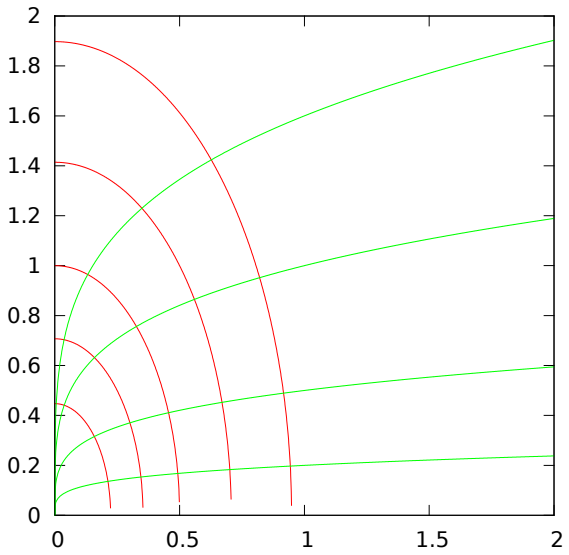


Figura 7: Ellissi (in rosso)e curve a esse ortogonali.

E22.2 Prerequisiti:16.4. [1QH]

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto.

Sia $F : I \times \mathbb{R} \to (0, \infty)$ funzione continua positiva, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile che risolve l'equazione differenziale

$$(f'(x))^2 = F(x, f(x)) \quad .$$

Mostrate allora che x è sempre crescente, nel qual caso si ha $f'(x) = \sqrt{F(x, f(x))}$ per ogni x, oppure è sempre decrescente, nel qual caso si ha $f'(x) = -\sqrt{F(x, f(x))}$; e che dunque f è di classe C^1.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QJ']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

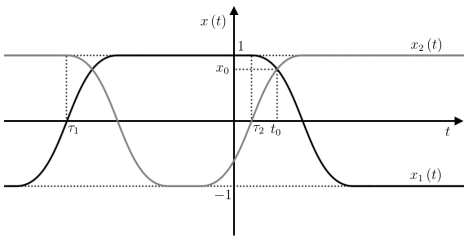


Figura 8: Figura per 22.3

E22.3 Prerequisiti:22.2. [1QK]

Descrivete tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabili che risolvono

$$\forall x\ ,\ (f'(x))^2 + (f(x))^2 = 1\ .$$

Mostrate che se $-1 < f(x) < 1$ per $x \in I$ intervallo aperto allora si ha che f è un arco di sinusoide per $x \in I$.

Mostrate che tutte le soluzioni sono C^1, e che sono C^∞ a tratti.

Vedrete che $f \equiv 1$ e $f \equiv -1$ sono inviluppi delle altre soluzioni, come spiegato nella sezione §22.d.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QM']

E22.4 Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione C^2 tale che $f(0) = f(1) = 0$ e $f'(x) = f(x)f''(x)$ per ogni $x \in [0,1]$. [1QN]

Si provi che la funzione f è identicamente nulla.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QP'][UNACCESSIBLE UUID '1QQ']

§22.a Problemi autonomi

Esercizi

E22.5 Prerequisiti:15.3. Siano dati $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ fissati e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione limitata e continua con $f(x_0) = 0$ ma $f(x) > 0$ per $x \neq x_0$. Vogliamo studiare il problema autonomo [1QR]

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \ , \\ x(t_0) = x_0 \ . \end{cases}$$

Notate che $x \equiv x_0$ è una possibile soluzione. Mostrate che se, per $\varepsilon > 0$ piccolo, [†118]

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{f(y)}\, \mathbb{d}y = \infty \tag{22.6}$$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{1}{f(y)}\, \mathbb{d}y = \infty \tag{22.7}$$

[†117] Anche noto come: teorema di Picard–Lindelöf theorem, o di Cauchy–Lipschitz.
[†118] Se la condizione vale per un $\varepsilon > 0$ allora vale per ogni $\varepsilon > 0$, dato che $f > 0$ lontano da x_0.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

allora $x \equiv x_0$ è l'unica soluzione; mentre in caso contrario esistono molte soluzioni di classe C^1: descrivetele tutte.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QS']

Le condizioni (22.6) e (22.7) sono un caso particolare della *condizione di unicità di Osgood*, si veda Problem 2.25 in [26].

E22.8 Sia $\alpha > 1$ e si consideri l'equazione [1QV]

$$\begin{cases} x'(t) = |x(t)|^\alpha \ , \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ fissati. Mostrate che si ha esistenza e unicità della soluzione; calcolate l'intervallo massimale di definizione; usate il metodo di separazione delle variabili per calcolare esplicitamente le soluzioni. (Essendo la equazione autonoma, si potrebbe assumere che $t_0 = 0$, ma l'esempio risulta forse più chiaro con un t_0 generico).

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QW']

E22.9 Cosa succede nell'esercizio precedente nel caso $\alpha \in (0, 1)$? [1QX]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1QY']

E22.10 Prerequisiti:22.8. Sia $\alpha > 1$ e si consideri di nuovo [1QZ]

$$\begin{cases} x'(t) = |x(t)|^\alpha \ , \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

abbiamo visto in 22.8 che questo ammette una soluzione massimale $x : I_\alpha \to \mathbb{R}$. Fissato $t \in \mathbb{R}$ mostrate che si ha $t \in I_\alpha$ per $\alpha > 1$ vicino a 1, e che $\lim_{\alpha \to 1+} x(t) = e^t$.

Notate che e^t è la unica soluzione di $x'(t) = |x(t)|$ con $x(0) = 1$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1R0']

§22.b Risoluzione

Esercizi

E22.11 Sia data $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua; trovate le $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che risolvono [1R1]

$$\forall x \neq 0 \ , \ f'(x) = \Theta\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

(Sugg. si effettui il cambio di variabili $f(x) = xh(x)$ e si trovi e risolva un'equazione differenziale per $h(x)$.)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1R2']

E22.12 Trovate le soluzioni del problema [1R4]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}$$

con la sostituzione $z = y/x$, e anche confrontandolo col problema

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y}{y} \ .$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§22.c Discussioni qualitative

Per i successivi esercizi può essere utile il seguente semplice lemma di confronto.

Lemma 22.13. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, siano $f, g : U \to \mathbb{R}$ continue con $f \geq g$; sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto con $t_0 \in I$, e siano $x, w : I \to \mathbb{R}$ soluzioni di* [1R7]

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad w(t) = g(t, w(t))$$

con $x(t_0) \geq w(t_0)$: allora $x(t) \geq w(t)$ per $t \geq t_0$. Basta infatti notare che $x'(t) \geq w'(t)$ e dunque $x(t) - w(t)$ è crescente.

(Vi sono versioni molto più raffinate di questo lemma, si veda ad esempio nella sezione 8.6 negli appunti del corso [3]).

Esercizi

E22.14 Discutete le soluzioni di [1R8]

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x) - x)^3 \\ y(0) = a \ . \end{cases}$$

Studiate in modo qualitativo l'esistenza (locale o globale) delle soluzioni, e le proprietà di monotonia e convessità/concavità.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1R9'][UNACCESSIBLE UUID '1RB']

E22.15 Si considera il problema di Cauchy [1RD]

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x)^2 + x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Mostrate che esiste unica la soluzione globale $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che y è limitata e esistono finiti i limiti $\lim_{x \to \infty} y(x)$, $\lim_{x \to -\infty} y(x)$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1RG'][UNACCESSIBLE UUID '1RH']

E22.16 Discutete l'equazione differenziale [1RK]

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x) - x^2} \\ y(0) = a \end{cases}$$

per $a \neq 0$, studiando in modo qualitativo l'esistenza (locale o globale) delle soluzioni, e le proprietà di monotonia e convessità/concavità. †119

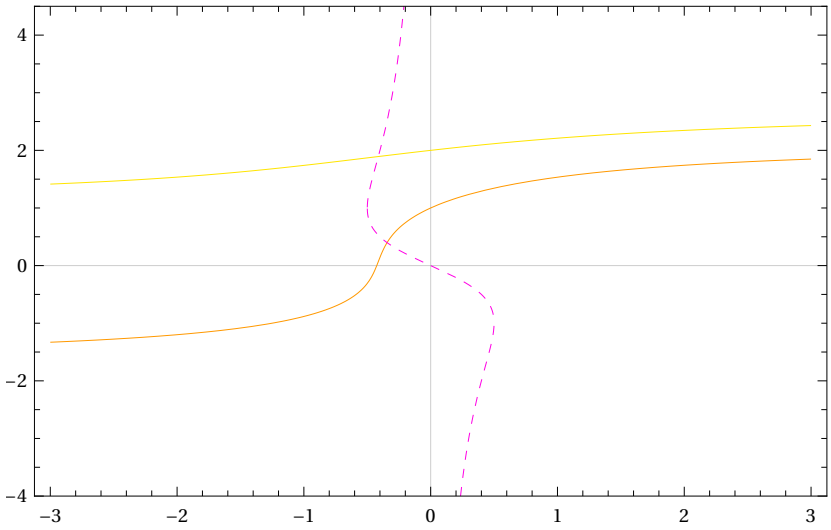
Mostrate che la soluzione esiste per tutti i tempi positivi.

Mostrate che per $a > 0$ la soluzione non si estende a tutti i tempi negativi.

Difficoltà:*. Mostrate che esiste un $\tilde{a} < 0$ critico tale che, per $\tilde{a} < a < 0$ la soluzione non si estende a tutti i tempi negativi, mentre per $a \leq \tilde{a}$ la soluzione esiste per tutti i tempi negativi; inoltre per $a = \tilde{a}$ si ha $\lim_{x \to -\infty} y(x) - x^2 = 0$.

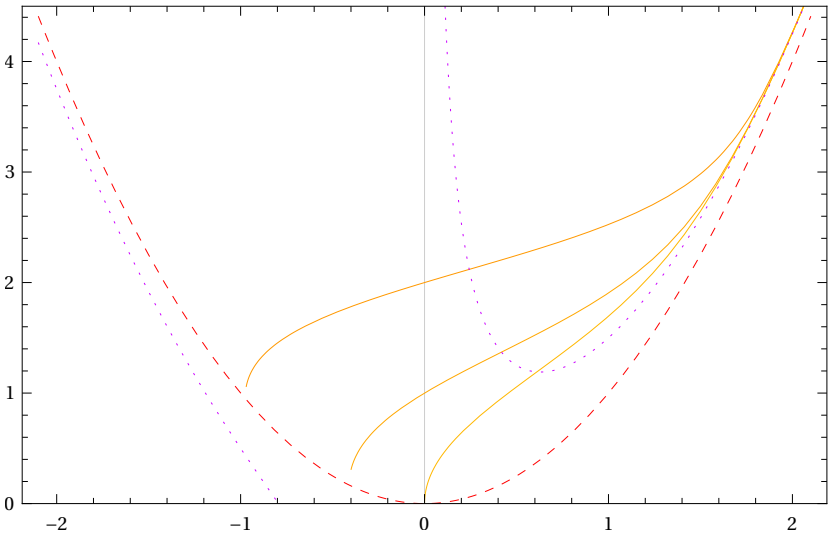
Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1RP']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA



In viola tratteggiato la linea dei flessi. In giallo le soluzioni con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y(0) = 2$.

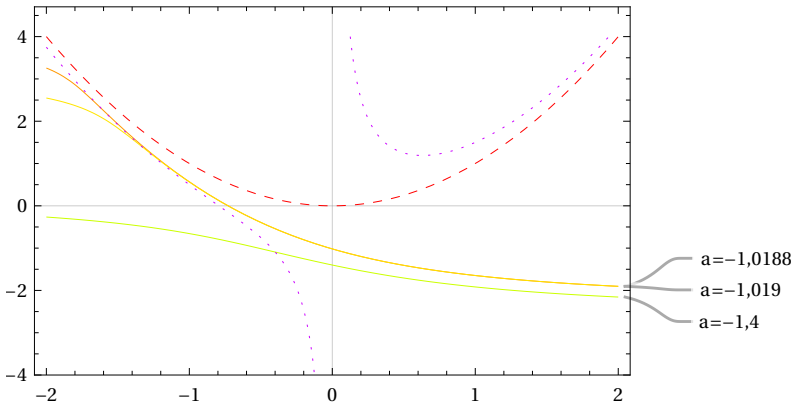
Figura 9: Esercizio 22.15.



In viola a puntini la linea dei flessi. In rosso tratteggiato la parabola dove la derivata della soluzione è infinita. In giallo le soluzioni con dati iniziali $y(0) = 2$, $y(0) = 1$, $y(0) = 1/1000$.

Figura 10: Esercizio 22.16. Soluzioni per $a > 0$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA



In viola a puntini la linea dei flessi. In rosso tratteggiato la parabola dove la derivata della soluzione è infinita. Sono disegnate le soluzioni con dati iniziali $a = -1,4$ ("verde"), $a = -1,0188$ ("arancione")e $a = -1,019$ ("gialla"). Notate che queste ultime si differenziano solo per $0,0002$ come dati iniziali, sono indistinguibili nel grafico per $x > -1$, ma poi per $x < -1$ si allontanano velocemente, e per $x = -2$ valgono rispettivamente $3,25696$ e $2,54856$, con una differenza di circa $0,7$!

Figura 11: Esercizio 22.16. Soluzioni per $a < 0$

E22.17 Note:*Esercizio 4, compito 9 Luglio 2011.*Si dimostri che il problema di Cauchy [1RQ]

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)\big(y(x) - x^2\big) \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y = y(x)$, definita su tutto $\mathbb{R}$ e tale che

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \quad .$$

[†119]L'equazione differenziale è tratta dall'esercizio 13 in [2].

