Proposizione 6.20. [208](Svolto il 2022-11-24) *Sia dunque $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, sia $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; si possono facilmente dimostrare le seguenti proprietà:*

$\sup A \le l$	$\forall x \in A, x \le l$
$\sup A > l$	$\exists x \in A, x > l$
$\sup A < l$	$\exists h < l, \forall x \in A, x \le h$
$\sup A \ge l$	$\forall h < l, \exists x \in A, x > h$

la prima e la terza derivano dalla definizione di estremo superiore, [a] *la seconda e la quarta per negazione; nella terza si può concludere equivalentemente che $x < h$, e nella quarta che $x \ge h$.*

Se $l \ne +\infty$ allora usa anche scrivere (sostituendo $h = l - \varepsilon$)

$\sup A < l$	$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, x \le l - \varepsilon$
$\sup A \ge l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > l - \varepsilon$

[a] In particolare nella terza si può pensare che $h = \sup A$.