Esercizi

E24.5 [1TJ] `Argomenti:cerchio osculatore. Note:`*riadattati dal compitino 9 apr 2011.*

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in 0, con $f(0) = 0$ e $f''(0) \neq 0$. Si dimostri che esistono unici un punto $P = (a, b)$ nel piano e una costante $r > 0$, tali che

$$d\big(P, (x, f(x))\big) = r + o(x^2),$$

determinando a, b, r in funzione di $f'(0), f''(0)$. Si intende che $d(P, Q)$ è la distanza euclidea fra due punti P, Q nel piano.

Sugg. per chiarirvi le idee, provate innanzitutto il caso in cui anche $f'(0) = 0$.

(Il grafico della funzione f è una curva nel piano; per ipotesi questa curva passa per l'origine; in questo esercizio abbiamo determinato il cerchio, di raggio r e centro P, che meglio approssima la curva nelle vicinanze dell'origine: questo cerchio è detto "cerchio osculatore", e il suo raggio si chiama "raggio di curvatura", e l'inverso del raggio è la "curvatura" della curva nell'origine.)

Soluzione 1. *[1TK]*