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§22.d Inviluppo

Data una famiglia di curve planari, vogliamo definire la *curva inviluppo*. Vediamo due possibili definizioni.

Definizione 22.18 (Inviluppo di curve)**.** [23Y]

- *Supponiamo che le curve nel piano siano descritte dall'equazione in forma implicita $F(x,y,a)=0$; cioè, fissato il parametro a, la curva è il luogo*

$$\{(x,y) : F(x,y,a)=0\} \quad ;$$

allora l'inviluppo si ottiene ricavando la a dalla equazione $\frac{\partial}{\partial a}F(x,y,a)=0$ e sostituendola nella $F(x,y,a)=0$.

- *Per semplicità, consideriamo curve che sono funzioni dell'ascissa. Sia $y=f(x,a)=f_a(x)$ una famiglia di funzioni, con $x\in I, a\in J$ (intervalli aperti), allora $y=g(x)$* ***è l'inviluppo di*** *f_a se il grafico di g è coperto dall'unione dei grafici delle f_a e la curva g è tangente a ogni f_a laddove la tocca; più precisamente, per ogni $x\in I$ esiste $a\in J$ per cui $g(x)=f(x,a)$, e inoltre, per ogni scelta di a che soddisfa $g(x)=f(x,a)$, si ha $g'(x)=f'(x,a)$.*

Nota 22.19. *La curva inviluppo ha una importante proprietà nel campo delle equazioni differenziali. Supponiamo infatti che $y=f_a(x)$ siano soluzioni della equazione differenziale $\Phi(y',y,x)=0$: allora anche g è soluzione (verifica immediata).* [†120] [240]

Vogliamo vedere che le due precedenti definizioni sono equivalenti, in questo senso.

Esercizi

E22.20 Partiamo dalla prima definizione. Supponiamo di poter applicare il Teorema di Funzione Implicita al luogo [1RV]

$$E_a=\{(x,a) : F(x,y,a)=0\} \quad ;$$

precisamente, supponiamo che in un punto $(\overline{x},\overline{y},\overline{a})$ si abbia che $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$. A questo aggiungiamo anche l'ipotesi $\frac{\partial^2 F}{\partial a a}\neq 0$. Fissato a, si può esprimere E_a localmente come grafico $y=f(x,a)=f_a(x)$. Usiamo inoltre l'ipotesi $\frac{\partial^2 F}{\partial a a}\neq 0$ per esprimere localmente $\frac{\partial F}{\partial a}=0$ come grafico $a=\Phi(x,y)$. Definito $G(x,y)\stackrel{\text{def}}{=}F(x,y,\Phi(x,y))$, mostrate che $G=0$ può essere rappresentato come $y=g(x)$. Mostrate infine che g è l'inviluppo delle curve f_a.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1RW'][UNACCESSIBLE UUID '1RX']

E22.21 Nelle ipotesi precedenti, supponendo che $\frac{\partial F}{\partial y}>0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial a a}>0$, mostrate che il grafico dell'inviluppo g è localmente il "bordo" dell'unione dei grafici delle f_a, nel senso che $g(x)\geq f_a(x)$ con uguaglianza per un solo a. [1RY]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1RZ'][UNACCESSIBLE UUID '1SO']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E22.22 Note:*Dal testo [20], a pg 84.*.Consideriamo le curve [1S1]

$$y = f(x,a) = ax + \frac{a^2}{2}$$

- Trovate un equazione differenziale risolta da tutte le curve. *(Sugg. Si elimini a dal sistema $y = f, y' = \frac{\partial}{\partial x} f$. Il risultato può essere lasciato in forma non normale.)*
- Calcolate l'inviluppo; verificate che soddisfa la equazione differenziale prima ottenuta.

Si veda anche la figura 12. *Soluzione nascosta:* [UNACCESSIBLE UUID '1S2']

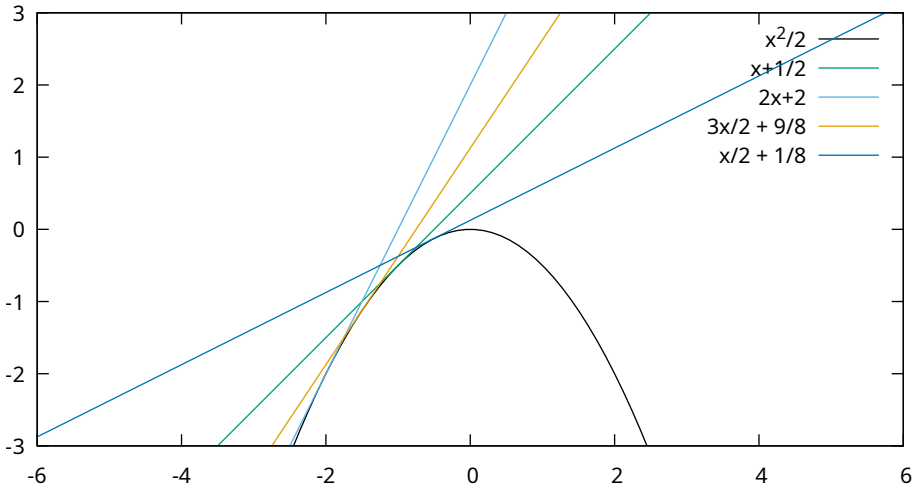


Figura 12: Soluzione di 22.22: inviluppo.

E22.23 Consideriamo le ellissi $ax^2 + y^2/a = 2$ (con $a > 0$). [1S4]

- Trovate la regione del piano coperta da queste ellissi.
- Mostrate che il bordo di questa regione è l'inviluppo delle ellissi, e descrivetelo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1S5'][UNACCESSIBLE UUID '1S6']

E22.24 Consideriamo le rette $ax + y/a = 1$ (con $a > 0$). [1S7]

- Trovate la regione del primo quadrante coperta da queste rette.
- Mostrate che il bordo di questa regione è l'inviluppo delle rette e descrivetelo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1S8']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E22.25 Consideriamo le rette [1S9]

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{1-a} = 1$$

con $x, y, a \in (0, 1)$. Descrivete la curva inviluppo.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SB']

[†120]Con le equazioni in forma normale però questa nozione non è interessante perché si ha unicità locale e allora non vi possono essere soluzioni speciali; cioè se $g = f_a$ $g' = f'_a$ in un punto x allora coincidono in un intorno.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§22.e Equazioni lineari (a coefficienti costanti)

Definizione 22.26. *Indichiamo formalmente con D l'operazione* "calcolo della derivata". *Dato un polinomio* $p(x)$ [23Z]

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

(che ha coefficienti $a_i \in \mathbb{C}$*, costanti) costruiamo formalmente l'operatore lineare*

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots a_1 D + a_0$$

che trasforma una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *di classe* C^{n+k} *nella funzione* $p(D)f$*, di classe almeno* C^k*, definita puntualmente da*

$$[p(D)f](x) \stackrel{def}{=} a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \dots a_1 f'(x) + a_0 f(x) \quad .$$

Esercizi

E22.27 Dati due polinomi $p(x), q(x)$ e il polinomio prodotto $r(x) = p(x)q(x)$, mostrate che $p(D)[q(D)f] = r(D)f$ [1SC]

E22.28 Posta $f(x) = e^{\lambda x}$, notate che [1SD]

$$[p(D)f](x) = p(\lambda)f(x) \quad .$$

Possiamo dunque considerare gli esponenziali $e^{\lambda x}$ come autovettori di $p(D)$, con autovalore $p(\lambda)$.

E22.29 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^n, sia $\theta \in \mathbb{C}$ costante e sia $g(x) = e^{\theta x} f(x)$. Mostrate che, se p è un polinomio e $q(x) = p(x + \theta)$, allora [1SF]

$$p(D)g = e^{\theta x}[q(D)f] \quad .$$

Notate che possiamo scrivere la relazione anche come un "coniugio"

$$e^{-\theta x}\big[p(D)[e^{\theta x} f]\big] = p(D + \theta)f \, .$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SG']

E22.30 Prerequisiti:22.29. Dati $\theta \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$, posto $p(x) = (x - \theta)^k$, mostrate che $p(D)f = 0$ se e solo se $f(x) = e^{\theta x} r(x)$ con r polinomio di grado al più $k - 1$. [1SH]

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SJ']

E22.31 Prerequisiti:15.1, 22.29. [1SK]

Siano dati $\theta, \tau \in \mathbb{C}$ con $\theta \neq \tau$, $q(x)$ un polinomio, e $k \in \mathbb{N}$; poniamo $p(x) = (x-\theta)^k$. Mostrate che

$$p(D)f(x) = e^{\tau x} q(x)$$

se e solo se

$$f(x) = e^{\theta x} r(x) + e^{\tau x}\tilde{q}(x) \, ,$$

con r polinomio di grado al più $k - 1$ e $\tilde{q}$ polinomio dello stesso grado di q.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SM']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E22.32 Dati $a_0 \dots a_n \in \mathbb{C}$ costanti, con $a_n \neq 0$, e posto $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$, descrivete tutte le possibili soluzioni f di [1SN]

$$p(D)f = 0\,.$$

Mostrate che lo spazio delle soluzioni è uno spazio vettoriale (basato sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi) di dimensione n.

(Sugg. fattorizzate il polinomio e sfruttate gli esercizi precedenti.).

E22.33 Prerequisiti:22.32.Con p come sopra, analizzate inoltre il problema [1SP]

$$p(D)f = e^{\alpha x}$$

(con $\alpha \in \mathbb{C}$ costante).

Cosa succede quando α si avvicina a una radice del polinomio p?

[UNACCESSIBLE UUID '1SQ']Dati i parametri $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$, e anche $\alpha \in \mathbb{C}$, la soluzione del problema di Cauchy [1SR]

$$\begin{cases} p(D)f = e^{\alpha x} \\ f(0) = y_0, \\ \dots \\ f^{n-1}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

esiste per tutti i tempi, e dipende con continuità dai parametri $\alpha, y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$.

E22.34 Data $h = h(x)$, e $\theta \in \mathbb{R}$, risolvete le equazioni differenziali [1SS]

$$(D - \theta)f(x) = h(x)$$

$$(D - \theta)^2 f(x) = h(x)$$

$$(D^2 + \theta^2)f(x) = h(x)$$

$$(D^2 - \theta^2)f(x) = h(x)$$

e i casi particolari

$$(D - 1)f(x) = x^k$$

$$(D - \theta)f(x) = e^{\alpha x}$$

(con $\alpha \in \mathbb{C}$, e $k \in \mathbb{N}$, costanti).

Soluzione nascosta: *[UNACCESSIBLE UUID '1SV']*

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§22.f Equazioni matriciali

Per risolvere i seguenti esercizi bisogna conoscere le proprietà elementari dell'esponenziale di matrici, si veda in sezione §18.c.

Esercizi

E22.35 Prerequisiti:18.24,18.23, Sezione §18.c. [1SW]

Date $A, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ funzioni continue a valori matrici, risolvete l'equazione differenziale

$$X' = AX + F \ , X(0) = C \ ,$$

dove $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$.

(Sugg.: usate il metodo di variazione delle costanti: sostituite $Y(t) = \exp(-tA)X(t)$)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SX']

E22.36 Prerequisiti:18.24,18.23, Sez. §18.c.Difficoltà:*. [1SY]

Date matrici $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, risolvete l'equazione differenziale

$$X' = AX + XB \ , X(0) = C \ ,$$

dove $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1SZ']

E22.37 Prerequisiti:11.35,11.44.Difficoltà:*. [1T1]

Sia $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ lo spazio delle matrici, lo dotiamo di una norma $\|C\|_V$ submoltiplicativa. Sia $C \in V$ e siano $A, B : \mathbb{R} \to V$ curve continue nello spazio delle matrici.

- Definite ricorsivamente $Q_0 = C$, e

$$Q_{n+1}(s) = \int_0^s A(\tau)Q_n(\tau)B(\tau)\,\mathbb{d}\tau \quad ;$$

mostrate che la serie

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t)$$

è ben definita, mostrando che, per ogni $T > 0$, converge totalmente nello spazio delle funzioni continue $C^0 = C^0([-T, T] \to V)$, dotato della norma

$$\|Q\|_{C^0} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|t|\le T} \|Q(t)\|_V \quad .$$

- Mostrate che la funzione appena definita è la soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t)B(t) \quad , \quad Y(0) = C \ .$$

- Nel caso in A, B siano costanti, notate che

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{A^n C B^n}{n!} \quad .$$

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1T2']

E22.38 Prerequisiti:22.37,22.38.Note:*Identità di Abel.* [1T3]

Siano date $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ continua, e la soluzione $Y(t)$ dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t) \quad , \quad Y(0) = C$$

(che è stata studiata in 22.37). Posto $a(t) = \mathrm{tr}(A(t))$, mostrate che

$$\det(Y(t)) = \det(C)e^{\int_0^t a(\tau)\,\mathbb{d}\tau} \quad .$$

Se C è invertibile se ne deduce che $Y(t)$ è sempre invertibile.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1T4']

E22.39 Prerequisiti:18.24,18.23,22.37. [1T6]

Siano date $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $F, A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ continue, e la soluzione $Y(t)$ della equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t) \quad , \quad Y(0) = \mathrm{Id} \ .$$

Risolvete la equazione

$$X' = AX + F \ , X(0) = C \ ,$$

dove $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, usando $Y(t)$ come funzione ausiliaria.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1T7']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

§23 (pseudo)compit(in)i [1T8]

Esercizi

E23.1 Note:*rielaborato dal compito 26 Gennaio 2016.* [1T9]

Sia $(q_n)_{n\geq 1}$ una enumerazione dei razionali di $(0,1)$ e definiamo

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\,:\,q_n<t} 2^{-n}$$

e

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\,:\,q_n\leq t} 2^{-n}$$

per $t \in (0,1)$.

