Proposizione 3.194. [1Z7] (Replaces 06G) (Replaces 06H) *Consideriamo R una relazione in $A \times A$ transitiva e riflessiva: una tale relazione è detta un* preordine *[?]; definiamo $x \sim y \iff (xRy \wedge yRx)$ allora $\sim$ è una relazione di equivalenza, R è invariante per $\sim$, e $\widetilde{R}$ (definita come in* [1Z6]*) è una relazione d'ordine.*

Dimostrazione.

1. $\sim$ è chiaramente riflessiva e simmetrica; è transitiva perché se $x \sim y, y \sim z$ allora $xRy \wedge yRx \wedge yRz \wedge zRy$ ma essendo R transitiva si ottiene $xRz \wedge zRx$ cioè $x \sim z$

2. Siano $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in X$ tali che $x \sim \tilde{x}, y \sim \tilde{y}$ allora si ha $xR\tilde{x} \wedge \tilde{x}Rx \wedge yR\tilde{y} \wedge \tilde{y}Ry$ se aggiungiamo xRy per transitività otteniamo $\tilde{x}R\tilde{y}$; e simmetricamente.

3. Vediamo infine che $\widetilde{R}$ è una relazione d'ordine su Y. Usando la (buona) definizione "$[x]\widetilde{R}[y] \iff xRy$" deduciamo che $\widetilde{R}$ è riflessiva e transitiva (come del resto asserito nella proposizione precedente). $\widetilde{R}$ è anche antisimmetrica perché se per $z, w \in A/\sim$ si ha $z\widetilde{R}w \wedge w\widetilde{R}z$ allora presi $x \in z, y \in w$ si ha $xRy \wedge yRx$ che vuol dire $x \sim y$ e dunque $z = w$.

$\square$