Esercizi

E16.4 [19S] Prerequisiti:[19Q], [1HS].

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo con estremi a, b; siano $f, f_n : I \to \mathbb{R}$ continue non negative tali che $f_n(x) \nearrow_n f$ puntualmente (cioè per ogni x e n si ha $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ e $\lim_n f_n(x) = f(x)$); si mostri allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad .$$

(Nota se l'intervallo è aperto o semiaperto o illimitato allora gli integrali di Riemann si intendono in senso generalizzato; in questo caso il membro destro può anche valere $+\infty$).

Soluzione 1. *[19T]*

Il precedente risultato prende il nome di *Teorema di Convergenza Monotona* e vale in ipotesi molto generali; nel caso di integrali di Riemann si può però vedere come conseguenza dei risultati [19Q] e [1HS].