Esercizi

E3.35 [016] Come già commentato in [00R], dato A un insieme, e $P(x)$ una proposizione logica dipendente da una variabile libera x, usa scrivere

$$\forall x \in A, P(x) \quad , \quad \exists x \in A, P(x)$$

però

$$\forall x \in A, P(x) \ \text{ riassume } \ \forall x, (x \in A) \Rightarrow P(x) \ ,$$

$$\exists x \in A, P(x) \ \text{ riassume } \ \exists x, (x \in A) \land P(x) \ ;$$

laddove le versioni “estese” sono formule ben formate.

Usando questa scrittura estesa dimostrate che le due proposizioni

$$\neg(\forall x \in A, P(x)) \ , \ \exists x \in A, (\neg P(x)) \ .$$

sono equivalenti, nel senso che da una è possibile dimostrare l’altra (e viceversa). Nella dimostrazione usate solo le tautologie (elencate in [00N]) e in particolare l’equivalenza della formula “$P \Rightarrow Q$” con “$(\neg P) \lor Q$” [a] , e infine l’equivalenza fra “$\neg\exists x, Q$” e “$\forall x, \neg Q$” [b].

Sostituendo poi $P(x)$ con $\neg P(x)$ e usando la tautologia della doppia negazione si ottiene infine che

$$\forall x \in A, (\neg P(x)) \ , \ \neg(\exists x \in A, P(x))$$

sono equivalenti.

Soluzione 1. *[017]*

[a] Tautologia in eqn. [(3.13)].

[b] Già discussa in eqn. [(3.16)].