Esercizi

16.20 [1DM]Prerequisiti:[1DJ],[09N].Si mostri che la funzione

$$\varphi(x)=\begin{cases}e^{-1/x} & \text{se } x>0\\ 0 & \text{se } x\le 0\end{cases} \tag{16.20}$$

è di classe C^∞, e per $x>0$ si ha

$$\varphi^{(n)}(x)=e^{-1/x}\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}\frac{n!}{m!}\frac{(-1)^{m+n}}{x^{m+n}}\quad ,$$

$$\binom{n-1}{m-1}=\frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!}\quad .$$

mentre $\varphi^{(n)}(x)=0$ per ogni $n\in\mathbb{N}, x\le 0$.

Procedete similmente per

$$\psi(x)=\begin{cases}e^{-1/|x|} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases} \tag{16.21}$$

anche in questo caso $\psi\in C^\infty$ e $\psi^{(n)}(0)=0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$; ma in questo caso $\psi(x)=0 \iff x=0$.

Soluzione 1. *[1DN]*