Esercizi

E24.1 [1TY] Note: *compitino 12/1/2013.*

Dato un sottoinsieme E di $\mathbb{N}$ e un intero $n \in \mathbb{N}$, l'espressione

$$\frac{\operatorname{card}(E \cap \{0, 1, ..., n\})}{n+1}$$

indica quale frazione del segmento $\{0, 1, ..., n\}$ è contenuta in E. La nozione di "densità" in $\mathbb{N}$ di E è riferita al comportamento di tali frazioni al tendere di n all'infinito. Precisamente, si definiscono la densità superiore $\overline{d}(E)$ di E e la sua densità inferiore $\underline{d}(E)$ come

$$\overline{d}(E) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}(E \cap \{0, 1, ..., n\})}{n+1} \quad ,$$

$$\underline{d}(E) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}(E \cap \{0, 1, ..., n\})}{n+1} \quad .$$

Se $\overline{d}(E) = \underline{d}(E) = d \in [0, 1]$, si dice che E ha densità d. (Si veda anche [50].)

(a) Si dimostri che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1$, l'insieme $E_\alpha = [n\alpha] : n \in N$ ha densità $d = 1/\alpha$ (il simbolo $[x]$ indica la parte intera di $x \in R$).

(b) Sia $E = \{m_0, m_1, ..., m_k, ...\}$ un insieme infinito, con $m_0 < m_1 < ... < m_k < ....$ Si dimostri che $\overline{d}(E) = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{m_k}$ e $\underline{d}(E) = \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{m_k}$.

(c) Si trovi un insieme E con $\overline{d}(E) = \overline{d}(\mathbb{N} \setminus E) = 1$.