§2.a Logica [1YS]

[23H]

§2.a.a Proposizioni

Definizione 2.1. *[1VW]*

Esempio 2.2. *[1VX]*

[23J]
Una proposizione può dipendere da alcune variabili. Esempi:

- "la persona x di mestiere fa il panettiere",
- "il numero x è maggiore di 9".

Scriveremo

$$P(x) \doteq \text{"il numero x è maggiore di 9"}$$

per dire che $P(x)$ è il simbolo che riassume la proposizione scritta a destra.

Nota 2.3. *[23K]*

§2.a.b Logica proposizionale

Definizione 2.4. *[00D]*

[[00F]]

Definizione 2.5. *[00G]*

[1YK]

Nota 2.6. *[228]*

[[00H]]

Definizione 2.7. *[00J]*

Dunque una formula ben formata è una "*proposizione logica*" in quanto assume valore di verità o di falsità, a seconda del valore dato alle sue variabili libere. Possiamo allargare la definizione aggiungendo che le proposizioni viste nella sezione precedente sono "formule atomiche"; ad esempio

$$\text{"}x \text{ è un numero minore di 3"} \wedge \text{"}y \text{ è un numero pari"}$$

sarà anch'essa una "formula ben formata".

Per comodità, in questa Sezione, aggiungiamo al linguaggio anche le costanti V e F che sono rispettivamente sempre vere e sempre false, in ogni valutazione. [†5] Nella costruzione delle formule ben formate vengono trattate come le variabili. Notate che non abbiamo introdotto il connettivo di uguaglianza "=". Quando tutte le variabili possono assumere solo i valori vero/falso, l'uguaglianza $a = b$ può essere interpretata come $a \iff b$. In contesti più generali (come nel caso della teoria degli insiemi) invece "l'uguaglianza" necessita di una precisa definizione.

[†5] Le costanti V e F possono essere eliminate dalla logica definendole come $V = A \vee \neg A$ e $F = \neg V$.

Esercizi

E2.8 [1VY]

E2.9 [00K]

E2.10 [00N]

E2.11 [22C]

E2.12 [2G8]

§2.a.c Logica del primo ordine

Nella logica del primo ordine si aggiungono i connettivi $\forall$, che si legge *"per ogni"* e $\exists$, che si legge *"esiste"*. Dobbiamo dunque allargare la famiglia delle **formule ben formate**.

Definizione 2.13. *[00Q]*

In ogni parte di una formula in cui una variabile è quantificata, questa variabile può essere sostituita con ogni altra variabile.

Nota 2.14. *[1X1]*

Nota 2.15. *[2DC]*

Notate che, in molti esempi, si suppone che le variabili quantificate siano elementi di un "insieme".

Definizione 2.16. *[1X2]*

Definizione 2.17. *[00R]*

Usiamo qui il termine "insieme" in maniera informale, si veda la nota [01J].

Nota 2.18. *[00S]*

[2GV]

Dato che un elemento di un insieme potrebbe non avere un valore di verità/falsità, arricchiamo il linguaggio aggiungendo le "*proposizioni logiche*".

Definizione 2.19. *[00T]*

Un esempio di proposizione logica potrebbe essere: *"n è un numero pari"*. Possiamo usare le proposizioni logiche come atomi nella costruzione delle formule ben formate.

Esercizi

E2.20 [00V]

E2.21 [00X]

E2.22 [00Z]

E2.23 [011]

E2.24 [016]

E2.25 [013]