Dimostrazione. [090] Traccia della dimostrazione. Notate che la dimostrazione usa solo gli assiomi di Peano e il principio di induzione. Dato $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$ ricordiamo che $S^{-1}(m)$ è il precedessore, si veda [1YP] (usando l'aritmetica potremmo scrivere

$$S^{-1}(m) = m - 1 \ , \ \ S(k) = k + 1$$

ma questo teorema è usato nel definire l'aritmetica...) Data una qualunque $R \subseteq \mathbb{N} \times A$ definiamo la proiezione sulla prima componente

$$\pi(R) = \{n \in \mathbb{N}, \exists x \in A, (n, x) \in R\} \ .$$

Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ delle relazioni $R \subseteq \mathbb{N} \times A$ che soddisfano

$$(0, a) \in R \qquad (*)$$

$$\forall n \geq 0, \forall y \in A, \ \ (n, y) \in R \Rightarrow (S(n), g_n(y)) \in R \qquad (**)$$

Mostriamo che sotto queste condizioni $\pi(R) = \mathbb{N}$; sappiamo che $0 \in \pi(R)$; se $m \in \pi(R)$, allora esiste $x \in A$ per cui $(m, x) \in R$ ma allora da ** segue che $(S(m), g_m(x)) \in R$, e otteniamo $S(m) \in \pi(R)$.
La famiglia $\mathcal{F}$ è non vuota perché $\mathbb{N} \times A \in \mathcal{F}$. Sia poi T l'intersezione di tutte le relazioni in $\mathcal{F}$. T è dunque la minima relazione in $\mathcal{F}$.
Si può verificare che T soddisfa le precedenti proprietà * e **. In particolare $\pi(T) = \mathbb{N}$.
Dobbiamo ora mostrare che T è il grafico di una funzione (che è la funzione f desiderata), cioè che per ogni n esiste un unico $x \in A$ per cui $(n, x) \in T$.
Sia $A_n = \{x \in A, (n, x) \in T\}$; scriviamo $|A_n|$ per indicare il numero di elementi in $|A_n|$; siccome $\pi(T) = \mathbb{N}$ allora $|A_n| \geq 1$ per ogni n. Mostreremo che $|A_n| = 1$ per ogni n. Lo dimostreremo per induzione. Sia

$$P(n) \doteq |A_n| = 1 \quad .$$

Verifichiamo il passo induttivo.
Supponiamo per assurdo che $|A_m| = 1$ ma $|A_{Sm}| \geq 2$; moralmente in m il grafico della f "biforca" e la funzione diventa "multivoca". Definiamo per comodità $w = g_m(x), k = Sm$; potremmo togliere alcuni elementi a T (quelli che non hanno un "predecessore" secondo la relazione **) definendo

$$\tilde{T} = T \setminus \{(k, y) : y \in A, y \neq w\}$$

si mostra che $\tilde{T}$ soddisfa * e **, ma $\tilde{T}$ sarebbe più piccola di T, contro la minimalità di T. Per provare che $P(0)$, si definisce $k = 0, w = a$ e si procede allo stesso modo.
Il precente ragionamento mostra anche che la funzione è unica, perché se il grafico G di una qualsiasi funzione soddisfacente a * e ** deve contenere T, allora $T = G$. □