Esercizi

E9.58 [0R5] Sia (X, d) uno spazio metrico dove X è anche un gruppo, sia Θ un sottogruppo.

Definiamo che $x \sim y \iff xy^{-1} \in \Theta$. Si verifica facilmente che è una relazione di equivalenza. Sia $Y = X/\sim$ lo spazio quoziente. [a]

Supponiamo che d sia invariante rispetto alla moltiplicazione a sinistra per elementi di Θ:

$$d(x, y) = d(\theta x, \theta y) \ \ \forall x, y \in X, \forall \theta \in \Theta \ \ . \tag{9.58}$$

(Questo equivale a dire che, per ogni fissato $\theta \in \Theta$ la mappa $x \mapsto \theta x$ è una isometria). Definiamo la funzione $\delta : Y^2 \to \mathbb{R}$ come in [(9.57)].

- Mostrate che, prese $s, t \in X$, si ha

  $$\delta([s], [t]) = \inf\{d(s, \theta t) : \theta \in \Theta\} \tag{9.59}$$

  dove $[s]$ è la classe di elementi equivalenti a s.
- Mostrate che $\delta \geq 0$, che δ è simmetrica e che δ soddisfa la disuguaglianza triangolare.
- Supponiamo che, per ogni fissato $t \in X$, la mappa $\theta \mapsto \theta t$ sia continua da Θ a X; supponiamo inoltre che Θ sia chiuso: allora δ è una distanza. [b]

Soluzione 1. *[0R6]*

---

[a] Se Θ è un sottogruppo normale allora si scrive anche X/Θ, che è un gruppo.

[b] Notate che, usando [161], in queste ipotesi la mappa di moltiplicazione $(\theta, x) \mapsto \theta x$ è continua da $\Theta \times X$ in X.