## Esercizi

E8.j.2 [0MM][a] Prerequisiti:[2F7],[0KK].Difficoltà:*.Sia $\Omega$ un insieme non vuoto; consideriamo $X = \mathbb{R}^\Omega$.

1. Siano
$$U^f_{E,\rho} = \{g \in X, \forall x \in E, |f(x) - g(x)| < \rho\}$$
dove $f \in X$, $\rho > 0$ e $E \subset \Omega$ finito. Mostrate che la famiglia di questi $U^f_{E,\rho}$ soddisfa i requisiti di [0KZ], ed è dunque una *base* per una topologia $\tau$ (Sugg. usate [2F7]). Questa topologia è la *topologia prodotto* delle topologie di $\mathbb{R}$.

   In particolare per ciascun $f \in X$ gli insiemi $U^f_{E,\rho}$ sono un sistema fondamentale di intorni.
2. Verificate che la topologia è $T_2$.
3. Notate che $X$ è uno spazio vettoriale, e mostrate che l'operazione di somma è continua, come operazione $X \times X \to X$; a questo scopo, mostrate che se $f, g \in X$, $h = f + g$, per ogni intorno $V_h$ di $h$ esistono intorni $V_f, V_g$ di $f, g$ tali che $V_f + V_g \subseteq V_h$.
4. Dati $B_i \subset \mathbb{R}$ aperti non-vuoti , uno per ciascun $i \in \Omega$, mostrate che $\prod_i B_i$ è aperto se e solo se $B_i = \mathbb{R}$ salvo al più finiti $i$.

**Soluzione 1.** *[0MN]*

[a]Questi due esercizi [0MM],[2BP], sono tratti da un testo originalmente pubblicato dal Prof. Ricci in http://dida.sns.it/dida2/cl/08-09/folde0/pdf9 nel Marzo 2014.