Esercizi

E10.b.24 [0PT] Prerequisiti: [0M3], [0PS], [107], [10F], [10J].

Presi $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_n)$ spazi metrici, sia $X = X_1\times\cdots\times X_n$.

Sia φ una delle norme definite in eqn. [2CK] in Sez. [2CK]. Due possibili esempi sono $\varphi(x) = |x_1| + \cdots + |x_n|$ oppure $\varphi(x) = \max_{i=1\dots n}|x_i|$.

Definiamo infine per $x,y\in X$

$$d(x,y) = \varphi\big(d_1(x_1,y_1),\dots,d_n(x_n,y_n)\big) \quad . \qquad (10.b.25)$$

Si mostri che d è una distanza; si mostri che la topologia in (X,d) coincide con la topologia prodotto (si veda [0M3]).

Si noti che questo approccio generalizza il modo con cui viene definita la distanza Euclidea fra punti in $\mathbb{R}^n$ (prendendo $X_i = \mathbb{R}$ e $\varphi(z) = \sqrt{\sum_i |z_i|^2}$). Ne deduciamo che la topologia di $\mathbb{R}^n$ è il prodotto delle topologie di $\mathbb{R}$.

Soluzione 1. *[0PX]*

Si veda anche l'esercizio [0QM], che riformula quanto sopra usando il concetto di *basi di topologie*.

[[0PV]] [[0PW]]