

15 Funzioni e insiemi convessi

[16V]

Presenteremo ora alcuni risultati riguardo alla convessità. Per semplicità useremo \mathbb{R}^n come spazio ambiente, ma quasi tutti i risultati valgono in un qualunque spazio vettoriale.

15.1 Insiemi convessi

[2F0]

Topologia

Esercizi

E15.1.1 [16Y]

E15.1.2 [16Z]

E15.1.3 [170]

E15.1.4 [172]

E15.1.5 [174]

E15.1.6 [176]

E15.1.7 [178]

E15.1.8 [17B]

E15.1.9 [059]

Definizione 15.1.10. [2G4]

Si vedano anche gli esercizi [122], [130] e [132].

15.1.1 Proiezione, separazione

Esercizi

E15.1.11 [17D]

E15.1.12 [17H]

E15.1.13 [17J]

E15.1.14 [17M]

E15.1.15 [17P]

E15.1.16 [17R]

E15.1.17 [17T]

E15.1.18 [17W]

15.2 Funzione convessa

Definizione 15.2.1. [17Y]

Definizione 15.2.2. [17Z]

Le funzioni convesse godono di tantissime proprietà interessanti, questa che segue è solo una piccola lista.

...definizioni equivalenti

Esercizi

E15.2.3 [180]

E15.2.4 [181]

Proprietà

Questa che segue è una lista di proprietà per funzioni convesse $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ con $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Ovviamente queste proprietà valgono anche quando $n = 1$; ma quando $n = 1$ le dimostrazioni sono in genere più facili, si veda la sezione successiva.

Esercizi

E15.2.5 [182]

E15.2.6 [183]

E15.2.7 [184]

E15.2.8 [186]

E15.2.9 [188]

E15.2.10 [18B]

E15.2.11 [18C]

15.3 Caso reale

Sia $I \subset \mathbb{R}$, allora I è convesso se e solo è un intervallo (si veda [080]). Nel seguito considereremo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dove $I = (a, b)$ è un intervallo aperto.

Esercizi

E15.3.1 [18F]

E15.3.2 [18H]

E15.3.3 [18J]

E15.3.4 [18K]

15.3.1 Convessità e derivate

Esercizi

E15.3.5 [18M]

E15.3.6 [18P]

E15.3.7 [18R]

E15.3.8 [18T]

E15.3.9 [18W]

Si veda anche l' esercizio [18F] per il rapporto fra integrale e convessità.

15.3.2 Funzioni convesse a valori estesi

Consideriamo funzioni convesse che possono anche assumere valore $+\infty$. Sia I un intervallo.

Esercizi

E15.3.10 [18Y]

E15.3.11 [18Z]

15.4 Ulteriori proprietà e esercizi

Esercizi

E15.4.1 [191]

E15.4.2 [192]

E15.4.3 [194]

E15.4.4 [196]

Si veda anche l'esercizio [1C3].

15.4.1 Funzione distanza

Esercizi

E15.4.5 [198]

E15.4.6 [19B]

15.4.2 Funzioni e insiemi strettamente convessi

Esercizi

E15.4.7 [19C]

Nota 15.4.8. [23N]

Ci si chiede ora, cosa accade se f è strettamente convessa?

Definizione 15.4.9. [19D]

(Notate che un insieme strettamente convesso necessariamente ha parte interna non vuota).

Nota 15.4.10. [19F]

Esercizi

E15.4.11 [19G]

[[19J]]