- Mostrate che f, g sono strettamente crescenti.
- Calcolate i limiti per $t \downarrow 0$ e $t \uparrow 1$.
- Mostrate che f è continua a sinistra, g è continua a destra, e che

$$\lim_{\tau\to t+} f(\tau) = g(t) \quad , \quad \lim_{\tau\to t-} g(\tau) = f(t) \quad .$$

- Mostrate inoltre che f è discontinua in t se e solo se $t \in \mathbb{Q}\cap(0,1)$; e similmente per g.
- Cosa cambia se sostituiamo 2^{-n} con il termine a_n di una serie assolutamente convergente?

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1TB'][UNACCESSIBLE UUID '1TC']

E23.2 Prerequisiti:13.9.Note:*compito 23 giugno 2012.* [1TD]

Sia f una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}$, con $f(0) \neq 0$. Si dimostri che esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che i due vettori

$$v = (x, f(x)) \quad , \quad w = (-f'(x), 1)$$

siano linearmente dipendenti. (Notate che il vettore w è ortogonale al tangente al grafico di f.) Si discuta la possibilità che questa condizione sia verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1TF']

E23.3 Note:*riadattati dal compitino 9 apr 2011.* [1TG]

Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty \quad .$$

- Fissato $a < f(0)$ sia M_a l'insieme degli $m \in \mathbb{R}$ tali che la retta $y = mx + a$ intersechi il grafico $y = f(x)$ della funzione f in almeno un punto: si mostri che M_a ammette minimo $\hat{m} = \hat{m}(a)$;
- si mostri che $\hat{m}$ dipende in modo continuo da a, [†121]
- e che $\hat{m}(a)$ è monotona strettamente decrescente.

[†121] Suggerimento: ripensate all'esercizio 13.9.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- Se f è derivabile, si mostri che la retta $y = \hat{m}(a)x + a$ è tangente al grafico in tutti i punti in cui lo incontra.
- Supponiamo ulteriormente che f sia di classe C^2 e che $f''(x) > 0 \forall x > 0$ [†122]. Si mostri che vi è un unico punto x in cui la retta $y = \hat{m}(a)x + a$ incontra il grafico $y = f(x)$; lo chiamiamo $\hat{x} = \hat{x}(a)$;
- e mostrate che le funzioni $a \mapsto \hat{x}(a)$ e $a \mapsto \hat{m}(a)$ sono derivabili.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1TH']

E23.4 Argomenti:cerchio osculatore. Note:*riadattati dal compitino 9 apr 2011.* [1TJ]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in 0, con $f(0) = 0$ e $f''(0) \neq 0$. Si dimostri che esistono unici un punto $P = (a, b)$ nel piano e una costante $r > 0$, tali che

$$d\big(P, (x, f(x))\big) = r + o(x^2),$$

determinando a, b, r in funzione di $f'(0), f''(0)$. Si intende che $d(P, Q)$ è la distanza euclidea fra due punti P, Q nel piano.

Sugg. per chiarirvi le idee, provate innanzitutto il caso in cui anche $f'(0) = 0$.

(Il grafico della funzione f è una curva nel piano; per ipotesi questa curva passa per l'origine; in questo esercizio abbiamo determinato il cerchio, di raggio r e centro P, che meglio approssima la curva nelle vicinanze dell'origine: questo cerchio è detto "cerchio osculatore", e il suo raggio si chiama "raggio di curvatura", e l'inverso del raggio è la "curvatura" della curva nell'origine.)

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1TK'][UNACCESSIBLE UUID '1TM']

E23.5 Note:*Esercizio 2, Compito 4 Aprile 2009.* [1TN]

- Si verifichi che per ogni $t > 1$ l'equazione

$$\sin x = x^t$$

  ammette una e una sola soluzione $x > 0$.
- Chiamata $f(t)$ tale soluzione, si determini l'immagine della funzione t e si dimostri che è strettamente crescente e continua su $(1, +\infty)$.
- Si dimostri che f si prolunga per continuità a $t = 1$ e si discuta l'esistenza della derivata destra della funzione prolungata in tale punto.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1TP']

E23.6 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\cos(f(x))$ è derivabile: se ne può dedurre che f è derivabile? *Se è vero, dimostratelo; se non è vero, producete un esempio.* [1TS]

E23.7 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f > 0$ e tale che $\log(f(x))$ è convessa: se ne può dedurre che f è convessa? *Se è vero, dimostratelo; se non è vero, producete un esempio.* [1TT]

E23.8 Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, con $g > 0$: mostrate che f/g è di classe C^∞. [1TV]

E23.9 Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza $\rho > 0$, e sia $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$; si mostri che la funzione $g(x) = f(x)/x^n$ è estendibile a $x = 0$; si mostri (l'estensione di) g coincide con una opportuna serie di potenze $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Cosa si può dire del raggio di convergenza di g? [1TW]

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

E23.10 Note:*Criterio di Dirichlet per gli integrali.* [1TX]

Siano $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continue, e inoltre f positiva e monotona decrescente con $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, mentre

$$\sup_{x>0} \left| \int_0^x g(t)\, \mathbb{d}t \right| < \infty \quad .$$

Dimostrate allora che

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)g(t)\, \mathbb{d}t$$

converge.

E23.11 Note:*compitino 12/1/2013.* [1TY]

Dato un sottoinsieme E di $\mathbb{N}$ e un intero $n \in \mathbb{N}$, l'espressione

$$\frac{\text{card}(E \cap \{0, 1, ..., n\})}{n+1}$$

indica quale frazione del segmento $\{0, 1, ..., n\}$ è contenuta in E. La nozione di "densità" in $\mathbb{N}$ di E è riferita al comportamento di tali frazioni al tendere di n all'infinito. Precisamente, si definiscono la densità superiore $\overline{d}(E)$ di E e la sua densità inferiore $\underline{d}(E)$ come

$$\overline{d}(E) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\text{card}(E \cap \{0, 1, ..., n\})}{n+1} \quad ,$$

$$\underline{d}(E) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\text{card}(E \cap \{0, 1, ..., n\})}{n+1} \quad .$$

Se $\overline{d}(E) = \underline{d}(E) = d \in [0, 1]$, si dice che E ha densità d. (Si veda anche [59].)

1. Si dimostri che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1$, l'insieme $E_\alpha = [n\alpha] : n \in N$ ha densità $d = 1/\alpha$ (il simbolo $[x]$ indica la parte intera di $x \in R$).
2. Sia $E = \{m_0, m_1, ..., m_k, ...\}$ un insieme infinito, con $m_0 < m_1 < ... < m_k < ....$ Si dimostri che $\overline{d}(E) = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{m_k}$ e $\underline{d}(E) = \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{m_k}$.
3. Si trovi un insieme E con $\overline{d}(E) = \overline{d}(\mathbb{N} \setminus E) = 1$.

E23.12 Note:*esercizio 6 nel compito del 13/1/2011.* [1TZ]

Ogni numero intero $n \geq 1$ si decompone in modo unico come $n = 2^k d$, con $k \in N$ e d intero dispari. Si consideri la successione $a_n = d/2^k$ e se ne determinino

1. limite superiore e inferiore;
2. l'insieme dei punti limite.

E23.13 Argomenti:matrice, determinante. Note:*esercizio 4 nello pseudocompitino del 14/3/2013.* [1VO]

1. Sia $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ una matrice 2 per 2; identificando $\mathbb{R}^{2\times2}$ con $\mathbb{R}^4$, si calcoli il gradiente del determinante e si verifichi che è nonnullo se e solo se la matrice è non nulla.
2. Sia Z l'insieme delle matrici $\mathbb{R}^{2\times2}$ con determinante nullo; mostrate che è un chiuso con parte interna vuota.

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1V1']

E23.14 Argomenti:matrice,determinante.Difficoltà:*. [1V2]

Dimostrate la formula di Jacobi:

$$\frac{d}{da_{i,j}} \det(A) = C_{i,j} \quad ,$$

dove $a_{i,j}$ è l'elemento di A in riga i e colonna j, e C è la matrice dei cofattori di A, che è la trasposta della matrice aggiunta adj(A). Conseguentemente, se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ è differenziabile, allora

$$\frac{d}{dt} \det F(t) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(F(t)) \frac{dF(t)}{dt}\right)$$

dove tr(X) è la traccia di X.

Sugg. usate lo sviluppo di Laplace per il determinante.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1V3']

E23.15 Argomenti:matrice,determinante.Prerequisiti:23.14.Difficoltà:*. [1V4]

Vogliamo generalizzare i risultati del precedente esercizio 23.13 al caso di matrici $n \times n$.

Ricordiamo le seguenti proprietà del determinante delle matrici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Il rango è la dimensione dell'immagine di A (vista come applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$) ed è anche il massimo numero di colonne linearmente indipendenti in A.
- A ha rango n se e solo $\det(A) \neq 0$.
- Se si scambiano due colonne in A, il determinante cambia di segno;
- se si somma a una colonna un multiplo di un altra colonna il determinante non cambia.
- La caratterizzazione del rango tramite i minori, *«Il rango di A è pari al massimo ordine di un minore invertibile di A»*.
- lo sviluppo di Laplace del determinante, e la formula di Jacobi (*cf* 23.14).
- Il determinante di A è uguale al determinante della trasposta; dunque ogni risultato precedente vale se si legge "riga" invece di "colonna".

Si vedano anche [62, 55].

Mostrate i seguenti risultati.

1. Mostrate che il gradiente della funzione $\det(A)$ è nonnullo se e solo se il rango di A è almeno $n - 1$.
2. Sia Z l'insieme delle matrici $\mathbb{R}^{n\times n}$ con determinante nullo; mostrate che è un chiuso con parte interna vuota.
3. Sia B una matrice fissata di rango al più $n - 2$, mostrate che la tesi del teorema è falsa negli intorni U_B della matrice B, nel senso che $Z \cap U_B$ non è contenuto in una superfice[†123].

[†122] Usate l'esercizio 23.2 precedente!

[†123] Non vi scervellate, è più facile di quello che sembra… ci sono troppe matrici con determinante nullo vicino a B…

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1V6']

E23.16 Si mostri la disuguaglianza di Young: dati $a, b > 0$, $p, q > 1$ tali che $1/p + 1/q = 1$ allora [1V7]

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{23.17}$$

con uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$; usando un opportuno studio di funzione.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1V8']

Si veda anche 14.50.

E23.18 Determinare fra i triangoli iscritti nel cerchio unitario quello di area massima. [1Q6]

§23.a Equazioni funzionali

Esercizi

E23.19 Note:*esercizio 1, compito 7 Giugno 2010.* [1V9]

Si dimostri che esiste una e una sola funzione continua f sull'intervallo $[-1, 1]$ tale che

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} f(x^2) \quad \forall x \in [-1, 1] \quad .$$

Si dimostri che f è rappresentabile come serie di potenze centrata in zero; e che il raggio di convergenza è uno.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1VB']

E23.20 Difficoltà:*.Note:*eserizio 3, compito 30 Giugno 2017.* [1VC]

Si consideri il problema (non di Cauchy)

$$\begin{cases} y'(x) = y(x^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Si dimostri che per ogni $r < 1$ esiste un'unica soluzione definita su $I = (-r, r)$ e si deduca che lo stesso vale per $r = 1$.
- Si dimostri che la soluzione è rappresentabile come somma di una serie di potenze centrata in 0 e convergente sull'intervallo $[-1, 1]$.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1VD']

E23.21 Note:*esercizio 3 compito 23 Giugno 2012.* [1VF]

Si dimostri che esiste una e una sola funzione f continua sull'intervallo $[0, 1]$ che soddisfi la condizione

$$f(x) = \sin(x) + \int_0^1 \frac{f(t)}{x^2 + t^2 + 1} \, \mathbb{d}t \quad \forall x \in [0, 1] \quad .$$

E23.22 Note:*esercizio 4 compito 23 Giugno 2012.* [1VG]

Una funzione $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$, analitica in un intorno di 0, soddisfa sul suo dominio le condizioni

$$\begin{cases} f'(x) = 1 + f(-x) \\ f(0) = c \end{cases} ;$$

(si noti che questo non è un problema di Cauchy!).

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

- Si determini f.
- Si dimostri che la funzione trovata è l'unica soluzione, nell'insieme delle funzioni derivabili in un intorno di 0.

E23.23 [1VH]

- Mostrate che esiste una unica funzione $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ continua che soddisfa

$$f(x) = x\cos(f(x)) \ .$$

- Fissati a, b mostrate che esistono un numero finito di $f : (-a,b) \to \mathbb{R}$ continue soddisfacenti

$$f(x) = x\cos(f(x)) \ \ \forall x \in (a,b).$$

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1VJ']

§23.b Campi vettoriali [1PW]

Esercizi

E23.24 Note:*esercizio 4, compito 20 Giugno 2017.* [1PX]

Sia F un campo vettoriale continuo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tale che, per ogni $x \neq 0$, $F(x)$ è un multiplo scalare di x. Per $r > 0$, indichiamo con S_r la sfera di raggio r centrata in 0.

- Si dimostri che, per ogni arco regolare γ con sostegno contenuto in una sfera S_r , si ha $\int_\gamma F = 0$.
- Si dimostri che, se un tale campo F è conservativo, allora $|F(x)|$ è costante su ogni sfera S_r, e dunque che $F(x) = x\rho(|x|)$ con $\rho : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continua.

