Esercizi

E24.40 [1T1] Prerequisiti:[118],[11K].Difficoltà:*.

Sia $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ lo spazio delle matrici, lo dotiamo di una norma $\|C\|_V$ submoltiplicativa. Sia $C \in V$ e siano $A, B : \mathbb{R} \to V$ curve continue nello spazio delle matrici.

- Definite ricorsivamente $Q_0 = C$, e

  $$Q_{n+1}(s) = \int_0^s A(\tau) Q_n(\tau) B(\tau) \,\mathrm{d}\tau \quad ;$$

  mostrate che la serie

  $$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t)$$

  è ben definita, mostrando che, per ogni $T > 0$, converge totalmente nello spazio delle funzioni continue $C^0 = C^0([-T, T] \to V)$, dotato della norma

  $$\|Q\|_{C^0} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|t|\le T} \|Q(t)\|_V \quad .$$

- Mostrate che la funzione appena definita è la soluzione dell'equazione differenziale

  $$\frac{d}{dt} Y(t) = A(t) Y(t) B(t) \quad , \quad Y(0) = C \ .$$

- Nel caso in A, B siano costanti, notate che

  $$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{A^n C B^n}{n!} \quad .$$

Soluzione 1. *[1T2]*