Esercizi

E14.17 [17J] `Argomenti:separazione. Difficoltà:*.`

Questo risultato vale in contesti molto generali, ed è una conseguenza del "teorema di Hahn–Banach" (che fa uso del Lemma di Zorn); se $A \subset \mathbb{R}^n$ si può però dimostrare in modo elementare, vi invito a provarci.

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso nonvuoto e $z \notin A$, si mostri che esiste un iperpiano P che separa z da A, nel senso che $z \in P$ mentre A è contenuto in uno dei due semispazi chiusi che hanno P come bordo. Equivalentemente, in forma analitica, esistono $a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ tali che $\langle z, v\rangle = a$ ma $\forall x \in A, \langle x, v\rangle < a$; e

$$P = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v\rangle = a\} .$$

L'iperpiano P così definito è detto *iperpiano di supporto* di z per A.

Vi sono (almeno) due dimostrazioni possibili. Una possibile dimostrazione si fa per induzione su n; potete assumere senza perdita di generalità che $z = e_1 = (1, 0 \ldots 0), 0 \in A, a = 1$; tenete presente che l'intersezione di un convesso aperto con $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ è un convesso aperto in $\mathbb{R}^{n-1}$; questa dimostrazione è complessa ma non usa nessun prerequisito. Una seconda dimostrazione usa [176] e [17H] se $z \notin \partial A$; se $z \in \partial A$ usa anche [178] per trovare $(z_n) \subset (A^c)^\circ$ con $z_n \to z$.

Soluzione 1. [17K]