Esercizi

E13.16 [156]Prerequisiti:[155].Sia $f : X_1 \to X_2$ con (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici.

Una funzione $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty]$ monotona (debolmente) crescente, con $\omega(0) = 0$ e $\lim_{t\to 0+} \omega(t) = 0$, tale che

$$\forall x, y \in X_1, \;\; d_2(f(x), f(y)) \le \omega(d_1(x,y)) \,, \tag{13.17}$$

è detta **modulo di continuità** per la funzione f. (Notate che f può avere molti moduli di continuità).

Per esempio se la funzione f è Lipschitziana cioè esiste $L > 0$ tale che

$$\forall x, y \in X_1, \;\; d_2(f(x), f(y)) \le L\, d_1(x,y)$$

allora f soddisfa la eqz. (13.17) ponendo $\omega(t) = Lt$.

Vedremo ora che l'esistenza di un modulo di continuità è equivalente alla uniforme continuità di f.

- Se f è uniformemente continua, mostrate che la funzione

$$\omega_f(t) = \sup\{d_2(f(x), f(y)) \;:\; x, y \in X_1, d_1(x,y) \le t\} \tag{13.18}$$

  è il più piccolo modulo di continuità.[a]

- Notate che il modulo definito in (13.18) potrebbe non essere continuo, e potrebbe essere infinito per t grande — trovate esempi a riguardo.

- Mostrate inoltre che se f è uniformemente continua si può trovare un modulo che è continuo dove è finito.

- Viceversa è facile vericare che se f ha un modulo di continuità, allora è uniformemente continua.

Se non conoscete la teoria degli spazi metrici, potete dimostrare i precedenti risultati nel caso in cui $f : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$. (Si veda anche l'esercizio [15W], che mostra che in questo caso il modulo ω definito in (13.18) è continuo ed è finito).

Soluzione 1. *[157]*

[[15B]]

[a] Notate che la famiglia su cui si calcola l'estremo superiore contiene sempre i casi $x = y$, dunque $\omega(t) \ge 0$.