Esercizi

E7.3 [0CX] Difficoltà:*.

Sia $a_{n,m}$ una successione reale [a] a due indici $n, m \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

- per ogni m esista il limite $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$, e che
- esista finito il limite $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ uniformemente in n, cioè

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall h \geq m\ \ |a_{n,h} - b_n| < \varepsilon\ \ .$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m} \tag{7.3}$$

nel senso che se uno dei due limiti esiste (possibilmente infinito), allora esiste anche l'altro, e sono uguali.

Trovate un semplice esempio in cui i due limiti in (7.3) sono infiniti.

Trovate un esempio in cui $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ ma il limite non è uniforme e la precedente uguaglianza (7.3) non vale.

Soluzione 1. *[0CZ]*

[a] Questo risultato vale più in generale se $a_{n,m}$ sono elementi di uno spazio metrico; inoltre un simile risultato si ha quando i limiti $n \to \infty$ e/o $m \to \infty$ vengono rimpiazzati con limiti $x \to \hat{x}$ e/o $y \to \hat{y}$ dove le precedenti variabili si muovono in spazi metrici. Si veda ad esempio [1JS].