Definizione 7.51. [0FR] Prerequisiti:[06V], [06Y], Sez. [1YY].
Dato J insieme ordinato (parzialmente) e filtrante, e data $f : J \to \mathbb{R}$, vogliamo definire il concetto di limite di $f(j)$ "per $j \to \infty$". [a].

- *Diremo che*
$$\lim_{j\in J} f(j) = l \in \mathbb{R}$$
se
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists k \in J\, \forall j \in J,\ j \geq k \Rightarrow |l - f(j)| < \varepsilon \quad .$$
Similmente si definiscono i casi $l = \pm\infty$ (imitando le definizioni usate quando $J = \mathbb{N}$.) (Questa è la definizione negli appunti del corso, cap. 4 sez. 2 in [3])

- *Equivalentemente possiamo dire che*
$$\lim_{j\in J} f(j) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$
se per ogni intorno U di l si ha che $f(j) \in U$ definitivamente per $j \in J$; dove definitivamente *è stato definito in* [06Y].

- *Ricordiamo da* [231] *che* "un intorno di ∞ in J" *è un sottoinsieme $U \subseteq J$ tale che $\exists k \in J \forall j \in J, j \geq k \Rightarrow j \in U$. Allora possiamo imitare la definizione* [20D].

  Data $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha $\lim_{j\in J} f(j) = l$ quando per ogni intorno V "pieno" di l in $\mathbb{R}$, esiste intorno U di ∞ in J tale che $f(U) \subseteq V$.

In particolare questa ultima definizione si può usare per definire i limiti di $f : J \to E$ dove E è uno spazio topologico.

---

[a] Notate che ∞ è un simbolo ma non è un elemento di J : se lo fosse dovrebbe essere il massimo, ma un insieme filtrante non può avere massimo, *cf* [06V]