Esercizi

E0.1 [06G] Sia $R \subseteq X \times X$ una relazione; presi $x, y \in X$ scriveremo xRy invece di $(x, y) \in R$. Supponiamo che R sia *riflessiva* cioè xRx per ogni x, e che sia *transitiva* cioè per ogni $x, y, z \in X$ si abbia $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

R non è necessariamente una relazione d'ordine, perché non abbiamo ipotizzato che sia *antisimmetrica*: possiamo però "costruire" una relazione d'ordine "identificando fra loro" gli elementi di X su cui R non è antisimmetrica. Vediamo la costruzione nel dettaglio.

(a) Sia ora $\sim$ la relazione data da

$$x \sim y \iff xRy \wedge yRx$$

si mostri che è una relazione di equivalenza.

(b) Si consideri il quoziente $Y = X/\sim$, vogliamo mostrare come R passa al quoziente e produce una relazione T su Y. Si mostri che se $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in X$ e si ha $x \sim \tilde{x}, y \sim \tilde{y}$ allora $xRy \iff \tilde{x}R\tilde{y}$. Definiamo dunque T come l'insieme di tutte le coppie di classi di equivalenza i cui prodotti sono contenuti in R cioé $T = \{(z, w) \in Y^2 : z \times w \subseteq R\}$; questo si può scrivere anche come

$$zTw \iff (\forall x \in z, \forall y \in w, xRy)$$

abbreviamo questa definizione come $[x]T[y] \iff xRy$ (che è una buona definizione perché il membro destro non dipende dalla scelta dei rappresentanti nelle classi).

(c) Si mostri infine che T è una relazione d'ordine su Y.

Soluzione 1. *[06H]*