Soluzione nascosta: [UNACCESSIBLE UUID '1PY']

Copyright A. C. G. Mennucci
Le sezioni di teoria (e enunciati di esercizi) sono rilasciate con Licenza WP:CC BY-SA

UUID

009, 3
00B, 4
00C, 6
00D, 6
00G, 7
00J, 8
00K, 8
00N, 9
00Q, 10
00R, 11
00S, 12
00T, 12
00V, 12
00X, 12
00Z, 13
011, 13
013, 13
014, 17
016, 13
018, 70
019, 70
01C, 70
01F, 71
01G, 71
01J, 16
01M, 18
01N, 20
01P, 38
01R, 21
01W, 21
01Y, 21
020, 21
022, 21
023, 20
024, 21
026, 17
028, 19
029, 20
02C, 24
02D, 22
02F, 92
02H, 22
02K, 22
02M, 23
02S, 51
02T, 51
02W, 51
02Y, 51
030, 51
031, 52
032, 52
034, 52
036, 52
038, 52
03C, 52
03F, 52
03H, 52
03M, 53
03P, 53
03R, 53
03V, 53
03X, 53
03Y, 53
040, 53
043, 53
045, 53
048, 54
04B, 54
04D, 54
04G, 54
04J, 54
04M, 54
04P, 54
04R, 54
04V, 55
04X, 55
04Z, 55
051, 55
053, 55
055, 55
057, 56
059, 173
05J, 56
05M, 56
05R, 56
05S, 56
05T, 57
05V, 57
05X, 57
05Z, 57
060, 58
063, 58
064, 58
065, 58
067, 27
069, 27
06C, 28
06F, 28
06J, 28
06M, 28
06N, 28
06P, 29
06Q, 29
06S, 29
06V, 29
06X, 29
06Y, 29
06Z, 30
070, 30
071, 30
072, 31
073, 31
074, 31
076, 31
078, 31
07B, 31
07C, 32
07D, 32
07F, 32
07H, 32
07K, 32
07N, 33
07R, 47
07S, 47
07T, 49
07V, 33
07W, 47
07X, 47
07Z, 49
080, 49
082, 49
084, 49
086, 49
089, 49
08C, 49
08F, 49
08H, 50
08K, 50
08M, 50
08P, 50
08T, 80
08V, 75
08X, 35
08Y, 35
08Z, 61
090, 62
091, 36
092, 36
093, 37
095, 37
097, 37
09G, 38
09J, 38
09K, 38
09N, 59
09Q, 59
09S, 122
09T, 122
09X, 77
09Y, 77
0B0, 78
0B2, 78
0B3, 79
0B4, 79
0B5, 81
0B6, 81
0B7, 82
0B9, 82
0BC, 82
0BF, 82
0BG, 79
0BH, 83
0BJ, 83
0BK, 84
0BM, 85
0BN, 86
0BP, 86
0BQ, 86
0BS, 87
0BT, 87
0BV, 87
0BW, 87
0BY, 87
0C1, 88
0C3, 88
0C5, 88
0C7, 88
0C8, 88
0C9, 89
0CB, 89
0CC, 89
0CD, 89
0CF, 89
0CH, 89
0CK, 89
0CN, 90
0CP, 90
0CQ, 90
0CR, 90
0CS, 90
0CV, 90
0CX, 90
0D0, 91
0D2, 91
0D4, 91
0D6, 91
0D9, 92
0DD, 92
0DJ, 92
0DK, 94
0DN, 94
0DQ, 48
0DR, 96
0DW, 97
0DY, 97
0F0, 98
0F1, 95
0F2, 98
0F4, 98
0F5, 98
0F7, 98
0F8, 98
0F9, 99
0FH, 100
0FJ, 100
0FK, 100
0FM, 100
0FP, 100
0FR, 101
0FS, 101
0FT, 102
0FV, 102
0FW, 102
0FX, 102
0FZ, 103
0G0, 103
0G3, 103
0G5, 104
0G6, 104
0G7, 104
0G8, 104
0G9, 104
0GB, 104
0GC, 104
0GD, 104
0GF, 105
0GH, 105
0GJ, 105
0GM, 105
0GQ, 105
0GS, 106
0GW, 106
0GX, 106
0GY, 106
0GZ, 106
0H0, 106
0H1, 107
0H3, 107
0H5, 107
0H7, 107
0H9, 107
0HD, 107
0HG, 107
0HJ, 107
0HM, 108
0HP, 108
0HR, 108
0HS, 108
0HT, 108
0HW, 109
0HY, 109
0J1, 109
0J3, 109
0J4, 110
0J5, 110
0J6, 110
0J8, 110
0JB, 110
0JD, 110
0JF, 111
0JG, 111
0JH, 111
0JK, 111
0JN, 121
0JQ, 112
0JT, 112
0JV, 112
0JY, 112
0K0, 112
0K4, 112
0K5, 113
0K6, 113
0K7, 113
0K8, 113
0KB, 113
0KC, 114
0KD, 114
0KG, 114
0KK, 115
0KM, 115

0KQ, 115
0KS, 115
0KV, 116
0KX, 116
0KZ, 116
0M1, 116
0M3, 116
0M5, 116
0M7, 115
0M9, 117
0MC, 118
0MD, 118
0MF, 118
0MH, 118
0MM, 118
0MP, 119
0MR, 123
0MS, 123
0MT, 123
0MV, 123
0MW, 123
0MX, 123
0MZ, 124
0N1, 124
0N3, 124
0N5, 124
0N6, 124
0N8, 124
0NB, 28
0NC, 124
0NF, 124
0NG, 125
0NH, 125
0NM, 125
0NN, 63
0NQ, 125
0NW, 125
0NX, 125
0NZ, 126
0P1, 126
0P3, 126
0P5, 126
0P6, 126
0P8, 126
0PB, 126
0PD, 127
0PG, 127
0PJ, 127
0PM, 127
0PP, 127
0PQ, 127
0PR, 127
0PS, 127
0PT, 128
0PY, 128
0Q0, 128
0Q3, 128
0Q5, 128
0Q7, 128
0Q8, 129
0QC, 129
0QF, 129
0QJ, 129
0QM, 129
0QN, 130
0QP, 130
0QR, 130
0QS, 130
0QV, 130
0QX, 131
0QY, 131
0QZ, 131
0R2, 131
0R3, 132
0R5, 132
0R8, 132
0R9, 132
0RC, 133
0RG, 133
0RH, 134
0RK, 134
0RP, 134
0RR, 134
0RT, 134
0RY, 134
0S0, 134
0S2, 134
0S4, 134
0S6, 135
0S8, 135
0SB, 135
0SD, 135
0SG, 135
0SM, 135
0SN, 135
0SQ, 136
0SV, 136
0T0, 136
0T3, 136
0T4, 136
0T5, 136
0T7, 136
0T9, 136
0TD, 136
0TG, 137
0TH, 137
0TK, 137
0TM, 137
0TP, 137
0TQ, 137
0TT, 137
0TW, 137
0TZ, 138
0V3, 138
0V4, 138
0V6, 138
0V8, 138
0VB, 138
0VC, 138
0VD, 138
0VG, 139
0VJ, 139
0VP, 139
0VR, 139
0VS, 139
0VT, 140
0VV, 140
0VW, 140
0VX, 140
0VZ, 140
0W1, 140
0W3, 141
0W6, 135
0W9, 141
0WB, 141
0WC, 141
0WD, 141
0WG, 141
0WJ, 141
0WM, 142
0WN, 142
0WP, 142
0WR, 142
0WT, 142
0WW, 142
0WY, 142
0X0, 142
0X1, 142
0X2, 143
0X4, 143
0X6, 143
0X8, 143
0XC, 143
0XF, 143
0XG, 143
0XH, 144
0XM, 144
0XQ, 144
0XT, 144
0XW, 144
0XY, 144
0Y0, 144
0Y3, 145
0Y4, 145
0Y5, 145
0Y7, 145
0Y9, 145
0YB, 145
0YD, 146
0YF, 146
0YH, 147
0YJ, 147
0YK, 147
0YN, 147
0YQ, 147
0YS, 147
0YV, 147
0YX, 148
0YZ, 148
0Z1, 148
0Z3, 148
0Z7, 149
0ZB, 149
0ZD, 149
0ZG, 149
0ZJ, 149
0ZM, 149
0ZP, 150
0ZR, 150
0ZT, 151
0ZV, 151
0ZW, 151
0ZX, 151
0ZY, 151
0ZZ, 151
100, 2
105, 152
106, 152
107, 152
109, 152
10C, 153
10D, 153
10F, 153
10J, 153
10M, 153
10P, 153
10Q, 154
10S, 154
10V, 154
10X, 154
10Y, 154
110, 154
111, 154
112, 155
114, 155
116, 155
117, 155
118, 155
11B, 156
11C, 156
11D, 156
11F, 156
11G, 156
11H, 156
11J, 156
11K, 156
11M, 156
11N, 157
11P, 157
11R, 157
11S, 157
11T, 157
11W, 157
11Y, 157
120, 157
122, 157
124, 158
125, 158
127, 158
129, 158
12C, 158
12F, 158
12G, 159
12J, 159
12M, 159
12P, 159
12R, 159
12T, 159
12W, 159
12Y, 159
130, 160
132, 160
137, 161
138, 161
139, 161
13C, 161
13D, 161
13G, 162
13J, 162
13M, 162
13P, 162
13R, 162
13T, 162
13W, 163
13Y, 163
13Z, 163
141, 163
142, 164
143, 164
144, 164
145, 164
146, 164
147, 164
148, 164
14B, 164
14D, 165
14F, 165
14J, 166
14K, 166
14M, 166
14N, 166
14P, 166
14R, 166
14T, 166
14W, 167
14Y, 167
150, 167
151, 167
152, 167
155, 167
156, 167
15C, 168
15F, 168
15J, 168
15M, 169
15P, 169
15R, 169
15T, 169
15W, 169
15Z, 169
161, 169
162, 170
163, 170
164, 170
165, 170
166, 170
167, 170
169, 170
16D, 170
16F, 170
16G, 35
16J, 171
16K, 171
16N, 171
16Q, 171
16S, 171
16V, 172
16W, 172
16X, 172
16Y, 172
16Z, 172
170, 173
172, 173
174, 173

176, 173
178, 173
17B, 173
17D, 173
17H, 174
17J, 174
17M, 174
17P, 175
17R, 175
17T, 175
17W, 175
17Y, 175
17Z, 175
180, 175
181, 175
182, 176
183, 176
184, 176
186, 176
188, 176
18B, 176
18C, 177
18F, 177
18H, 177
18J, 177
18K, 177
18M, 177
18P, 178
18R, 178
18T, 178
18W, 178
18Y, 178
18Z, 178
191, 179
192, 179
194, 179
196, 179
198, 179
19B, 179
19C, 180
19D, 180
19F, 180
19G, 180
19K, 181
19M, 181
19Q, 181
19S, 181
19V, 181
19Y, 181
1B0, 182
1B1, 51
1B3, 182
1B4, 182
1B6, 182
1B8, 182
1B9, 182
1BC, 182
1BF, 182
1BG, 183
1BJ, 183
1BM, 183
1BN, 183
1BP, 183
1BR, 183
1BT, 184
1BW, 184
1BX, 184
1BZ, 184
1C0, 184
1C2, 184
1C3, 185
1C4, 185
1C5, 186
1C6, 186
1C8, 186
1CB, 186
1CD, 186
1CG, 187
1CJ, 187
1CM, 187
1CP, 187
1CV, 187
1CX, 187
1CZ, 187
1D1, 187
1D4, 187
1D7, 187
1D9, 188
1DD, 188
1DG, 188
1DJ, 188
1DM, 189
1DR, 189
1DT, 189
1DW, 189
1DZ, 190
1F1, 190
1F4, 190
1F6, 199
1F7, 190
1F9, 190
1FB, 190
1FC, 191
1FD, 191
1FF, 191
1FG, 192
1FJ, 192
1FM, 193
1FP, 193
1FR, 193
1FT, 193
1FX, 193
1FZ, 194
1G2, 194
1G4, 194
1G6, 194
1G8, 194
1GB, 195
1GD, 195
1GF, 195
1GJ, 196
1GP, 196
1GQ, 196
1GS, 196
1GW, 196
1GX, 197
1GZ, 197
1H1, 198
1H3, 198
1H8, 199
1HB, 199
1HD, 200
1HG, 200
1HH, 200
1HK, 200
1HM, 200
1HQ, 201
1HR, 201
1HS, 201
1HW, 201
1HY, 201
1J1, 202
1J3, 202
1J8, 214
1JG, 202
1JN, 203
1JQ, 203
1JS, 203
1JV, 203
1JX, 204
1K0, 204
1K2, 204
1K4, 204
1K6, 205
1K7, 205
1K9, 205
1KD, 205
1KG, 205
1KJ, 205
1KM, 205
1KQ, 206
1KS, 206
1KV, 206
1KZ, 207
1M1, 207
1M3, 207
1M5, 207
1M7, 208
1M9, 208
1MB, 208
1MD, 208
1MF, 208
1MG, 209
1MJ, 209
1MK, 209
1MN, 209
1MQ, 209
1MS, 209
1MT, 209
1MW, 210
1MY, 210
1N0, 210
1N2, 211
1N4, 212
1N5, 212
1N7, 212
1NC, 212
1NG, 212
1NJ, 212
1NN, 213
1NQ, 213
1NT, 214
1NV, 214
1NW, 214
1NX, 214
1NY, 214
1P0, 214
1P1, 214
1P3, 215
1P5, 215
1P7, 215
1PB, 215
1PC, 216
1PF, 216
1PG, 216
1PH, 216
1PK, 216
1PN, 216
1PQ, 217
1PR, 217
1PT, 217
1PW, 237
1PX, 237
1PZ, 218
1Q0, 218
1Q2, 218
1Q4, 218
1Q6, 236
1Q8, 218
1QB, 219
1QC, 219
1QH, 219
1QK, 220
1QN, 220
1QR, 220
1QV, 221
1QX, 221
1QZ, 221
1R1, 221
1R4, 221
1R7, 222
1R8, 222
1RD, 222
1RK, 222
1RQ, 224
1RV, 225
1RY, 225
1S1, 226
1S4, 226
1S7, 226
1S9, 227
1SC, 228
1SD, 228
1SF, 228
1SH, 228
1SK, 228
1SN, 229
1SP, 229
1SR, 229
1SS, 229
1SW, 230
1SY, 230
1T1, 230
1T3, 231
1T6, 231
1T8, 232
1T9, 232
1TD, 232
1TG, 232
1TJ, 233
1TN, 233
1TS, 233
1TT, 233
1TV, 233
1TW, 233
1TX, 234
1TY, 234
1TZ, 234
1V0, 234
1V2, 235
1V4, 235
1V7, 236
1V9, 236
1VC, 236
1VF, 236
1VG, 236
1VH, 237
1VW, 6
1VX, 6
1VY, 8
1W0, 14
1W1, 14
1W2, 15
1W4, 20
1W5, 25
1W6, 15
1W8, 15
1W9, 15
1WB, 15
1WC, 16
1WF, 15
1WH, 26
1WJ, 27
1WK, 26
1WM, 27
1WN, 27
1WP, 31
1WQ, 35
1WR, 35
1WS, 35
1WY, 25
1X0, 26
1X1, 11
1X2, 11
1X3, 36
1X4, 36
1X5, 36
1X6, 36
1X7, 63
1X9, 60
1XB, 60
1XC, 61
1XD, 60
1XF, 61
1XG, 61
1XH, 121
1XN, 69
1XP, 69
1XR, 69
1XS, 69
1XT, 70
1XW, 121
1XY, 70
1Y0, 18

