# §3.i Logica [1YS]

[23H]

## §3.i.i Proposizioni

**Definizione 3.i.1.** *[1VW]*

**Esempio 3.i.2.** *[1VX]*

[23J]
Una proposizione può dipendere da alcune variabili. Esempi:

- “la persona x di mestiere fa il panettiere”,
- “il numero x è maggiore di 9”.

Scriveremo

$$P(x) \doteq \text{“il numero x è maggiore di 9”}$$

per dire che $P(x)$ è il simbolo che riassume la proposizione scritta a destra.

**Nota 3.i.3.** *[23K]*

## §3.i.ii Logica proposizionale

**Definizione 3.i.4.** *[00D]*

[ [00F]]

**Definizione 3.i.5.** *[00G]*

[1YK]

**Nota 3.i.6.** *[228]*

[ [00H]]

**Definizione 3.i.7.** *[00J]*

Dunque una formula ben formata è una “*proposizione logica*” in quanto assume valore di verità o di falsità, a seconda del valore dato alle sue variabili libere. Possiamo allargare la definizione aggiungendo che le proposizioni viste nella sezione precedente sono “formule atomiche”; ad esempio

$$\text{“}x\text{ è un numero minore di 3”} \wedge \text{“}y\text{ è un numero pari”}$$

sarà anch’essa una “formula ben formata”.

Per comodità, in questa Sezione, aggiungiamo al linguaggio anche le costanti $V$ e $F$ che sono rispettivamente sempre vere e sempre false, in ogni valutazione. [†5] Nella costruzione delle formule ben formate vengono trattate come le variabili. Notate che non abbiamo introdotto il connettivo di uguaglianza “=”. Quando tutte le variabili possono assumere solo i valori vero/falso, l’uguaglianza $a = b$ può essere interpretata come $a \iff b$. In contesti più generali (come nel caso della teoria degli insiemi) invece “l’uguaglianza” necessita di una precisa definizione.

[†5] Le costanti $V$ e $F$ possono essere eliminate dalla logica definendole come $V = A \vee \neg A$ e $F = \neg V$.

**Esercizi**

E3.i.8 [1VY]

E3.i.9 [00K]

E3.i.10 [00N]

E3.i.11 [22C]

E3.i.12 [2G8]

### §3.i.iii Logica del primo ordine

Nella logica del primo ordine si aggiungono i connettivi ∀, che si legge *"per ogni"* e ∃, che si legge *"esiste"*. Dobbiamo dunque allargare la famiglia delle **formule ben formate**.

**Definizione 3.i.13.** *[00Q]*

In ogni parte di una formula in cui una variabile è quantificata, questa variabile può essere sostituita con ogni altra variabile.

**Nota 3.i.14.** *[1X1]*

**Nota 3.i.15.** *[2DC]*

Notate che, in molti esempi, si suppone che le variabili quantificate siano elementi di un "insieme".

**Definizione 3.i.16.** *[1X2]*

**Definizione 3.i.17.** *[00R]*

Usiamo qui il termine "insieme" in maniera informale, si veda la nota [01J].

**Nota 3.i.18.** *[00S]*

Dato che un elemento di un insieme potrebbe non avere un valore di verità/falsità, arricchiamo il linguaggio aggiungendo le "*proposizioni logiche*".

**Definizione 3.i.19.** *[00T]*

Un esempio di proposizione logica potrebbe essere: *"n è un numero pari"*. Possiamo usare le proposizioni logiche come atomi nella costruzione delle formule ben formate.

**Esercizi**

E3.i.20 [00V]

E3.i.21 [00X]

E3.i.22 [00Z]

E3.i.23 [011]

E3.i.24 [016]

E3.i.25 [013]