

Esercizio 7.13. [ODJ] Siano a_n, b_n successioni reali (che possono avere segno variabile, assumere valore zero, e non sono necessariamente infinitesime).

Ricordiamo che la notazione $a_n = o(b_n)$ significa:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n} \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon |b_n|.$$

Si mostri che queste due asserzioni sono equivalenti.

- Definitivamente in n si ha che $a_n = 0 \iff b_n = 0$; precisato questo si ha $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$, dove si decide che $0/0 = 1$ (in particolare a_n, b_n hanno definitivamente lo stesso segno, quando non sono entrambi nulli);
- si ha che $a_n = b_n + o(b_n)$.

La seconda condizione appare in Definizione 3.2.7 in [3] dove viene indicata con la notazione $a_n \sim b_n$.

Deducete che $a_n \sim b_n$ è una relazione di equivalenza.

Soluzione 1. [29Y]