

Esercizi

E11.3 [0ZZ] Prerequisiti: [106], [19D], [0ZX]. Difficoltà: *. Diremo che lo spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è *strettamente convesso*^a se le seguenti proprietà equivalenti valgono.

- Il disco $D = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ è strettamente convesso.^b
- La sfera $\{x \in X, \|x\| = 1\}$ non contiene segmenti non-banali (cioè, segmento di lunghezza positiva).
- Per $v, w \in D$ con $\|v\| = \|w\| = 1$ e $v \neq w$, per ogni t con $0 < t < 1$ si ha che $\|tv + (1-t)w\| < 1$.
- Per ogni $v, w \in X$ che sono linearmente indipendenti si ha $\|v + w\| < \|v\| + \|w\|$.

Dimostrate che le quattro precedenti clausole sono equivalenti.

[[101]]

Soluzione 1. [102]

^aSi veda [22] per ulteriori proprietà.

^bLa definizione è in [19D].