



Figura 2: Ingrassato di un insieme; esercizio E9.62

Esercizi

E9.62 Argomenti: insieme ingrassato. Prerequisiti: [OR9].

[ORC]

Consideriamo uno spazio metrico (M, d) . Sia $A \subseteq M$ chiuso e non-vuoto, sia $r > 0$ fissato, e sia d_A la funzione distanza definita come in eqn. [(9.62)]. Sia poi $E = \{x, d_A(x) \leq r\}$, notate che è chiuso.

(a) Mostrate che

$$d_E(x) \geq \max\{0, (d_A(x) - r)\} . \quad (9.62)$$

(b) Mostrate che in (9.62) si ha uguaglianza se $M = \mathbb{R}^N$.

(c) Date un semplice esempio di spazio metrico in cui non si ha uguaglianza in (9.62).

(d) Se $M = \mathbb{R}^n$, dato $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso non-vuoto, mostrate che $E = A \oplus D_r$ dove $D_r \stackrel{\text{def}}{=} \{x, |x| \leq r\}$ e

$$A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x + y, x \in A, y \in B\}$$

è la *somma di Minkowski* dei due insiemi (si anche veda la sezione [2CP]).

Soluzione 1. [ORD]

L'insieme $\{x, d_A(x) \leq r\} = A \oplus D_r$ è alle volte chiamato “ingrassato” di A . In figura 2 vediamo un esempio di insieme A ingrassato per $r = 1, 2$; l'insieme A è il poligono nero (che è pieno) mentre le linee tratteggiate nel disegno indicano i contorni degli insiemi ingrassati.⁷⁴ Si vedano anche le proprietà in sezioni [2CP] e [2CQ].

⁷⁴Gli insiemi ingrassati non sono disegnati con il loro contenuto — altrimenti coprirebbero A .