Esercizi

3.147 [01P] *(Svolto il 2022-11-15)* Siano D, C insiemi non vuoti. Una **funzione parziale** da D in C è una funzione $\varphi : B \to C$ dove $B \subseteq D$. (La definizione di "*funzione*" è in [1Y6]).

Può far comodo pensare alla funzione parziale come a una relazione $\Phi \subseteq D \times C$ tale che, se $(x, a), (x, b) \in \Phi$ allora $a = b$ (si veda [23X]). Le due nozioni sono equivalenti in questo senso: data Φ costruiamo il dominio di φ, che chiameremo B, con la proiezione di Φ sul primo fattore cioè $B = \{x \in D : \exists c \in C, (x, c) \in \Phi\}$, e definiamo $\varphi(x) = c$ come l'unico elemento $c \in C$ tale che $(x, c) \in \Phi$; viceversa Φ è il grafico di φ.

Le funzioni parziali, viste come relazioni Φ, sono naturalmente ordinate per inclusione; equivalentemente $\varphi \leq \psi$ se $\varphi : B \to C$ e $\psi : E \to C$ e $B \subseteq E \subseteq D$ e $\varphi = \psi_{|B}$.

Sia ora U una **catena**, cioè una famiglia di funzioni parziali che è totalmente ordinata secondo l'ordinamento precedentemente dato; vedendo ogni funzione parziale come relazione, sia Ψ l'unione di tutte le relazioni in U; mostrate che Ψ è il grafico di una funzione parziale $\psi : E \to C$, il cui dominio E è l'unione di tutti i domini delle funzioni in U, e la cui immagine I è l'unione di tutte le immagini delle funzioni in U

Se inoltre tutte le funzioni in U sono iniettive, mostrate che ψ è iniettiva.

Soluzione 1. *[01Q]*