Esercizi

E22.17 [1RK] Discutete l'equazione differenziale

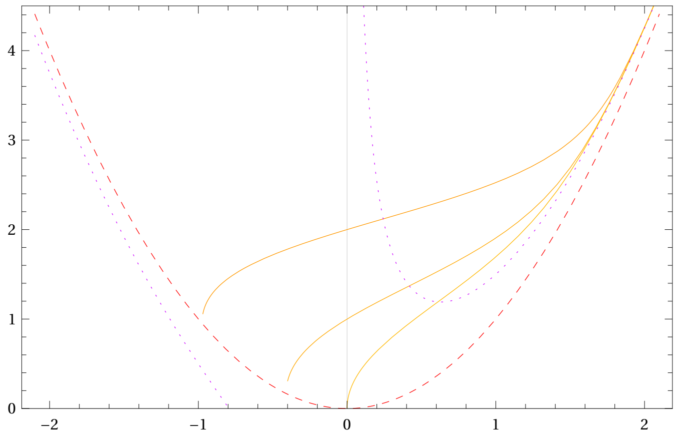
$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x)-x^2} \\ y(0) = a \end{cases}$$

per $a \neq 0$, studiando in modo qualitativo l'esistenza (locale o globale) delle soluzioni, e le proprietà di monotonia e convessità/concavità. [a]

Mostrate che la soluzione esiste per tutti i tempi positivi.

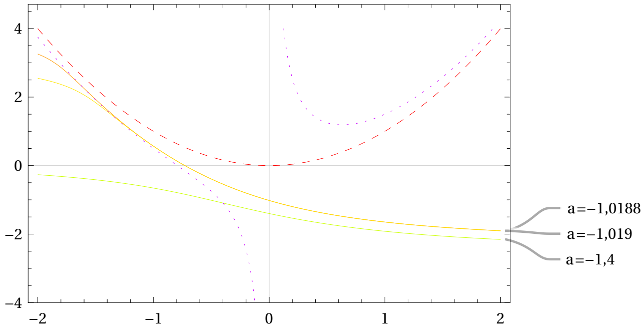
Mostrate che per $a > 0$ la soluzione non si estende a tutti i tempi negativi.

Difficoltà:*. Mostrate che esiste un $\tilde{a} < 0$ critico tale che, per $\tilde{a} < a < 0$ la soluzione non si estende a tutti i tempi negativi, mentre per $a \leq \tilde{a}$ la soluzione esiste per tutti i tempi negativi; inoltre per $a = \tilde{a}$ si ha $\lim_{x\to-\infty} y(x) - x^2 = 0$.



In viola a puntini la linea dei flessi. In rosso tratteggiato la parabola dove la derivata della soluzione è infinita. In giallo le soluzioni con dati iniziali $y(0) = 2$, $y(0) = 1$, $y(0) = 1/1000$.

Figura 9: Esercizio 22.17. Soluzioni per $a > 0$



In viola a puntini la linea dei flessi. In rosso tratteggiato la parabola dove la derivata della soluzione è infinita. Sono disegnate le soluzioni con dati iniziali $a = -1,4$ ("verde"), $a = -1,0188$ ("arancione")e $a = -1,019$ ("gialla"). Notate che queste ultime si differenziano solo per $0,0002$ come dati iniziali, sono indistinguibili nel grafico per $x > -1$, ma poi per $x < -1$ si allontanano velocemente, e per $x = -2$ valgono rispettivamente $3,25696$ e $2,54856$, con una differenza di circa $0,7$!

Figura 10: Esercizio 22.17. Soluzioni per $a < 0$

Soluzione 1. *[1RP]*

[a] L'equazione differenziale è tratta dall'esercizio 13 in [2].