Esercizi

18.12 [1M3]Prerequisiti:[1K9],[1KQ], [20V], [20W].È uso definire

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

per $z \in \mathbb{C}$. Vogliamo riflettere su questa definizione.

- Innanzitutto, per ogni $z \in \mathbb{C}$, possiamo effettivamente definire
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$
(si noti infatti che il raggio di convergenza è infinito — come si verifica facilmente usando il criterio della radice [219]).
- Notiamo che $f(0) = 1$; definiamo $e = f(1)$ che è il *numero di Nepero*[a]
- Si mostri che $f(z + w) = f(z)f(w)$ per $z, w \in \mathbb{C}$.
- Si verifica facilmente che $f(x)$ è monotona crescente per $x \in (0, \infty)$; usando la relazione precedente, si ottiene che è monotona crescente per $x \in \mathbb{R}$.
- Si mostri poi che, per $n, m > 0$ interi, $f(n/m) = e^{n/m}$ (per la definizione di $e^{n/m}$ si riveda [20V]).
- Si deduca che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ (per la definizione di e^x si riveda [20W])

Soluzione 1. *[1M4]*

---

[a] Conosciuta come *Euler's number* o *Napier's constant* in Inglese.