Esercizi

14.25 [188] Argomenti:sottodifferenziale.Prerequisiti:[184].Difficoltà:*.

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso aperto, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa; dato $z \in C$, si definisce il *sottodifferenziale* $\partial f(z)$ come l'insieme dei v per cui la relazione [(14.24)] vale (cioè, $\partial f(z)$ contiene i vettori v usati per definire i piani di supporto a f in z).

$\partial f(z)$ gode di interessanti proprietà.

- $\partial f(z)$ è localmente limitato: se $z \in C$ e $r > 0$ è tale che $B(z, 2r) \subset C$ allora esiste $L > 0$ tale che $\forall y \in B(z, r)$, $\forall v \in \partial f(x)$ si ha $|v| \leq L$. In particolare, per ogni $z \in C$ si ha che $\partial f(z)$ è un insieme limitato.
- Mostrate che ∂f è *continua superiormente* in questo senso: se $z \in C$ e $(z_n)_n \subset C$ e $v_n \in \partial f(z_n)$ e se $z_n \to_n z$ e $v_n \to_n v$ allora $v \in \partial f(z)$. In particolare, per ogni $z \in C$, $\partial f(z)$ è un insieme chiuso.

Soluzione 1. *[189]*