

Esercizi

E8.16 [OGQ] Prerequisiti: [06N], [06M], [06V]. Difficoltà: *. (Replaces 29W) Sia (X, τ) uno spazio topologico. Consideriamo l'ordinamento discendente fra insiemi^a, con questo ordinamento τ è un insieme diretto; notiamo che ha minimo, dato da \emptyset .

Supponiamo ora che la topologia sia Hausdorff. Preso poi $x \in A$, sia $\mathcal{U} = \{A \in \tau : x \in A\}$ la famiglia degli aperti che contengono x : mostrate che \mathcal{U} è un insieme diretto; mostrate che ha minimo se e solo se il singoletto $\{x\}$ è aperto (e in questo caso il minimo è $\{x\}$).^b

Soluzione 1. [OGR]

Per l'esercizio [06V], quando $\{x\}$ non è aperto allora \mathcal{U} è un insieme filtrante, e dunque può essere usato come famiglia di indici per definire un "limite" non banale (si veda la nota [237]). Vedremo applicazioni in sezione [2B8].

^aPer riportarci formalmente alla definizione vista in [06N] definiamo $A \leq B \iff A \supseteq B$ e associamo l'ordinamento \leq a τ .

^bNotate che, il singoletto $\{x\}$ è aperto se e solo se x è un punto isolato.