Esercizi

E7.31 [0F8] Sia data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali positivi tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$: dimostrare che per ogni $l \in \mathbb{R}$ esiste una successione $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ per ogni n, tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n a_n) = l \quad .$$

Se invece $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S < \infty$, cosa si può dire dell'insieme E delle somme $\sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon_n a_n) = l$, al variare di $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ per ogni n?

- Analizzate i casi in cui $a_n = 2^{-n}$ oppure $a_n = 3^{-n}$
- Mostrate che E è sempre chiuso.
- Sotto quali ipotesi si ha che $E = [-S, S]$?

Suggerimento. Sia $\tilde{E}$ l'insieme delle somme $\sum_n(\varepsilon_n a_n) = l$, al variare di $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ per ogni n; notate che $\tilde{E} = \{(S + x)/2 : x \in E\}$.