Esercizi

E9.41 [OPT] Prerequisiti: [OM3], [OPS], [107], [10F], [10J].

Presi $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ spazi metrici, sia $X = X_1 \times \cdots \times X_n$.

Sia φ una delle norme definite in eqn. [(11.14)] in Sez. [2CK]. Due possibili esempi sono $\varphi(x) = |x_1| + \cdots + |x_n|$ oppure $\varphi(x) = \max_{i=1\dots n} |x_i|$.

Definiamo infine per $x, y \in X$

$$d(x, y) = \varphi\big(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\big) \quad . \tag{9.42}$$

Si mostri che d è una distanza; si mostri che la topologia in (X, d) coincide con la topologia prodotto (si veda [OM3]).

Si noti che questo approccio generalizza il modo con cui viene definita la distanza Euclidea fra punti in $\mathbb{R}^n$ (prendendo $X_i = \mathbb{R}$ e $\varphi(z) = \sqrt{\sum_i |z_i|^2}$). Ne deduciamo che la topologia di $\mathbb{R}^n$ è il prodotto delle topologie di $\mathbb{R}$.

Soluzione 1. *[OPX]*

Si veda anche l'esercizio [OQM], che riformula quanto sopra usando il concetto di *basi di topologie*.

[[OPV]] [[OPW]]