

## Esercizi

E13.28 [161] Prerequisiti: [OPT]. Siano  $(X_1, d_1)$ ,  $(X_2, d_2)$  e  $(Y, \delta)$  tre spazi metrici; consideriamo il prodotto  $X = X_1 \times X_2$  dotato della distanza  $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ .<sup>a</sup> Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione con le seguenti proprietà:

- Per ogni fissato  $x_1 \in X_1$  la funzione  $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$  è continua (come funzione da  $X_2$  a  $Y$ );
- esiste un modulo di continuità  $\omega$  tale che

$$\forall x_1, \tilde{x}_1 \in X_2, \forall x_2 \in X_2, \delta(f(x_1, x_2), f(\tilde{x}_1, x_2)) \leq \omega(d_1(x_1, \tilde{x}_1))$$

(potremmo definire questa proprietà dicendo che la funzione  $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$  è uniformemente continua, con costanti indipendenti dalla scelta di  $x_2$ ).

Si mostri allora che  $f$  è continua.

---

<sup>a</sup>Sappiamo da [109] e [OPT] che vi sono diverse possibili scelte di distanze, che però sono fra loro equivalenti.