1Y1, 17
1Y2, 14
1Y3, 17
1Y4, 16
1Y5, 25
1Y6, 35
1Y7, 25
1Y8, 14
1Y9, 20
1YD, 20
1YH, 26
1YJ, 28
1YK, 7
1YM, 42
1YP, 60
1YQ, 47
1YR, 35
1YS, 6
1YT, 13
1YV, 25
1YW, 50
1YX, 56
1YY, 27
1Z0, 48
1Z1, 48
1Z2, 58
1Z5, 39
1Z6, 40
1Z7, 40
1Z8, 41
1Z9, 50
1ZD, 72
1ZF, 72
1ZG, 72
1ZH, 72
1ZJ, 73
1ZK, 73
1ZM, 73
1ZP, 73
1ZR, 74
1ZS, 74
1ZT, 74
1ZV, 74
1ZW, 73
1ZX, 75
1ZY, 75
1ZZ, 75
200, 75
202, 75
203, 74
205, 76
206, 33
208, 80
209, 81
20B, 81
20C, 79
20D, 83
20F, 83
20G, 84
20H, 81
20J, 82
20K, 80
20M, 81
20N, 84
20P, 82
20Q, 39
20R, 73
20T, 75
20V, 77
20W, 78
20X, 78
20Y, 82
20Z, 99
210, 99
211, 38
214, 97
217, 93
219, 94
21B, 94
21C, 95
21D, 95
21F, 96
21H, 93
21J, 100
21M, 99
21N, 166
21P, 34
21Q, 34
21R, 33
21V, 33
21W, 34
21X, 34
21Y, 34
21Z, 34
220, 33
222, 47
224, 26
225, 114
226, 14
227, 14
228, 7
229, 27
22B, 50
22C, 10
22F, 47
22H, 48
22K, 51
22M, 54
22P, 33
22R, 31
22S, 31
22X, 79
22Y, 102
22Z, 101
230, 101
231, 29
232, 29
233, 30
234, 29
237, 102
238, 96
239, 41
23B, 43
23D, 97
23F, 99
23H, 6
23J, 6
23K, 6
23M, 39
23N, 180
23P, 172
23Q, 70
23R, 22
23S, 15
23T, 19
23W, 19
23X, 25
23Y, 225
23Z, 228
240, 225
241, 17
242, 13
243, 42
244, 42
245, 42
246, 41
247, 19
248, 19
24D, 43
24K, 26
24M, 41
24P, 16
24Q, 42
24S, 42
24V, 41
24W, 25
24X, 41
24Y, 32
24Z, 44
250, 37
251, 37
252, 19
255, 46
257, 44
25B, 46
25C, 42
25D, 45
25G, 46
25J, 44
25M, 46
25N, 46
25Q, 46
25W, 45
25Z, 45
263, 28
265, 45
267, 66
269, 45
26F, 69
26G, 70
26H, 65
26J, 43
26K, 43
26N, 44
26P, 44
26S, 46
26V, 46
26X, 66
26Y, 66
271, 66
273, 70
274, 61
275, 46
276, 66
277, 66
27F, 21
27H, 55
27J, 61
27K, 65
27M, 69
27N, 63
27P, 64
27Q, 64
27R, 65
27S, 65
27V, 65
27W, 65
27X, 65
27Z, 65
280, 65
281, 65
287, 66
288, 66
289, 67
28B, 67
28C, 67
28D, 68
28G, 68
28J, 68
28M, 68
28N, 68
28Q, 68
28R, 68
28T, 65
28V, 64
28Z, 67
290, 44
291, 42
292, 63
294, 63
297, 67
298, 67
29C, 73
29D, 27
29G, 71
29H, 78
29J, 79
29K, 79
29M, 80
29N, 82
29P, 83
29Q, 87
29R, 86
29S, 87
29T, 87
29V, 106
29X, 100
29Z, 121
2B0, 88
2B2, 30
2B3, 101
2B4, 113
2B5, 115
2B6, 112
2B7, 113
2B8, 113
2B9, 113
2BB, 114
2BD, 107
2BF, 109
2BG, 110
2BH, 200
2BJ, 109
2BK, 118
2BM, 118
2BN, 106
2BP, 119
2BR, 110
2BS, 111
2BT, 111
2BW, 112
2BX, 37
2BZ, 22
2C1, 123
2C2, 125
2C3, 131
2C4, 132
2C5, 133
2C6, 134
2C7, 135
2C8, 137
2C9, 137
2CB, 138
2CC, 123
2CD, 120
2CF, 145
2CG, 143
2CH, 154
2CJ, 155
2CK, 153
2CM, 155
2CN, 156
2CP, 157
2CQ, 158
2CR, 164
2CS, 164
2CT, 163
2CV, 161
2CX, 171
2D0, 186
2D1, 188
2D2, 190
2D3, 193
2D4, 195
2D5, 199
2D6, 206
2D7, 207
2D8, 208
2DC, 11
2DD, 51
2DF, 52
2DH, 104
2DJ, 77
2DK, 111
2DM, 4
2DN, 166
2DP, 166
2DQ, 167
2DR, 170
2DS, 171
2DT, 201
2DW, 32
2DX, 18
2DY, 104

2F0, 172
2F2, 53
2F3, 131
2F5, 117
2F6, 104
2F7, 117
2F9, 118
2FB, 120
2FD, 117
2FG, 4
2FH, 30
2FJ, 28
2FM, 31
2FN, 120
2FP, 121
2FW, 120
2FX, 120
2FY, 111
2FZ, 112
2G2, 2
2G3, 120
2G4, 173
2G6, 120
2G8, 10
2GB, 139
2GF, 22
2GH, 51
2GK, 51
2GT, 185
2GV, 12
2GW, 161
2GY, 90
2GZ, 94
2HO, 102

Indice analitico

$\overline{A}$, *vedi* insieme, chiusura
∂A, *vedi* frontiera
A^c, *vedi* insieme complementare
$B(x,r)$, *vedi* palla, 125
C, *vedi* funzione continua
$\mathbb{C}$, *vedi* numeri complessi, 4
C^k, 186
C^0, *vedi* funzione continua
C^k, 198
C_b, 149, 165
$D(x,r)$, *vedi* disco
Δ, *vedi* insieme, differenza simmetrica, 15
F_σ, *vedi* F-sigma
G_δ, *vedi* G-delta
$\mathbb{I}$, *vedi* matrice identità
$\mathbb{N}$, *vedi* numeri naturali, 4, 60
$\mathbb{N}_{\mathrm{ZF}}$, 43
$\mathbb{Q}$, *vedi* numeri razionali, 4
$\mathbb{R}$, *vedi* numeri reali, *vedi* retta reale, 4
$\mathbb{R}/2\pi$, 145
$\overline{\mathbb{R}}$, *vedi* retta estesa
$S(x,r)$, *vedi* sfera
S^1 , *vedi* circonferenza
T_2, *vedi* Hausdorff
$\mathbb{Z}$, *vedi* numeri interi, 4
$[\![$, 5
$(\!($, 5
$(\!|$, 5, 30
$]\!]$, 5
$)\!)$, 5
$|\!)$, 5, 30
$\searrow$, 201
∂f, *vedi* sottodifferenziale
e, *vedi* numero di Nepero
=, *vedi* uguaglianza
sin(1/x), 134
$\neg$, 7
$\|\cdot\|$, *vedi anche* norma
$\|\cdot\|_p$
  in $\mathbb{R}^n$, 153–154
$\|\cdot\|_\infty$
  in C_b, 149, 165
  in $\mathbb{R}^n$, 153–154
$\Leftrightarrow$, 7
$\wedge$, 4, 7
$\vee$, 4, 7
$\cap$, 15
$\cup$, 14, 17
$\sim$, 214–216
$\sim_f$, 216
$\approx$, 214, 215
$\subset$, 14
$\subseteq$, 14
$\subsetneq$, 14
$\bigcap$, 14
$\overline{\bigcap}$, 19, 109
$\bigcup$, 14
$\overline{\bigcup}$, 116
$\underline{\bigcup}$, 17, 45, *115*
$\lfloor x \rfloor$, *vedi* floor
$\setminus$, *vedi* insieme differenza
$\doteq$, *vedi* concatenazione, 34
(parziale), 25
Γ, *vedi* funzione Gamma

Abel, 205, 231
aderente, *vedi* punto aderente
algebrico, 88
anello, 72
  di polinomi, 88
  ordinato, 73, 74
antiriflessiva
  relazione, 25, 26
antisimmetrica
  relazione, 25, 26
aperto, *vedi* insieme aperto

apice, 8
appartenenza, 11
apre-chiude, 129
arc, 214
archimedeo, 73
Arzelà, 204
Ascoli, 204
assioma
    dell'infinito, 21, **42**
    dell'insieme potenza, 17, 21
    dell'insieme vuoto, 17
    dell'unione, 17
    della scelta, **22**, 22
    di buona fondazione, 21, 46
    di estensionalità, 14, 17
    di regolarità, 18, 21, 46
    primo — di numerabilità, **118**, 163
    secondo — di numerabilità, **118**, 118, 128, 136
    dell'infinito, 18
    dell'unione, *14*
    della coppia, 17
    di rimpiazzamento, 18
    di specificazione, 18
assiomi
    di Peano, 60
    di Zermelo–Fraenkel, 16, *vedi* teoria formale degli insiemi
associativa
    addizione, 64
atomo, 7, 8, 16

Babilonese
    metodo —, 94
Baire, 140
    categoria, 140, 167
ball packing, 147
Banach, *vedi* spazio di Banach, *vedi anche* teorema di Hahn–Banach
base
    (induzione), 61
    (spazi vettoriali), 23, 56, 153
    (topologia), 108, 115–118, 128, 129
ben formata, *vedi* formula ben formata
Bessel, 206
binomiale, *vedi anche* coefficiente binomiale, *vedi* teorema binomiale
Borel, 138
box, 149
bucato, *vedi* intorno bucato

C, *vedi* funzione continua
campo, 72
    ordinato, 75
        $\mathbb{C}$, 75
cancellazione, *vedi* eliminazione
Cantor, *vedi anche* ipotesi del continuo
    insieme di, **122**, 143, 149, 181
    teorema dell'intersezione, 82, 110, 139
caratteristica, *vedi* funzione caratteristica, *vedi* funzione caratteristica
cardinalità, 50–56
    confronto, 51
    del continuo, **53**, 53, 124, 131
    finita, **51**, 51
    numerabile, 52
Cartan, 210
Cartesio
    criterio di —, 188
categoria, *vedi anche* insieme, di prima/seconda —, *vedi anche* teorema di Baire
categoria di Baire, 140, 167
catena, 38
Cauchy, 219
    criterio di condensazione di —, 95
    prodotto di —, *vedi* prodotto di Cauchy
    successione, *vedi* successione di Cauchy
cerchio osculatore, 233
CH, *vedi* ipotesi del continuo
chiuso, *vedi* insieme chiuso
chiusura, **104**, 108, 115, 126, 127, 129, 173
    e parte interna, 105, 135
    in spazio metrico, 126
    ripetuta, 105
circonferenza, **145**
coefficiente
    binomiale, 76, 193

cofinale, 29, 112
Cohen, 53
combinazione convessa, 172
combinazione lineare finita, 22
commutativo
    anello—, 72
    gruppo —, 72
comparabile, 27
compatto, **109**, 110, 138, 139
    e rete, 113
    e ultrametrica, 143
    sequenzialmente, 138
complementare
    insieme, *vedi* insieme complementare
    insieme, *vedi* insieme complementare
complessi, *vedi* numeri complessi
completo, 143
componente connessa, 112
concatenazione, 34
condizione di unicità di Osgood, 221
congiunzione, 7
connessione
    in spazi metrici, **134**, 133–134
connesso
    per archi, 133
continuo
    cardinalità del —, **53**, 131
controimmagine, 36
contronominale, **9**
convergenza
    di serie, 94–99
    di successione, **123**
    puntuale, 119, **201**, 201–204
    totale, criterio —, 155
    uniforme, **201**, 201–204
    totale, **155**, 155, 230
convergenza a segni alterni, *vedi* criterio di Leibniz
convesso, *vedi anche* insieme convesso
costante
    di Nepero, 207
costante di Eulero-Mascheroni, 91
countable, 51
countably infinite, 51
crescente, **77**
criterio
    del rapporto, 95
    della radice, 94
    di condensazione di Cauchy, 95
    di convergenza a segni alterni, *vedi* criterio di Leibniz
    di convergenza totale, 155
    di Dirichlet, 96
        per gli integrali, 234
    di Leibniz, **96**, 96
criterio di Cartesio, 188
curva, **214**, 214–217
    chiusa, **215**
    chiusa semplice, 120, **215**
    di Hilbert, 215
    di Koch, 149
    di Peano, 215
    embedded, **214**, 214
    immersa, **214**
    inclusa, **214**, 214
    parametrica, **214**, 215
    poligonale, **120**, 120
    regolare, *vedi* curva, immersa
    semplice, **214**
    sostegno, **214**
    supporto, **214**

