4.3 Aritmetica [0NN]

Definiremo l'operazione di addizione fra numeri naturali, formalmente

$$\cdot + \cdot : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \quad , \quad (h,k)\mapsto h+k \quad .$$

Definizione 4.11. *[292]*

Questa operazione è commutativa e associativa, come mostrato sotto.

Notiamo che $h+0 = f_h(0) = h$ (base della ricorsione); inoltre $0+n = f_0(n) = n$ (si mostra facilmente per induzione).

Per dimostrare che è commutativa, mostriamo innanzitutto che

Lemma 4.12. *[27N]*

Proposizione 4.13. *[27P]*

A questo punto possiamo dare un nome a $1 = S(0)$ e notare che $S(n) = n+1$. Dunque da ora in poi potremmo fare a meno del simbolo S.

Con simili procedure si dimostra che l'addizione è associativa.

Proposizione 4.14. *[27Q]*

Analogamente si definisce la moltiplicazione.

Definizione 4.15. *[28V]*

poi si possono dimostrare le note proprietà (commutatività, associatività, distributività).

Esercizi

E4.16 [27R]

E4.17 [27S]

E4.18 [27V]

E4.19 [27W]

E4.20 [27X]

E4.21 [28T]

E4.22 [281]

E4.23 [27Z]

E4.24 [280]

Nel seguito scriveremo semplicemente nm invece di $n\times m$.