Esercizi

E18.10 [1JG] Ci chiediamo se le classi precedenti $\mathcal{F}$ godono di una "*proprietà di rigidità*", cioè se da una convergenza più "debole" nella classe segue una convergenza più "forte". Dimostrate le seguenti proposizioni.

1. Siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ continue e monotone (debolmente) crescenti, definite su un intervallo $I = [a, b]$ chiuso e limitato. Se vi è un insieme denso J in I e con $a, b \in J$, per cui $\forall x \in J, f_n(x) \to_n f(x)$, allora $f_n \to_n f$ uniformemente.

   Soluzione 1. *[1JH]*

2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto. Siano $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ convesse su A. Se vi è un insieme J denso in A tale che $\forall x \in J, f_n(x) \to_n f(x)$, allora per ogni $[a, b] \subset A$ si ha che $f_n \to_n f$ uniformemente su $[a, b]$.

   Soluzione 2. *[1JJ]*

3. Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ una successione equicontinua di funzioni [a] definite su un intervallo $I = [a, b]$ chiuso e limitato, e sia ω il loro modulo di continuità. Se vi è un insieme J denso in $[a, b]$ tale che $\forall x \in J, f_n(x) \to_n f(x)$, allora, f si estende da J a I in modo da essere continua (con modulo ω), e $f_n \to_n f$ uniformemente su $[a, b]$.

   Soluzione 3. *[1JK]*

4. Siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ polinomi di grado minore o uguale a N, visti come funzioni definite su un intervallo $I = [a, b]$ chiuso e limitato; siano fissati $N + 1$ punti distinti $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leq b$; supponiamo che , per ogni x_i, $f_n(x_i) \to_n f(x_i)$: allora f_n convergono a f uniformemente, e così ogni loro derivata $D^k f_n \to_n D^k f$ uniformemente.

   Soluzione 4. *[1JM]*

Si cerchino inoltre controesempi per simili proposizioni quando applicate alle altre classi di funzioni viste nell'esercizio precedente.

---

[a] La definizione è in [1HR]