Esercizi

E23.6 [1QR] Prerequisiti: [19S]. Siano dati $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ fissati e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione limitata e continua con $f(x_0) = 0$ ma $f(x) > 0$ per $x \neq x_0$. Vogliamo studiare il problema autonomo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \ , \\ x(t_0) = x_0 \ . \end{cases}$$

Notate che $x \equiv x_0$ è una possibile soluzione. Mostrate che se, per $\varepsilon > 0$ piccolo, [a]

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{f(y)} \, \mathrm{d}y = \infty \tag{23.7}$$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{1}{f(y)} \, \mathrm{d}y = \infty \tag{23.8}$$

allora $x \equiv x_0$ è l'unica soluzione; mentre in caso contrario esistono molte soluzioni di classe C^1: descrivetele tutte.

Soluzione 1. *[1QS]*

Le condizioni (23.7) e (23.8) sono un caso particolare della *condizione di unicità di Osgood*, si veda Problem 2.25 in [?].

[a] Se la condizione vale per un $\varepsilon > 0$ allora vale per ogni $\varepsilon > 0$, dato che $f > 0$ lontano da x_0.