Esercizi

E24.4 [1TG] Note: *riadattati dal compitino 9 apr 2011.*

Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty \quad .$$

- Fissato $a < f(0)$ sia M_a l'insieme degli $m \in \mathbb{R}$ tali che la retta $y = mx + a$ intersechi il grafico $y = f(x)$ della funzione f in almeno un punto: si mostri che M_a ammette minimo $\hat{m} = \hat{m}(a)$;
- si mostri che $\hat{m}$ dipende in modo continuo da a, [a]
- e che $\hat{m}(a)$ è monotona strettamente decrescente.
- Se f è derivabile, si mostri che la retta $y = \hat{m}(a)x + a$ è tangente al grafico in tutti i punti in cui lo incontra.
- Supponiamo ulteriormente che f sia di classe C^2 e che $f''(x) > 0 \forall x > 0$ [b]. Si mostri che vi è un unico punto x in cui la retta $y = \hat{m}(a)x + a$ incontra il grafico $y = f(x)$; lo chiamiamo $\hat{x} = \hat{x}(a)$;
- e mostrate che le funzioni $a \mapsto \hat{x}(a)$ e $a \mapsto \hat{m}(a)$ sono derivabili.

Soluzione 1. *[1TH]*

[a] Suggerimento: ripensate all'esercizio [14W].
[b] Usate l'esercizio [1TD] precedente!