Esercizi

E10.53 [0QM] Rivediamo l'esercizio [0PT].

Presi $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ spazi metrici, sia $X = X_1 \times X_1 \times \cdots \times X_n$. Sia d la distanza

$$d(x, y) = \max_{i=1,\ldots n} d_i(x_i, y_i) \quad .$$

Questa è la stessa d definita come in eqn. [(9.26)] in [0PT], ponendo $\varphi(x) = \max_{i=1\ldots n} |x_i|$. Indichiamo con $B^d(x, r)$ la palla in (X, d) di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$.

Vogliamo mostrare che d induce la topologia prodotto su X, usando i risultati visti in Sez. [2B5].

Presi $t \in X_i, r > 0$ indichiamo con $B^{d_i}(t, r)$ la palla nello spazio metrico (X_i, d_i). Sia $\mathcal{B}_i$ la famiglia di tutte le palle in (X_i, d_i).

Sia $\mathcal{B}$ definito come

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} B^{d_i}(x_i, r_i) \, : \, \forall i, x_i \in X_i, r_i > 0 \right\}$$

Mostrate che ogni palla $B^d(x, r)$ in (X, d) è il prodotto cartesiano delle palle $B^{d_i}(x_i, r)$ in (X_i, d_i). Sia dunque $\mathcal{P}$ la famiglia delle palle $B^d(x, r)$ in (X, d).

Da [0QJ] sappiamo che $\mathcal{P}$ è una base per la topologia standard nello spazio metrico (X, d).

Usate [0M7] per mostrare che $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$ generano la stessa topologia τ.

Usate [0M5] per mostrare che τ è la topologia prodotto.

Se ne conclude che la distanza d genera la topologia prodotto.