Darboux
    esempio, 187
    proprietà di, 186
decrescente, **77**
Dedekind, 54
Dedekind-infinito, 54
definitivamente, 23, **29**, 58, **70**, **79**, 83, 84, 92–96, 113
definizione
    per ricorrenza, 61
denso, *vedi* insieme, denso
    in spazio metrico, 126
derivata
    parziale, 193–195
    totale, 193–195
derivato, 108
determinante, *vedi* matrice, determinante
diffeomorfismo, 214
differenziale, 193–195
dilatazione, **158**
dimensione
    box dimension, 149
    di Minkowski, 147
Dini, 181, 201

diretto, *vedi* ordinamento diretto
Dirichlet
    teorema di approssimazione di —, 88
disco, **125**, 126, 128, 135, 138, 152
    in ultrametrica, 142
discreta, topologia —, **104**, 118, 129
diseguaglianza, *vedi* disuguaglianza
disgiunzione, 7
distance function, 132
distanza, **123**
    discreta, 123
distanza p-adica, 143
disuguaglianza
    di Jensen, 185
disuguaglianza di Hölder, 153
disuguaglianza di Young, 153, 179, 236
disuguaglianza triangolare, 78, **123**, 142, **151**, 151
divisione con resto, 68
dominio d'integrità, 74
doppia implicazione, 7

e, *vedi* numero di Nepero
Edelstein, 137
elevazione a potenza, *vedi* potenza
eliminazione, **65**, *67*, 68
embedded, curva, *vedi* curva, embedded
enumerazione, **52**, 232
epigrafico, 162, 175
equazione differenziale, *vedi* ODE
equazioni
    di Bessel, 206
equicontinua, 202
equinumerosi, 50
equiordinato, 33
equipotenti, 50
equivalenti
    norme, 152
equivalenza, *vedi* relazione, di equivalenza
erosione, **158**
esercizi difficili, *23*, *33*, *47*, *48*, *50*, *54*–*56*, *69*, *70*, *78*, *79*, *86*, *89*–*91*, *103*, *105*, *107*, *111*, *113*, *114*, *118*, *119*, *121*, *125*, *129*, *131*, *134*–*139*, *141*, *144*, *147*, *149*–*151*, *162*, *166*–*168*, *171*, *173*–*176*, *182*, *184*–*190*, *193*, *198*, *203*, *204*, *206*, *207*, *209*–*211*, *214*, *217*, *222*, *230*, *235*, *236*
esponenziale, 207, 228
    di matrici, 208
estremo inferiore, 31
    nella retta reale, 81
estremo superiore, 31
    nella retta reale, 80
etichettato, *vedi* poligono
Euler's number, *vedi* numero di Nepero
Eulero, 207, 208

F-sigma, 129, 171
    $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 167
famiglia equicontinua, 201, 203
Faà Di Bruno, 188
filtrante, *vedi* ordinamento con proprietà filtrante
finito, *vedi* insieme, finito
floor, 87, 91
formula
    atomica, 7
    ben formata, **7**, 7, 8, 11, 13, 19, 57
        con quantificatori, 10, 12
        in teoria degli insiemi, 16
        valutazione, 8, 9
    di Jacobi, 209, *235*, **235**
    di Leibniz, **188**
    di Newton, *vedi* teorema binomiale
    di Taylor, *vedi* teorema di Taylor
    esiste ed è unico, 13
forte
    principio forte di induzione, 69
Fraenkel, 16, 17
frequentemente, **29**, 58, **70**, **79**
Frobenious, 156
frontiera, **104**, 107, 108, 173
    ripetutamente, 107
funzionale
    relazione —, 25, 35
funzione, 35
    analitica, 212–213
    assolutamente omogenea, 151
    bi–Lipschitziana, 144

caratteristica, **56**, **86**, 119, 181
continua, **113**, 113–115, **166**, 166–167
continua a destra, 164
convessa, 151, **175**, 175–180, 202
costante a tratti, 164
discontinua, 167
Gamma, 183
Hölderiana, **170**, 170–171, 197, 202
indicatrice, *vedi* funzione caratteristica
inversa sinistra, 22
liminf di —, *vedi* liminf
limitata, 164, 202
limsup di —, *vedi* limsup
Lipschitziana, 125, 132, 144, 168, **170**, 170–171, 175, **177**, 197, 198
monotona, 164, 202
parziale, 25, 38
positivamente omogenea, 151
propria, 136
regolare a tratti, 220
regolata, 164, 182, 202
Riemann integrabile, 166, 181–185, 202
semi continua, *vedi* semicontinua inferiormente/superiormente
strettamente convessa, **175**
uniformemente continua, **167**, 167–170, 202, 203
spazio delle, 204
regolata, **163**, 163–164, 182
subadditiva, 124, 169, 179
subadditiva, e ultrametrica, 142
funzione distanza, **132**, 132–133
e insiemi convessi, 179
funzioni
equicontinue, 202

G-delta, 129
genera, 23, 56
grafico, 35
Gronwall, 219
gruppo, 72
gruppo topologico, 143
Gödel, 53

Hadamard, 190
Hahn, *vedi anche* teorema di Hahn–Banach
Hamel
base di —, 23, 56
Hausdorff, 104, 110, 126
Heine, 138
Hermite, 190
Hilbert, 215
Hoelder, 202
Hospital, *vedi* Hôpital
Hurwitz, 73
Hôpital
regola, *vedi* regola di De l'Hôpital
Hölder, 170

𝕀, *vedi* matrice identità
identità
di Eulero, 208
identità di Abel, 231
immagine, 36
immersa, curva, *vedi* curva immersa
implicazione, 7
inclusa, curva, *vedi* curva, inclusa
incomparabile, 27
indiscreta, topologia —, **104**
induction, 43
induzione, 43, 61
transfinita, 70
induzione forte, 69
inf, *vedi* estremo inferiore
inf-convoluzione, 162
inferiormente limitato, 31
infinito, *vedi* insieme, infinito
iniettiva, 25
insieme
aperto
in spazio metrico, **125**
in topologia, **104**
chiuso
in spazio metrico, **126**
in topologia, **104**
compatto, *vedi* compatto
complementare, **15**, **56**, 58, **104**, *107*, *126*
connesso, **110**
convesso, **172**, 172
strettamente, 180
Dedekind-infinito, 54
delle parti finite, 53, 55, 98, 102

derivato, 106, 130, 135, 136
di Cantor, *vedi* Cantor, insieme di
di prima categoria, 140
di seconda categoria, 140
di sottolivello, 176
disconnesso, **110**
finito, **51**, 54
infinito, **51**
Dedekind —, 54
ingrassato, 133
numerabile, 54
parte interna, *vedi* parte interna
potenza, 15, 17
vuoto, 14, 17
chiusura, *vedi* chiusura
connesso per archi, 133
denso, **104**
differenza, **15**
differenza simmetrica, **15**
usando le caratteristiche, 57
frontiera, *vedi* frontiera, 107
perfetto, 122, 131, 141
insiemi
teoria degli —, *vedi anche* assiomi ..., *vedi anche* teoria ...
integrale di Riemann, 166, 181–185, 194
interi, *vedi* numeri interi
interpolazione polinomiale, 38, 190
intersezione di insiemi, 14
intervallo, **32**, 32–33
standard, 32
intorno, **106**
bucato, 78, 79, 83
in uno spazio topologico, 106
di infinito, 29
in $\mathbb{R}$, 78
sistema fondamentale di —, 106, 119
inversa destra, 37
inversa sinistra, 22, 37
inviluppo convesso, 160, **173**
iperpiano di supporto, 174
ipotesi del continuo, **53**, 131
irriflessiva
relazione, 25, 26
isolato, *vedi* punto isolato
isometria, 137, 138
isometria lineare, 154
isomorfismo d'ordine, 33
isotonia, 33

Jacobi, 194, *vedi* formula di Jacobi, 235
matrice di —, *194*, *196*
Jordan, 120

Karush, 200
Koch, 149
Kuhn, 200

Lagrange, 199
moltiplicatore di —, *vedi* moltiplicatore di Lagrange
resto di —, *vedi* resto di Lagrange
teorema di —, *vedi* teorema di Lagrange
Landau
simboli di —, *vedi* simboli di Landau
Laplace, 235
Leibniz, 188
criterio di —, **96**, 96
formula di —, *vedi* formula di Leibniz
lemma
del Dini, 201
di Abel, 205
di Gronwall, 219
di Hadamard, 190
di Zorn, 22, 174
lessicografico, *vedi* ordinamento, lessicografico
liminf, 83, 93
di funzione, **83**, 83–87
in spazi topologici, **161**
di insiemi, **58**, 58, 86
di successione, **86**
limitato
totalmente, 138, 139
limite inferiore, *vedi* liminf
limite superiore, *vedi* limsup
limsup, 83
di funzione, **83**, 83–87
in spazi topologici, **161**
di insiemi, **58**, 58, 86
di successione, **86**
Lindelöf, 219
linea, *vedi anche* retta

linear
order, *vedi* ordinamento, totale
linearmente indipendenti, 23, 56
Lipschitz, 170, 219
localmente compatto, 138
logaritmo, 166

maggioranti, 31
massimale, 27, 29
massimo, 27, 29, 108
massimo comun divisore, 26
matrice
aggiunta, 235
dei cofattori, 235
determinante, 234, 235
di Jacobi, *194*, *196*
matrice identità, 209
Mazur, 154
Mertens, 100
metodo Babilonese, 94
minimale, 27, 70
minimo, 27
su convessi, 176
Minkowski, 133, 147
dimensione di —, 147
minoranti, 31
modulo di continuità, **168**, 168–170, 201–203
moltiplicatore di Lagrange, 153, 199
monotona, **77**

naturali, *vedi* numeri naturali
negazione, 7
Nepero, 207
Newton, 76
norma, **151**
di Frobenious, 156
e dimensione, 148
spettrale, 156
norma indotta, 155
norme
equivalenti, 152
notazione di Landau, *vedi* simboli di Landau
numerabile, 51
numeri complessi, 72, 100, 181, 205, 229
numeri interi, 53
densi in ultrametrica, 144
numeri irrazionali, 88, 140, 167, 182
numeri naturali, 60–71
ordinamento, 66
potenza, 65
numeri razionali, 53, 72, 75, 87, 88, 182, 232
e ultrametrica, **143**, **144**, 144
numeri reali, *vedi anche* retta reale, 72
approssimazione di —, 87
numero
algebrico, 88
trascendente, 88
numero di Nepero, 207
numero irrazionale
approssimazione di —, 87

O grande, *vedi* simboli di Landau
o piccolo, *vedi* simboli di Landau
ODE, 219–231
omeomorfismo, 110, **114**, 122, 131, 138, 166, 214, 216
ordinale, 45
ordinamento, **25**, 27–34
(parziale), 25
con proprietà filtrante, **28**, 28–30, **112**
e rete, 100
dei numeri naturali, 66
diretto, **28**, 28–30, 102, 108, 109, 113
di insiemi, 105, 115
lessicografico, **30**, 30–31, 118
parziale, **25**, 26
parziale stretto, 26
topologia dall'—, **117**, 118
totale, **25**, 26, 117, 118
totale stretto, 26
con proprietà filtrante, 29, 102
ordine, *vedi anche* ordinamento
tipo di —, 33
ordini di grandezza, 93
orecchio, 121
oscillazione, 162, 164
Osgood, 221

p-adica
distanza —, 143
valutazione —, 143, 144
palla, **125**, 126, 135, 152
in ultrametrica, 142
inclusioni, 126

parametrica, curva, *vedi* curva parametrica
parte frazionaria, 87
parte intera, *vedi* floor, 87, 91
parte interna, **104**, 105, 108, 115, 126, 127, 129, 173
  e chiusura, 105, 135
  in spazio metrico, 126
parziale
  derivata, *vedi* derivata parziale
  funzione —, 25, 38
Peano, 60, 215
pedice, 8
perfetto, 122, 131, 141
Picard, 219
poligono, **120**, 154
  (non) etichettato, 120
  orecchio, 121
polinomio, 38, 52, 88–89, 181, 190, 228, 229
  anello di polinomi, 88
  convergenza di —, 202
  di Taylor, *vedi* teorema di Taylor
  successione di —, 202
potenza, 8, *vedi anche* insieme potenza
  di naturali, 65
  in un campo, 75
predecessore, 43, 48, 60
preordine, 23, 40
primo assioma di numerabilità, **118**, 163
principio di induzione, 43, 61
principio forte di induzione, 69
prodotto
  di Cauchy, **100**, 206
  topologia —, **116**, **130**
  topologia — (infinito), 117, 118
prodotto cartesiano, 5, 14, 21, 22, 25, 57, 116, 117, 130
  di gruppo, 143
  di palle, 130
  e topologia, 117
proiezione
  teorema della —, 173
proposizione (logica), 12
propria
  funzione —, 136
proprietà
  di Darboux, 186
  di eliminazione, *vedi* eliminazione
  di rigidità, 202
  filtrante, *vedi* ordinamento con proprietà filtrante
punto aderente, 130
  in spazio metrico, 126
  in uno spazio topologico, **106**
punto di accumulazione, 107, 108, 130, 131, 161, 163
  in spazi metrici, **130**, 130–131, 135
  in uno spazio topologico, **106**
  nella retta reale, **79**, 79, 83, 135, 203
punto fisso, 171
punto isolato, 107, 131, 136, 234
  in uno spazio topologico, **106**
punto limite
  di una rete in uno spazio topologico, **113**
  di una successione, **131**, 135
puntuale, *vedi* convergenza, puntuale

