

Esercizi

9.101 [OVD] Sia dato uno spazio metrico (X, d) . Come già in [ONW] definiamo il disco $D(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X, d(x, y) \leq \varepsilon\}$ (che è chiuso). Diciamo che (X, d) è *localmente compatto* se per ogni $x \in X$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $D(x, \varepsilon)$ è compatto. Considerate questa proposizione.

«**Proposizione** Uno spazio metrico localmente compatto è completo. **Dimostrazione** Sia $(x_n)_n \subset X$ una successione di Cauchy, allora definitivamente i suoi termini distano al più ε , dunque sono contenuti in un piccolo disco compatto, dunque esiste una sottosuccessione che converge, e allora per il risultato [ON8] tutta la successione converge. q.e.d. »

Se secondo voi la proposizione è vera, riscrivete la dimostrazione in modo rigoroso. Se secondo voi è falsa, trovate un controesempio.

Soluzione 1. [OVF]