## Esercizi

E17.d.14 [1H3] Prerequisiti: [0JV], [0JY], [0T5], [0T7], [1DT], [1GD], [1P1] e [1PG].

Difficoltà:**.

Per questo esercizio sono necessarie definizioni e risultati presentati nel capitolo [1NT].

Sia $r \geq 1$ intero, o $r = \infty$. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^r$, e tale che $\nabla F \neq 0$ in ogni punto in cui $F = 0$.

Sappiamo da che [0JV] che $\{F = 0\}$ è l'unione disgiunta di componenti connesse, da [0JY] che ogni componente connessa è un chiuso.

Mostrate che, per ogni componente connessa $K$, vi è un aperto $A \supseteq K$ tale che $K = A \cap \{F = 0\}$, e che dunque vi è un numero al più numerabile di componenti connesse.

Mostrate che ogni componente connessa è il sostegno di una curva semplice immersa e di classe $C^r$, di uno dei seguenti due tipi:

- la curva è chiusa, oppure
- la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ non è chiusa e è illimitata (cioè $\lim_{t\to\pm\infty} |\gamma(t)| = \infty$).

Il primo caso si verifica se e solo se la componente connessa è un compatto.

**Soluzione 1.** *[1H4]*