

Esercizi

0.101 [OVT] Prerequisiti: [OVS]. Sia $X = C^0([0, 1])$ lo spazio delle funzioni continue e limitate $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dotato della usuale distanza

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \quad .$$

Sappiamo che (X, d_∞) è uno spazio metrico completo. Sia

$$D(0, 1) = \{f \in X : d_\infty(0, f) \leq 1\} = \{f \in X : \forall x \in [0, 1], \quad |f(x)| \leq 1\}$$

il disco di centro 0 (la funzione identicamente zero) e raggio 1.

Sappiamo da [OPY] che è chiuso, e dunque è completo. Mostrate che

D non è totalmente limitato, trovando una successione $(f_n) \subseteq D$

come spiegato in [OVS].