Esercizi

E24.16 [1V4] Argomenti: matrice, determinante. Prerequisiti: [1V2]. Difficoltà: *.

Vogliamo generalizzare i risultati del precedente esercizio [1V0] al caso di matrici $n \times n$.

Ricordiamo le seguenti proprietà del determinante delle matrici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Il rango è la dimensione dell'immagine di A (vista come applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$) ed è anche il massimo numero di colonne linearmente indipendenti in A.
- A ha rango n se e solo $\det(A) \neq 0$.
- Se si scambiano due colonne in A, il determinante cambia di segno;
- se si somma a una colonna un multiplo di un altra colonna il determinante non cambia.
- La caratterizzazione del rango tramite i minori, *«Il rango di A è pari al massimo ordine di un minore invertibile di A»*.
- lo sviluppo di Laplace del determinante, e la formula di Jacobi (*cf* [1V2]).
- Il determinante di A è uguale al determinante della trasposta; dunque ogni risultato precedente vale se si legge "riga" invece di "colonna".

Si vedano anche [68, 59].

Mostrate i seguenti risultati.

1. Mostrate che il gradiente della funzione $\det(A)$ è nonnullo se e solo se il rango di A è almeno $n - 1$.
2. Sia Z l'insieme delle matrici $\mathbb{R}^{n\times n}$ con determinante nullo; mostrate che è un chiuso con parte interna vuota.
3. Sia B una matrice fissata di rango al più $n - 2$, mostrate che la tesi del teorema è falsa negli intorni U_B della matrice B, nel senso che $Z \cap U_B$ non è contenuto in una superfice[a].

[[1V5]]

Soluzione 1. *[1V6]*

---

[a] Non vi scervellate, è più facile di quello che sembra… ci sono troppe matrici con determinante nullo vicino a B…