Raabe, 96
raggio di curvatura, 233
razionali, *vedi* numeri razionali
reali, *vedi* numeri reali, *vedi* retta reale
regola di De l'Hôpital, **186**
regolata, *vedi* funzione regolata
relazione, **25**
  antiriflessiva, 26
  antisimmetrica, 26
  di equivalenza, **25**, 37, 123, 124, 131, 146
    fra curve, 214, 216
    in gruppo, 132
    per S^1, 145
  irriflessiva, 26
  transitiva, 26
relazione d'ordine, *vedi* ordinamento
rete, **100**, 101, 102, 112, 114, 115, 119
  e compatto, 113
retta
  estesa, 77, **108**
retta reale, 72, 77–89
  compattificata a un punto, 108
Ricci, 118
ricorrenza
  definizione per, 61

Riemann, 98, *vedi anche* funzione Riemann integrabile, *vedi anche* integrale di Riemann
riflessiva
relazione, 25

S-saturo, 41
s.c.i., *vedi* semicontinua inferiormente
s.c.s., *vedi* semicontinua superiormente
scambio di limiti, 90
secondo assioma di numerabilità, **118**, 118, 128, 136
segmento iniziale, 49
semicontinua inferiormente, 161–163
semicontinua superiormente, 161–163
semplice, curva, *vedi* curva, semplice
separabile, 118
separazione, 174, 175
sequenzialmente compatto, 138
serie
binomiale, 193
di potenze, 205–211
serie di Taylor, 184, 207, 212
sfera, 128, 135, 152, 155, 215, 237
simboli di Landau, **191**, 191, 192
simmetrica
relazione, 25
simplesso, 172
sin(1/x), 134
sistema fondamentale di intorni, 106, 119
somma di Minkowski, 82, 133, **157**, 157
sostegno
di una curva, **214**
sottodifferenziale, 176, 179
sottorete, **101**, 102
sottosuccessione, 91, 101
convergente, 119, 138
spazio
di Hausdorff, *vedi* Hausdorff
delle funzioni uniformemente continue, 204
di Banach, 149, **155**, 164, 165
separabile, **118**
topologico, **104**, 104–119
totalmente disconnesso, **112**, 129
separabile, 118, **128**
totalmente disconnesso, 142
spazio metrico, **123**, 123–146, 162
e anche gruppo, 132
spazio vettoriale, 119, 229
normato, 151–160
strettamente convesso, 151
strettamente convesso
spazio vettoriale normato, 151
subadditiva, 124, 169, 179
successione, **35**
convergenza di —, *vedi* convergenza di successione
definita per ricorrenza, 61, 94
di Cauchy, 123, 124, 139
di Cauchy, e sottosuccessione, 124
di Cauchy, **123**, 124
successore
negli insiemi bene ordinati, 48
nei numeri naturali secondo Peano, 60
nella teoria degli insiemi di Zermelo–Fraenkel, 41, 42, 69
sup, *vedi* estremo superiore, 80
superiormente limitato, 31
supporto, 174, 175
di una curva, **214**
surgettiva, 25
sviluppo
binomiale, *vedi* teorema binomiale
di Laplace, 235
di Taylor, *vedi* teorema di Taylor

T_2, *vedi* Hausdorff
tassellatura, 149
tautologia, **9**, 13, 57
Taylor, *vedi anche* serie di Taylor, *vedi anche* teorema di Taylor, *vedi anche* serie di Taylor
teorema
binomiale, 76
Cauchy–Lipschitz, 219
del valor medio, *vedi* teorema di Lagrange
dell'incremento finito, *vedi* teorema di Lagrange
dell'intersezione, *vedi* Cantor, teorema dell'intersezione
della dimensione, 56

della proiezione, 173
delle due orecchie, 121
di approssimazione di Dirichlet, 88
di Ascoli–Arzelà, 204
di Baire, 140
di convergenza monotona, 103
di De l'Hôpital, *vedi* regola di De l'Hôpital
di Edelstein, 137
di esistenza e unicità locale, 219
di funzione implicita, 195
di Hahn–Banach, 174
di Hurwitz, 73
di Jordan, 120
di Lagrange, **186**
di Mazur–Ulam, 154, 155
di Mertens, 100
di Taylor, **186**, 190–193
con resto di Lagrange, *vedi* resto di Lagrange
con resto integrale, 183, 193
in $\mathbb{R}^n$, 194, 195
di Tychonoff, 119
di unicità del limite, 123
di Zermelo, 22
Picard–Lindelöf, 219
teoria
formale degli insiemi, **16**, 17–21
informale degli insiemi, **16**
tipo d'ordine, 33
topologia, **104**
banale, *vedi* topologia indiscreta
d'ordine, **117**, 118
discreta, **104**, 118, 129
indiscreta, **104**
indotta, 111
prodotto, **116**, **130**
prodotto (infinito), 117, 118
discreta, 123
in spazi metrici, 125–130
topologico
spazio, **104**, 104–119
totale
derivata, *vedi* derivata totale
relazione —, 25, 35
totale, convergenza, *vedi* convergenza totale
totalmente disconnesso, *vedi* spazio, totalmente disconnesso
totalmente limitato, 138, 139
transfinita
induzione —, 70
transitiva
relazione, 25, 26
transitivo
insieme, 44
trascendente, 88
triangolato, 121
tricotomica
relazione, 25, 26
Tucker, 200
Tychonoff, 119

UC, *vedi* funzione uniformemente continua
uguaglianza, 8
in teoria degli insiemi, 14
Ulam, 154
ultrametrica, 142
delle successioni, dimensione, 150
delle successioni, 142
uniforme, *vedi* convergenza, uniforme
unione di insiemi, 14, 17

valutazione
di formula ben formata, 8, 9
valutazione p-adica, 143, 144
variabile
libera, 10
quantificata, 11
Von Neumann, 45
vuoto, *vedi* insieme vuoto

Young
disuguaglianza, *vedi* disuguaglianza di Young

Zermelo, 16, 17, 22
ZF, *vedi* teoria formale degli insiemi, **18**, 53, 54
ZFC, **18**, 53, 54
Zorn, 22, 174

Elenco delle figure

1 Rappresentazione della costante di Eulero-Mascheroni 91
2 Esempi di poligoni con molti lati (pari o dispari) e solo due orecchie. Figura per 8.8 121
3 Un poligono per cui la rimozione di un orecchio fa decrescere il numero di lati (non etichettati) da 7 a 4. 122
4 Ingrassato di un insieme; esercizio 9.70 133
5 Figura per esercizio 16.57. 197
6 Insiemi dell'esercizio 20.12 216
7 Ellissi (in rosso)e curve a esse ortogonali. 219
8 Figura per 22.3 220
9 Esercizio 22.15. 223
10 Esercizio 22.16. Soluzioni per $a > 0$ 223
11 Esercizio 22.16. Soluzioni per $a < 0$ 224
12 Soluzione di 22.22: inviluppo. 226

Riferimenti bibliografici

[1] M. Abate and F. Tovena. *Curves and Surfaces*. UNITEXT. Springer Milan, 2012. ISBN 9788847019416. *DOI: 10.1007/978-88-470-1941-6*. URL https://books.google.it/books?id=iwGjNhpkSeQC. †112

[2] Emilio Acerbi, Luciano Modica, and Sergio Spagnolo. *Problemi scelti di Analisi Matematica II*. Liguori Editore, 1986. ISBN 88-207-1484-1. †119

[3] L. Ambrosio, C. Mantegazza, and F. Ricci. *Complementi di matematica*. Scuola Normale Superiore, 2021. ISBN 9788876426933. URL https://books.google.it/books?id=1QR0zgEACAAJ. (document), 2.39, §2.b.b, §2.b.c, 2.90, †27, †30, §2.h.b, 2.258, §2.j, †42, †45, †46, 5.7, §5.c, 6.16, 6.17, 6.58, †58, 7.45, 7.50, 7.58, 7.59, 7.61, †65, 7.73, †68, †70, 9.80, §9.n, 16.26, §16.d, §17, §18, §19, 19.7, §20, §20, †112, 21.1, §22, §22.c

[4] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison - Wesley, 1974. 15.20, 16.39

[5] T.M. Apostol. *Calculus, Volume 1*. Wiley, 1991. ISBN 9780471000051. URL https://books.google.it/books?id=o2D4DwAAQBAJ. §13.a, §15, §16, §17, §18

[6] John L. Bell. The Axiom of Choice. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter 2021 edition, 2021. 2.301

[7] Andreas Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. In *Axiomatic set theory (Boulder, Colo., 1983)*, volume 31 of *Contemp. Math.*, pages 31–33. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984. 2.83

[8] H. Cartan. *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013. ISBN 9780486318677. URL https://books.google.it/books?id=xUHDAgAAQBAJ. †108

[9] Mariano Giaquinta and Giuseppe Modica. *Analisi Matematica 1. Funzioni di una variabile*. Pitagora Editrice Bologna, 1999. ISBN 9788837110499. †97

[10] P.R. Halmos. *Naive Set Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN 9781475716450. URL https://books.google.it/books?id=jV_aBwAAQBAJ. 2.52

[11] H. Herrlich. *Axiom of Choice*. Axiom of Choice. Springer, 2006. ISBN 9783540309895. URL https://books.google.it/books?id=JXIiGGmq4ZAC. †22, 2.295

[12] D. Hilbert, E.J. Townsend, and E. Jerome. *The Foundations of Geometry*. Project Gutenberg. Project Gutenberg., 2004. URL https://www.gutenberg.org/ebooks/17384. §8.a, §8.a

[13] P.G. Hinman. *Fundamentals of Mathematical Logic*. Taylor & Francis, 2005. ISBN 9781568812625. URL https://books.google.it/books?id=xA6D8o72qAgC. §2.a, †10, 2.25, 2.52, †18, †22, 2.90, §2.h.b, 2.283

[14] T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN 9783540447610. URL https://books.google.it/books?id=CZb-CAAAQBAJ. 2.39, §2.b.b, †22, †29, §2.h.b

[15] J.L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1975. ISBN 9780387901251. URL https://books.google.it/books?id=-goleb9Ov3oC. 2.114, 2.129, †39, 6.57, §7, 7.50, †68

[16] Steven G. Krantz. *The Axiom of Choice*, pages 121–126. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002. ISBN 978-1-4612-0115-1. *DOI: 10.1007/978-1-4612-0115-1_9*. †24

[17] Azriel Levy. The independence of various definitions of finiteness. *Fundamenta Mathematicae*, 46:1–13, 1958. *DOI: 10.4064/fm-46-1-1-13*. URL https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118218255. †33

[18] G. H. Meisters. Polygons have ears. *The American Mathematical Monthly*, 82(6):648–651, 1975. ISSN 00029890, 19300972. *DOI: 10.2307/2319703*. 8.8

[19] Jan Mycielski. A system of axioms of set theory for the rationalists. volume 53, pages 206–213, 2006. URL https://www.ams.org/journals/notices/200602/200602FullIssue.pdf. 2.301

[20] Livio C. Piccinini, Giovanni Vidossich, and Guido Stampacchia. *Equazioni differenziali ordinarie in R^N (problemi e metodi)*. Liguori Editore, 1978. §22, 22.22

[21] _____. *Ordinary Differential Equations in Rn*. Springer, 1984. ISBN 978-0-387-90723-9. *DOI: 10.1007/978-1-4612-5188-0*. §22

[22] H. Rubin and J.E. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice, II*. ISSN. Elsevier Science, 1985. ISBN 9780080887654. URL https://books.google.it/books?id=LSsbBU9FesQC. 2.83, 2.276, 2.301

[23] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw–Hill, New York, 3rd edition, 1964. †41, †42, †43, †44, †45, 5.7, 6.19, 6.43, §7, 7.45, §8.b, §13.a, §15, §16, §17, §18, §19, †113

[24] Alfred Tajtelbaum-Tarski. Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix. *Fundamenta Mathematicae*, 5(1):147–154, 1924. 2.301

[25] A. E. Taylor. L'Hospital's rule. *The American Mathematical Monthly*, 59(1):20–24, 1952. ISSN 00029890, 19300972. URL http://www.jstor.org/stable/2307183. §16

[26] Gerald Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140. American Mathematical Soc., 2012. ISBN 978-0-8218-8328-0. URL http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/index.html. (Freely available on the author's website). §22, 22.5

[27] Helge Tverberg. A proof of the Jordan curve theorem. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 12(1):34–38, 1980. *DOI: 10.1112/blms/12.1.34*. §8.a, §8.a

[28] Wikipedia. Preordine — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2015. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Preordine&oldid=74440486. [Online; in data 1-dicembre-2022]. 2.191

