Esercizio 7.14. `[02F]Prerequisiti:[1Z7]`.*Siano a_n, b_n successioni reali (che possono avere segno variabile, assumere valore zero, e non sono necessariamente infinitesime); sia $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo spazio di tutte le successioni.*

Ricordiamo che la notazione $a_n = O(b_n)$ significa:

$$\exists M > 0,\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \overline{n} \Rightarrow |a_n| \leq M|b_n|\ .$$

Si mostrino queste asserzioni:

- *per $a, b \in X, a = (a_n)_n, b = (b_n)_n$ consideriamo la relazione*

  $$aRb \iff a_n = O(b_n)$$

  mostrate che R è un preordine;

- *definiamo $x \asymp y \iff (xRy \wedge yRx)$ allora $\asymp$ è una relazione di equivalenza, inoltre R è invariante per $\asymp$, la sua proiezione $\preceq$ è una relazione d'ordine su $X/\asymp$; (sugg. usate la Prop. [127]).*

- *Definite (come usuale)*

  $$\hat{a} \prec \hat{b} \iff (\hat{a} \preceq \hat{b} \wedge \hat{a} \neq \hat{b})$$

  per $\hat{a}, \hat{b} \in X/\asymp, (a_n)_n \in \hat{a}, (b_n)_n \in \hat{b}$ rappresentanti; assumendo che $b_n \neq 0$ (definitivamente in n), mostrate che

  $$\hat{a} \prec \hat{b} \iff 0 = \liminf_n \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{b_n} < \infty \quad .$$

Chiamiamo gli elementi di $X/\asymp$ ordini di grandezza. *La precendente discussione è collegato alla Definizione 3.2.3 (e seguenti) in [3].*