Esercizi

E3.i.11 Una formula ben formata nella logica proposizionale è una **tautologia** se per ogni *valutazione* la formula è sempre vera. Supponiamo che A, B, C siano formule ben formate. Mostrate che le seguenti proprietà dei connettivi sono tautologie. [†9] [OON]

$$A \Rightarrow A \quad \text{legge dell'identità}$$
$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A \quad \text{legge della doppia negazione}$$
$$A \vee A \Leftrightarrow A \ , \ A \wedge A \Leftrightarrow A \quad \text{leggi di idempotenza}$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \text{legge di contrapposizione, o della contronominale}^{\dagger 10} \tag{3.i.12}$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B)) \quad \text{equivalenza di implicazione, congiunzione e disgiunzione} \tag{3.i.13}$$
$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \quad \text{prima legge di De Morgan} \tag{3.i.14}$$
$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B) \quad \text{seconda legge di De Morgan} \tag{3.i.15}$$
$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \text{proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione} \tag{3.i.16}$$
$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad \text{proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione} \tag{3.i.17}$$
$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A \quad \text{proprietà commutativa di } \wedge$$
$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A \quad \text{proprietà commutativa di } \vee$$
$$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C \quad \text{proprietà associativa di } \wedge$$
$$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C \quad \text{proprietà associativa di} \vee \tag{3.i.18}$$

Queste due ultime proprietà permettono di omettere le parentesi in sequenze di congiunzioni oppure di disgiunzioni.

Le proprietà (3.i.13),(3.i.14),(3.i.15) dicono che potremmo fondare tutta la logica sui soli connettivi $\neg$ e $\wedge$, (o su $\neg, \vee$).

[†9] Queste liste sono tratte dalla Sezione 1.3 in [14], oppure [32].
[†10] La proposizione $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ è detta *"contronominale"* della $(A \Rightarrow B)$.

Altre tautologie importanti, spesso usate nel ragionamento logico.

$A \vee \neg A$	legge del terzo escluso	
$\neg(A \wedge \neg A)$	legge di non contraddizione	
$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$	modus ponens	(3.i.19)
$(\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A$	modus tollens	(3.i.20)
$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	negazione dell'antecedente	
$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	affermazione del conseguente	
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$	esportazione	
$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))$	dimostrazione per parti	
$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$	dimostrazione per casi	
$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	sillogismo ipotetico, o transitività dell'implicazione	
$(A \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow$		
$(A \vee F) \Leftrightarrow (A \wedge V) \Leftrightarrow A$	leggi di assorbimento	
$F \Rightarrow B$	prima legge di Pseudo Scoto, o *ex falso sequitur quodlibet*	
$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$	seconda legge di Pseudo Scoto	
$(\neg A \Rightarrow F) \Leftrightarrow A$	dimostrazione per assurdo	
$((A \wedge \neg B) \Rightarrow F) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$	dimostrazione per assurdo, con ipotesi e tesi	
$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$	consequentia mirabilis	(3.i.21)

[[OOP]]