Esercizi

E17.9 [1J3] Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Quali di queste classi $\mathcal{F}$ di funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ sono chiuse per convergenza uniforme? Quali sono chiuse per convergenza puntuale?

1. Le funzioni continue e monotone (debolmente) crescenti su $I = [0, 1]$.

   Soluzione 1. *[1J4]*

2. Le funzioni convesse su $I = [0, 1]$.

   Soluzione 2. *[1J5]*

3. Data $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una fissata funzione continua con $\omega(0) = 0$ (che è detta "*modulo di continuità*"), sia

   $$\mathcal{F} = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ : \ \forall x, y, |f(x) - f(y)| \le \omega(|x - y|)\}$$

   (questa è detta *una famiglia di funzioni equicontinue*, come spiegato nella definizione [1HR].)

   Soluzione 3. *[1J6]*

4. Dato $N \ge 0$ fissato, la famiglia di tutti i polinomi di grado minore o uguale a N, visti come funzioni $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

   Soluzione 4. *[1J7]*

5. Le funzioni regolate su $I = [0, 1]$. [a]

   Soluzione 5. *[1J9]*

6. Le funzioni uniformemente continue e limitate su $I = \mathbb{R}$.

   Soluzione 6. *[1JB]*

7. Le funzioni Hoelderiane su $I = [0, 1]$, cioè

   $$\left\{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists b > 0, \exists \alpha \in (0, 1]\ \forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f$$

   Soluzione 7. *[1JC]*

8. Le funzioni Riemann integrabili su $I = [0, 1]$.

   Soluzione 8. *[1JF]*

---

[a] Le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ *regolate* sono le funzioni che ammettono in ogni punto limite destro e limite sinistro finiti. Si veda la Sezione [2CT].