Esercizi

16.54 [1GZ] Nelle stesse ipotesi del precedente teorema [1GD], mostrate che esistono $\varepsilon > 0$ e una funzione continua $\tilde{g} : V \to \mathbb{R}$ dove $I = (\overline{a} - \varepsilon, \overline{a} + \varepsilon)$ e $V = U' \times I$ è aperto in $\mathbb{R}^n$, tali che

$$\forall (x', a) \in V \quad , \quad (x', \tilde{g}(x', a)) \in U \quad \text{e} \quad f\big(x', \tilde{g}(x', a)\big) = a \quad . \tag{16.54}$$

Viceversa se $x \in U$ e $a = f(x)$ e $a \in I$ allora $x_n = \tilde{g}(x', a)$.

Notate che la precedente relazione significa che, per ogni fissato $x' \in U'$, la funzione $\tilde{g}(x', \cdot)$ è l'inversa della funzione $f(x', \cdot)$ (quando definite su opportuni intervalli aperti).

Dunque si ha anche che la funzione $\tilde{g}$ è sempre differenziabile rispetto ad a, e la derivata parziale è

$$\frac{\partial}{\partial a}\tilde{g}(x', a) = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_n} f(x', \tilde{g}(x', a))} \quad .$$

Le altre derivate invece (ovviamente) sono come nel teorema [1GD].

La regolarità di $\tilde{g}$ è la stessa di g: se f è Lipschitziana allora $\tilde{g}$ è Lipschitziana; se $f \in C^k(U)$ allora $\tilde{g} \in C^k(V)$.

Soluzione 1. *[1H0]*