

Esercizi

E24.1 [1T9] Note:rielaborato dal compito 26 Gennaio 2016.

Sia $(q_n)_{n \geq 1}$ una enumerazione dei razionali di $(0, 1)$ e definiamo

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n: q_n < t} 2^{-n}$$

e

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n: q_n \leq t} 2^{-n}$$

per $t \in (0, 1)$.

- Mostrate che f, g sono strettamente crescenti.
- Calcolate i limiti per $t \downarrow 0$ e $t \uparrow 1$.
- Mostrate che f è continua a sinistra, g è continua a destra, e che

$$\lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau) = g(t) \quad , \quad \lim_{\tau \rightarrow t-} g(\tau) = f(t) \quad .$$

- Mostrate inoltre che f è discontinua in t se e solo se $t \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$; e similmente per g .
- Cosa cambia se sostituiamo 2^{-n} con il termine a_n di una serie assolutamente convergente?

Soluzione 1. [1TB]