

Esercizi

E15.c.6 [18M] Prerequisiti: [18F]. Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

1. Si mostri che in ogni punto esistono la derivata destra $d^+(x)$ e sinistra $d^-(x)$ (In particolare f è continua).
2. Si mostri che $d^-(x) \leq d^+(x)$,
3. mentre per $x < y$ si ha $d^+(x) \leq R(x, y) \leq d^-(y)$.
4. Si deduca che $d^+(x)$ e $d^-(x)$ sono monotone debolmente crescenti.
5. Si mostri che $d^+(x)$ è continua a destra, mentre $d^-(x)$ è continua a sinistra.
6. Inoltre si mostri che $\lim_{s \rightarrow x^-} d^+(s) = d^-(x)$, mentre $\lim_{s \rightarrow x^+} d^-(s) = d^+(x)$. In particolare d^+ è continua in x se e solo se d^- è continua in x se e solo se $d^-(x) = d^+(x)$.
Dunque d^+, d^- sono, per così dire, la stessa funzione monotona, solo che nei punti di discontinuità d^+ assume il valore dei limiti destri mentre d^- il valore dei limiti sinistri.
7. Usate il precedente per mostrare che f è derivabile in x se e solo se d^+ è continua in x , se e solo se d^- è continua in x .
8. Si mostri dunque che f è derivabile salvo che in un numero al più numerabile di punti.

Soluzione 1. [18N]