

Esercizi

E13.28 [161] Prerequisiti: [OPT]. Siano (X_1, d_1) , (X_2, d_2) e (Y, δ) tre spazi metrici; consideriamo il prodotto $X = X_1 \times X_2$ dotato della distanza $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.^a Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione con le seguenti proprietà:

- Per ogni fissato $x_1 \in X_1$ la funzione $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ è continua (come funzione da X_2 a Y);
- esiste un modulo di continuità ω tale che

$$\forall x_1, \tilde{x}_1 \in X_2, \forall x_2 \in X_2, \delta(f(x_1, x_2), f(\tilde{x}_1, x_2)) \leq \omega(d_1(x_1, \tilde{x}_1))$$

(potremmo definire questa proprietà dicendo che la funzione $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ è uniformemente continua, con costanti indipendenti dalla scelta di x_2).

Si mostri allora che f è continua.

^aSappiamo da [109] e [OPT] che vi sono diverse possibili scelte di distanze, che però sono fra loro equivalenti.