Esercizi

E10.4 [0Z3] Indichiamo un criterio operativo che può essere usato negli esercizi seguenti.

- Se esiste una successione descrescente $\rho_j \to 0$ e h_j interi positivi tale che bastano h_j palle di raggio ρ_j per coprire K, allora

$$\limsup_{\rho\to 0+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \le \limsup_{j\to\infty} \frac{\log h_{j+1}}{\log(1/\rho_j)} \quad . \tag{10.4}$$

- Se viceversa esiste una successione descrescente $r_j \to 0$, e $C_n \subseteq K$ famiglie finite di punti che distano almeno r_j fra loro, cioè per cui

$$\forall x, y \in C_n, x \neq y \Rightarrow d(x,y) \ge r_j \ , \tag{10.5}$$

  allora

$$\liminf_{\rho\to 0+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \ge \liminf_{j\to\infty} \frac{\log l_j}{\log(1/r_{j+1})} \quad . \tag{10.6}$$

  dove $l_j = |C_j|$ è la cardinalità di C_j. Si noti che i punti di $x \in C_j$ sono centri di palle $B(x, r_j/2)$ disgiunte, dunque $l_j \le P(r_j/2)$, come definito in [0YS].

In particolare se

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\log h_{j+1}}{\log(1/\rho_j)} = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log l_j}{\log(1/r_{j+1})} = \beta \tag{10.7}$$

allora l'insieme K ha dimensione β.

[[0Z4]]

Soluzione 1. *[0Z5]*