Esercizi

E3.88 [02M]Difficoltà:*.[a] Considerate lo spazio quoziente

$$\mathbb{X} = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}/\sim$$

dove $\{a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sono tutte le successioni a valori naturali, e dove definiamo $a \sim b$ sse $a_k = b_k$ definitivamente in k.

Definiamo l'ordinamento

$$a \preceq b \iff \exists n \text{ s.t. } \forall k \geq n, a_k \leq b_k$$

cioè $a \preceq b$ quando $a_k \leq b_k$ definitivamente. Questa è un preordine e

$$a \sim b \iff (a \preceq b \land b \preceq a)$$

e dunque passa al quoziente dove diviene un ordine, si veda Prop. [1Z7].

Sia ora a^k una successione crescente di successioni, cioè $a^k \preceq a^{k+1}$; notiamo che essa è limitata superiormente da b definito come

$$b_n = \sup_{h,k \leq n} a^k_h \ .$$

Possiamo dunque applicare il Lemma di Zorn a $(\mathbb{X}, \preceq)$ per dire che esistono massimali.

Dati a, b definiamo

$$a \vee b = (a_n \vee b_n)_n$$

allora è facilmente verificato che $a \preceq a \vee b$. Questo ci dice che l'ordinamento è *diretto*, si veda [06N].

Concludiamo dunque che $(\mathbb{X}, \preceq)$ ha un unico massimo, per [06S].

Questo però è falso, perché se si prende una qualsiasi successione a, la successione $(a_n + 1)_n$ è più grande di a.

Qual è l'errore nel ragionamento precedente? Cosa si può dunque concludere riguardo a $(\mathbb{X}, \preceq)$?

---

[a] Originalmente pubblicato in https://dida.sns.it/dida2/Members/mennucci/curiosa/