[29] _____. Mathematical morphology — Wikipedia, the free encyclopedia, 2016. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mathematical_morphology&oldid=714099245. [Online; accessed 24-July-2016]. §11.g

[30] _____. Tautologia — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Tautologia&oldid=81165325. [Online; in data 29-luglio-2016]. †10

[31] _____. Teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. URL https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoria_degli_insiemi_di_Zermelo-Fraenkel&oldid=82731028. [Online; in data 19-ottobre-2016]. 2.52

[32] _____. Teoria ingenua degli insiemi — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. URL https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoria_ingenua_degli_insiemi&oldid=82742337. [Online; in data 18-ottobre-2016]. 2.52

[33] _____. Strictly convex space — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Strictly_convex_space&oldid=861198993. [Online; accessed 15-maggio-2023]. †85

[34] _____. Insieme diretto — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2019. URL https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Insieme_diretto&oldid=102088385. [Online; in data 25-novembre-2022]. 2.114, 2.129

[35] _____. Rete (matematica) — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2019. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Rete_(matematica)&oldid=105548311. [Online; in data 14-dicembre-2022]. 6.57

[36] _____. Spazio di Baire — wikipedia, l'enciclopedia libera, 2020. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Spazio_di_Baire&oldid=112747513. [Online; in data 3-maggio-2023]. †82

[37] _____. Teorema di Hurwitz (teoria dei numeri) — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2020. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Hurwitz_(teoria_dei_numeri)&oldid=110293279. [Online; in data 30-novembre-2022]. 5.60

[38] _____. Dominio d'integrità — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2021. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Dominio_d'integrità&oldid=118873859. [Online; in data 16-novembre-2022]. 4.13

[39] _____. Identità di Bézout — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2021. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Identità_di_Bézout&oldid=121969472. [Online; in data 30-novembre-2022]. 5.59

[40] _____. Ordered ring — Wikipedia, the free encyclopedia, 2021. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ordered_ring&oldid=1035305291. [Online; accessed 16-November-2022]. 4.6

[41] _____. Teorema di Heine-Borel — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2021. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Heine-Borel&oldid=124237381. [Online; in data 7-agosto-2023]. §9.j, 9.111

[42] _____. Two ears theorem — Wikipedia, the free encyclopedia, 2021. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Two_ears_theorem&oldid=1024888322. [Online; accessed 13-novembre-2022]. 8.8

[43] _____. Accumulation point — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Accumulation_point&oldid=1097360512. [Online; accessed 29-dicembre-2022]. †60

[44] _____. Base (topologia) — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2022. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Base_(topologia)&oldid=130588263. [Online; in data 8-agosto-2023]. †68

[45] _____. Cantor's intersection theorem — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cantor's_intersection_theorem&oldid=1127277305. [Online; accessed 28-giugno-2023]. 5.30

[46] _____. Derivazione delle funzioni iperboliche — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2022. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Derivazione_delle_funzioni_iperboliche&oldid=128089918. [Online; in data 23-luglio-2023]. †110

[47] _____. Hurwitz's theorem (composition algebras) — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hurwitz's_theorem_(composition_algebras)&oldid=1092800573. [Online; accessed 14-novembre-2022]. 4.5

[48] _____. Resultant — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Resultant&oldid=1105451284. [Online; accessed 1-dicembre-2022]. 5.69

[49] _____. Topologist's sine curve — wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Topologist_s_sine_curve&oldid=1116036369. [Online; accessed 24-aprile-2023]. 9.75

[50] _____. Axiom of choice — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Axiom_of_choice&oldid=1173520442. [Online; accessed 28-September-2023]. †25

[51] _____. Baker–Campbell–Hausdorff formula — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Baker-Campbell-Hausdorff_formula&oldid=1168221703. [Online; accessed 7-agosto-2023]. 18.28

[52] _____. Big O notation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Big_O_notation&oldid=1161509085. [Online; accessed 24-giugno-2023]. 16.31

[53] _____. Cantor set — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cantor_set&oldid=1166344861. [Online; accessed 10-agosto-2023]. §8.b

[54] _____. Curva di Koch — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Curva_di_Koch&oldid=131755745. [Online; in data 4-maggio-2023]. 10.21

[55] _____. Determinant — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Determinant&oldid=1169031704. [Online; accessed 10-agosto-2023]. 23.15

[56] _____. Faà di Bruno's formula — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Faa_di_Bruno_s_formula&oldid=1160739646. [Online; accessed 19-giugno-2023]. 16.19

[57] _____. Hermite interpolation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hermite_interpolation&oldid=1131496413. [Online; accessed 2-luglio-2023]. 16.29

[58] _____. Mazur–Ulam theorem — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mazur-Ulam_theorem&oldid=1169902092. [Online; accessed 29-August-2023]. §11.b

[59] _____. Natural density — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Natural_density&oldid=1152033872. [Online; accessed 7-agosto-2023]. 23.11

[60] _____. Poligono — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Poligono&oldid=134370006. [Online; in data 10-agosto-2023]. †73

[61] _____. Punto di discontinuità — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Punto_di_discontinuita&oldid=132026126. [Online; in data 18-maggio-2023]. 13.3, 13.4

[62] _____. Rank (linear algebra) — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rank_(linear_algebra)&oldid=1142781860. [Online; accessed 10-agosto-2023]. 23.15

[63] _____. Regola del prodotto — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Regola_del_prodotto&oldid=133241954. [Online; in data 19-giugno-2023]. 16.18

[64] _____. Regola di De l'Hôpital — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Regola_di_de_l'Hopital&oldid=134135629. [Online; in data 16-settembre-2023]. §16

[65] _____. Teorema di Lagrange — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Lagrange&oldid=133646261. [Online; in data 16-settembre-2023]. §16

[66] _____. Teorema di Taylor — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Taylor&oldid=132628671. [Online; in data 16-settembre-2023]. §16

[67] _____. Valutazione p-adica — Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2023. URL http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Valutazione_p-adica&oldid=131981334. [Online; in data 3-maggio-2023]. 9.154

[68] Laurent Younes, Peter W. Michor, Jayant Shah, and David Mumford. A metric on shape space with explicit geodesics. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 19(1):25–57, 2008. ISSN 1120-6330. *DOI: 10.4171/RLM/506*. 20.10

Indice

§1 Notazioni **4**

§2 Fondamenti **6**
§2.a Logica . . . 6
§2.a.a Proposizioni . . . 6
§2.a.b Logica proposizionale . . . 6
§2.a.c Logica del primo ordine . . . 10
§2.b Teoria degli insiemi . . . 13
§2.b.a Teoria degli insiemi elementare . . . 13
§2.b.b Assiomi di Zermelo–Fraenkel . . . 17
§2.b.c Lemma di Zorn, Assioma della Scelta, Teorema di Zermelo 22
§2.c Relazioni . . . 25
§2.d Ordinamenti . . . 27
§2.d.a Ordinamento diretto e filtrante . . . 28
§2.d.b Ordinamento lessicografico . . . 30
§2.d.c Ordinamento totale, sup e inf . . . 31
§2.d.d Ordinamento totale, intervalli . . . 32
§2.d.e Tipi di ordine . . . 33
§2.d.f Concatenazione . . . 34
§2.e Funzioni . . . 35
§2.f Funzioni elementari . . . 38
§2.g Passaggio al quoziente . . . 39
§2.h Numeri naturali in ZF . . . 41
§2.h.a Successore . . . 41
§2.h.b Numeri naturali in ZF . . . 42
§2.h.c Insiemi transitivi . . . 44
§2.h.d Ordinali . . . 45
§2.i Buoni ordinamenti . . . 47
§2.i.a Successore . . . 48
§2.i.b Segmenti e buoni ordinamenti . . . 49
§2.i.c Esempi . . . 50
§2.j Cardinalità . . . 50
§2.j.a Insiemi finiti . . . 51
§2.j.b Confronto . . . 51
§2.j.c Cardinalità numerabile . . . 52
§2.j.d Cardinalità del continuo . . . 53
§2.j.e In generale . . . 54
§2.j.f Potenza . . . 56
§2.k Operazioni su insiemi . . . 56
§2.k.a Limsup e liminf di insiemi . . . 58
§2.l Combinatoria . . . 59

§3 Numeri naturali **60**
§3.a Induzione . . . 61
§3.b Definizione per ricorrenza . . . 61
§3.c Aritmetica . . . 63
§3.d Ordinamento . . . 65
§3.d.a Ordinamento dall'aritmetica . . . 66

§3.d.b Ordinamento e aritmetica . . . 68
§3.e Compatibilità Z-F e Peano . . . 69
§3.f Induzione generalizzata, buon ordinamento . . . 69
§3.g Frequentemente, definitivamente . . . 70

§4 Gruppi, Anelli, Campi **72**

§5 Retta reale **77**
§5.a Intorni . . . 78
§5.b Frequentemente, definitivamente . . . 79
§5.c Estremi superiori e inferiori . . . 80
§5.c.a Esercizi . . . 81
§5.d Limiti . . . 82
§5.e Limiti superiori e inferiori . . . 83
§5.f Approssimazione di numeri irrazionali . . . 87
§5.g Algebrici . . . 88

§6 Successioni e serie **90**
§6.a Successioni . . . 90
§6.a.a Sommazione per parti . . . 93
§6.b Successioni definite per ricorrenza . . . 94
§6.c Serie . . . 94
§6.c.a Criteri . . . 94
§6.c.b Esercizi . . . 97
§6.c.c Prodotto di Cauchy . . . 100
§6.d Successioni generalizzate, o “reti” . . . 100
§6.e Serie generalizzate . . . 102
§6.e.a Serie generalizzate a termini positivi . . . 102

§7 Topologia **104**
§7.a Intorni, punti aderenti, isolati, di accumulazione . . . 106
§7.b Esempi . . . 107
§7.c Topologie generate . . . 109
§7.d Compattezza . . . 109
§7.e Connessione . . . 110
§7.f Reti . . . 112
§7.g Continuità e limiti . . . 113
§7.h Basi . . . 115
§7.i Spazi primo- e secondo-numerabili . . . 118
§7.j Spazi non primo-numerabili . . . 118

§8 Miscellanea **120**
§8.a Poligoni . . . 120
§8.b Insieme di Cantor . . . 122

§9 Spazi metrici **123**
§9.a Definizioni . . . 123
§9.b Topologia in spazi metrici . . . 125
§9.b.a Basi di palle . . . 129
§9.b.b Punti di accumulazione, punti limite . . . 130
§9.c Quozienti . . . 131

§9.d Funzione distanza . . . 132
§9.e Connessione . . . 133
§9.f Topologia nella retta reale . . . 134
§9.g Topologia nello spazio euclideo . . . 135
§9.h Punti fissi . . . 137
§9.i Isometrie . . . 137
§9.j Compattezza . . . 138
§9.k Teoremi e categorie di Baire . . . 140
§9.l Prodotto di infiniti spazi metrici . . . 141
§9.m Ultrametrica . . . 142
§9.m.a Ultrametrica delle successioni . . . 142
§9.n Ultrametrica p-adica . . . 143
§9.o Circonferenza . . . 145

§10 Dimensione **147**

§11 Spazi normati **151**
§11.a Norme nello spazio Euclideo . . . 153
§11.b Isometrie . . . 154
§11.c Convergenza totale . . . 155
§11.d Norme di applicazioni lineari . . . 155
§11.e Norme di matrici . . . 156
§11.f Somma di Minkowski . . . 157
§11.g Morfologia matematica . . . 158

§12 Semicontinuità, limiti destri e sinistri **161**
§12.a Semi continuità . . . 161
§12.b Funzioni regolate . . . 163
§12.c Trasformata di sup . . . 164

§13 Continuità **166**
§13.a Funzioni continue . . . 166
§13.b Funzioni uniformemente continue . . . 167
§13.c Funzioni Lipschitziane & Hölderiane . . . 170
§13.d Funzioni discontinue . . . 171

§14 Funzioni e insiemi convessi **172**
§14.a Insiemi convessi . . . 172
§14.a.a Proiezione, separazione . . . 173
§14.b Funzione convessa . . . 175
§14.c Caso reale . . . 177
§14.c.a Convessità e derivate . . . 177
§14.c.b Funzioni convesse a valori estesi . . . 178
§14.d Ulteriori proprietà e esercizi . . . 179
§14.d.a Funzione distanza . . . 179
§14.d.b Funzioni e insiemi strettamente convessi . . . 180

§15 Integrale di Riemann **181**

§16 Funzioni derivabili **186**
§16.a Derivate successive . . . 188

§16.b Sviluppo di Taylor . . . 190
§16.c Derivate parziali e totali, differenziali . . . 193
§16.d Teorema di funzione implicita . . . 195
§16.d.a Estensioni . . . 197
§16.e Problemi vincolati . . . 199
§16.e.a Vincoli con diseguaglianze . . . 200

§17 Limiti di funzioni **201**
§17.a Sul Teorema di Ascoli–Arzelà . . . 204

§18 Serie di potenze **205**
§18.a Somma e prodotto, composizione e inversa . . . 206
§18.b Exp,sen,cos . . . 207
§18.c Esponenziale di matrici . . . 208

§19 Funzioni analitiche **212**

§20 Curve **214**
§20.a Curve chiuse . . . 215

§21 Superfici **218**

§22 Equazioni differenziali **219**
§22.a Problemi autonomi . . . 220
§22.b Risoluzione . . . 221
§22.c Discussioni qualitative . . . 222
§22.d Inviluppo . . . 225
§22.e Equazioni lineari . . . 228
§22.f Equazioni matriciali . . . 230

§23 (pseudo)compit(in)i **232**
§23.a Equazioni funzionali . . . 236
§23.b Campi vettoriali . . . 237

UUID **238**

Indice analitico **243**

Elenco delle figure **253**