Esercizi

18.24 [1N0]Prerequisiti:[1T1].Difficoltà:**. Nel caso generale (anche quando non sappiamo se A, B commutano), possiamo esprimere $\exp(A + sB)$ usando una espressione in serie di potenze. Definiamo

$$C(t) = \exp(-tA)B \exp(tA)$$

e (ricorsivamente) $Q_0 = \mathbb{I}$ (la matrice identità) e poi

$$Q_{n+1}(t) = \int_0^t C(\tau)Q_n(\tau)\, d\tau$$

allora si ha

$$\exp(-A)\exp(A + sB) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n Q_n(1) \quad ; \tag{18.24}$$

questa serie converge per ogni s.

Se ne ricava in particolare che la derivata direzionale di exp nel punto A in direzione B è

$$\frac{d}{ds}\exp(A+sB)|_{s=0} = \exp(A)Q_1(1) = \int_0^1 \exp((1-\tau)A)B\exp(\tau A)$$

(Sugg. usate l'esercizio [1T1] con $Y(t,s) = \exp(-tA)\exp(t(A + sB))$ *e poi ponete* $t = 1$. *)*

Soluzione 1. *[1N1]*